сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-208

Л.А.Бордаг, А.В.Китаев

О СВЯЗИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

1987

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в работах, посвященных нелинейным эволюционным уравнениям (НЭУ), активно ведется исследование их автомодельных решений[I-I5]. В частности, в работах[4-I4] методом инфинитезимальных преобразований получены многочисленные автомодельные подстановки для многомерных НЭУ, сводящие их к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Как правило, эти уравнения являются уравнениями типа Пенлеве. Изучение автомодельных решений представляется сейчас весьма актуальным по следующим причинам. Во-первых, сейчас имеется ряд работ, описывающих асимптотическое поведение решений уравнений Пенлеве[I8,29]. Во-вторых, автомодельные решения позволяют получить для достаточно широкого множества решений НЭУ утверждения об их асимптотическом поведении[28]. Кроме того, использование связи уравнений Пенлеве и НЭУ позволяет получить для НЭУ частные классы автомодельных решений.

Остановимся кратко на содержании работы. В первом параграфе данной работы мы приведем необходимые формулы и получим преобразование Бэклунда (ПБ) для уравнения P_{34}. Во втором параграфе укажем, каким образом общее решение второго уравнения Пенлеве (P_2)* с произвольным параметром связано с цепочками Тода и Вольтерра. Тем самым мы обобщим результат Каметаки[I9,20], который обнаружил связь между известными рациональными решениями P_2 [3I,32] и рациональными решениями цепочки Тода. Здесь же приведем решения цепочки Тода, выражающиеся через функции Эйри. В третьем параграфе мы показываем, что при вырождении уравнения P_{34} его решения выражаются через $\wp$ -функции Вейерштрасса, а преобразование Бэклунда переходит при этом в частный случай теоремы сложения для $\wp$ -функций. Используя эти построения, получаем частные решения цепочки Тода, выражающиеся через $\wp$ -функции. В четвертом параграфе мы получаем точное общее решение модели Лоренца при специальном выборе параметров, выражающееся

---

* Интересно заметить, что известна также связь пятого уравнения Пенлеве с цепочкой Тода/2I/.

через общее решение P_2. В пятом параграфе мы обобщаем известные замены Луговцовых/33/, Джонсона/23/ и Смирнова/34/, которые связывают уравнения КдВ и КП с их цилиндрическими аналогами. Из этих рассмотрений, в частности, следует, что сферическое уравнение КдВ становится вполне интегрируемым при добавлении к нему неоднородного члена. Здесь мы не выписываем автомодельных редукций НЭУ к уравнениям Пенлеве, но они без труда могут быть выписаны, если воспользоваться приведенными в параграфе формулами и соответствующими результатами для КдВ и КП/4,7/.

I. Связь P_2 и P_{34}. Преобразование Бэклунда для P_{34}.

В работе нам конкретно потребуется связь уравнений P_2 и P_{34}. Хотя те или иные аспекты этой взаимосвязи уже обсуждались в литературе, мы считаем необходимым для лучшего понимания дальнейшего подробно остановиться на ней.

Рассмотрим уравнение P_{34} в виде

$$F_{xx}=\frac{F_x^2}{2F}+\alpha F^2+\beta xF-\frac{c^2}{2F}. \qquad (P_{34})$$

В классификации Пенлеве, приведенной Айнсом/30/, это уравнение записано в виде

$$F_{xx}=\frac{F_x^2}{2F}+4\alpha F^2-xF-\frac{1}{2F}.$$

Легко заметить, что при $\beta c\neq0$ эти уравнения масштабным преобразованием переходят друг в друга, но для наших целей удобнее первая форма записи. Под уравнением P_2 мы будем понимать уравнение

$$u_{xx}=2u^3+\mu xu+\nu. \qquad (P_2)$$

При $\mu\neq0$ его легко привести к стандартному виду с $\mu=1$ при помощи масштабного преобразования. Все наши дальнейшие построения будут справедливы для любых значений параметров α,β,c,μ,ν. При стандартном выборе параметров связь P_2 и P_{34} была указана в работах/30,16/. Здесь мы приведем эти формулы в модифицированном виде.

Пусть $F(x)$–решение уравнения P_{34}, тогда функция $u(x)$, построенная по формуле

$$u(x)=\delta_1\frac{F_x}{F}+\delta_2\frac{1}{F}, \qquad (I)$$

будет решением P_2 при $\mu=-\beta$,

$$\nu=\beta\delta_1-\alpha\delta_2, \quad \delta_1^2=\frac{1}{4}, \quad \delta_2^2=\frac{c^2}{4}.$$

С другой стороны, имея решение P_2, мы можем по нему построить решение P_{34} по формуле

$$F(x)=\gamma\left(\varepsilon u_x+u^2+\frac{\mu}{2}x\right), \qquad (2)$$

при этом

$$\alpha=\frac{2}{\gamma}, \quad \beta=-\mu, \quad c^2=\gamma^2\left(\nu\varepsilon+\frac{\mu}{2}\right)^2, \quad \varepsilon=\pm1.$$

Если в уравнении P_2 $\nu=0$, то также будет справедлива формула

$$F(x)=\gamma u^2(x), \qquad (3)$$

причем здесь $\alpha=\frac{4}{\gamma}$, $\beta=2\mu$, $c=0$. Применим последовательно формулы (I) и (2), выбирая в (I) $\delta_1=-\frac{\varepsilon}{2}$ и $\delta_2=\mp\frac{\varepsilon c}{2}$ *), тогда придем к следующему утверждению.

<u>Утверждение</u>. Пусть $F_1(x)$ будет неким решением P_{34} при $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$ и $c=c_1$, тогда функция $F_2(x)$

$$F_2(x)=\frac{1}{\alpha_2}\left(\left(\frac{F_{1x}(x)\pm c_1}{F_1(x)}\right)^2-\alpha_1F_1(x)-2\beta_1x\right) \qquad (4)$$

также будет решением P_{34} при $\alpha=\alpha_2$, $\beta=\beta_2$, $c=c_2$, где

$$\beta_1=\beta_2, \quad \alpha_2\neq0, \quad (\alpha_2c_2)^2=(\alpha_1c_1\mp2\beta_1)^2. \qquad (5)$$

Заметим, что это ПБ (4) для P_{34} можно было бы получить и из известного ПБ для P_2, но это значительно более громоздкая процедура.

Применим теперь последовательно преобразования (2) и (I), выбрав $\delta_1=\frac{1}{2}$, $\delta_2=\frac{\gamma}{2}(\nu_1\varepsilon+\mu/2)$, получим подобным же образом ПБ для P_2

$$u_2(x)=\varepsilon u_1(x)+\frac{\nu_1\varepsilon+\frac{\mu_1}{2}}{\varepsilon u_{1x}(x)+u_1^2(x)+\frac{\mu_1}{2}x} \qquad (6)$$

$$\mu_2=\mu_1, \quad \nu_2=-(\mu_1+\nu_1\varepsilon).$$

Здесь $u_1(x)$ и $u_2(x)$–решения P_2 при параметрах, соответственно, μ_1,ν_1 и μ_2,ν_2. При $\mu_1\neq0$ эта формула эквивалентна приведенной в работе/35/.

*) Если выбрать $\delta_1=\frac{\varepsilon}{2}$, $\delta_2=\pm\frac{c\varepsilon}{2}$, то вместо выражения (4) получим $\alpha_2F_2=\alpha_1F_1$, $\beta_1=\beta_2$, $(\alpha_1c_1)^2=(\alpha_2c_2)^2$.

Последовательно применяя формулы (3) и (I), получим, что уравнения

$$\tilde{u}_{xx} = \lambda_1 \tilde{u}^3 + \mu_1 x \tilde{u}$$
$$V_{xx} = 2V^3 - 2\mu_1 x + \mu_1 \varepsilon$$

связаны преобразованием

$$V(x) = \varepsilon \frac{\tilde{u}_x(x)}{\tilde{u}(x)} .$$

При $\lambda_1 \mu_1 \neq 0$ это выражение приведено в работе /36/. Применяя эти формулы в обратном порядке, получим, что

$$\tilde{u}(x) = \sqrt{(\varepsilon V_x(x) + V^2(x) + \frac{\mu_1}{2} x)/2} , \tag{7}$$

здесь $\lambda_1 = 2$.

Совершенно так же, компонуя подстановки (2) и (3), мы можем получить подобные формулы для решений P_{34}. Действительно, пусть $F_1(x)$ – решение P_{34} с параметрами $\alpha_1 C_1 = \beta_1$, тогда

$$F_2(x) = \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{F_{1x}(x) + C_1}{F_1(x)} \right)^2 \tag{8}$$

будет решением P_{34} с параметрами $C_2 = 0$, $\beta_2 = -2\beta_1$, α_2 - любое, отличное от нуля. Обратная формула имеет вид

$$F_1(x) = \frac{1}{\alpha_1} \left(\left(\sqrt{\alpha_2 F_2(x)} \right)_x + \frac{\alpha_2}{2} F_2(x) + \frac{\beta_2}{2} x \right) . \tag{9}$$

Полученные здесь преобразования (7-9) ранее не выписывались и дополняют описанные в работе /16/.

2. Цепочки Тода и Вольтерра и уравнение P_2.

Зафиксируем произвольным образом параметры уравнения P_{34}; пусть $\alpha_0, \beta_0, C_0 \in \mathbb{C}$, соответствующее решение обозначим через $F_0(x)$. Теперь определим $F_n(x)$ следующим образом:

$$n \geq 0, \quad F_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \left(\frac{F_{n_x} + C_n}{F_n} \right)^2 - \alpha_n F_n - 2\beta_n x , \tag{I0}$$

где $\alpha_{n+1} C_{n+1} = \alpha_n C_n - 2\beta_0$, $\alpha_n \neq 0$ при $n \neq 0$

$$n \leq 0, \quad F_{n-1} = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \left(\frac{F_{n_x} - C_n}{F_n} \right)^2 - \alpha_n F_n - 2\beta_n x , \tag{II}$$

где $\alpha_{n-1} C_{n-1} = \alpha_n C_n + 2\beta_0$, $\alpha_n \neq 0$ при $n \neq 0$.

Оба выражения (I0) и (II) справедливы для любых n, как это следует из результатов первого параграфа. Фиксируем произвольно n и вычтем из (I0) выражение (II), тогда получим

$$4 C_n F_{n_x} = F_n^2 \left(\alpha_{n+1} F_{n+1} - \alpha_{n-1} F_{n-1} \right). \tag{I2}$$

Определим теперь функцию $\Psi_n(x)$ следующим образом:

$$\Psi_n(x, \alpha_n, C_n, \beta_0) = \alpha_n F_n(4 C_n \alpha_n x, \alpha_n, C_n, \beta_0).$$

Тогда (I2) можно переписать так:

$$\Psi_{n_x} = \Psi_n^2 \left(\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1} \right).$$

Перейдя к функции $r_n(x) = \Psi_n(x)\Psi_{n-1}(x)$, получим стандартную запись цепочки Вольтерра

$$r_{n_x} = r_n \left(r_{n+1} - r_{n-1} \right).$$

Покажем теперь, что описанную в первом параграфе связь уравнений P_2 и P_{34} можно рассматривать непосредственно как уравнения цепочки Тода. Действительно, определим $u_n(x)$ выражением

$$u_n(x) = \frac{1}{2} \frac{F_{n_x}(x) + C_n}{F_n(x)} ,$$

тогда, конечно, $u_n(x)$ будет решением P_2 при $\mu = -\beta_0$ и $\nu_n = \frac{1}{2}(\beta_0 - \alpha_n C_n)$. Определив теперь $v_n(x) = -2F_n(x)$, сразу получим систему уравнений

$$v_{n_x} = v_n \left(u_n - u_{n-1} \right) \tag{I3}$$
$$u_{n_x} = v_{n+1} - v_n ,$$

которая, как известно, эквивалентна цепочке Тода:

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = e^{y_{n+1} - y_n} - e^{y_n - y_{n-1}} ,$$

где $v_n = \exp(y_n - y_{n-1})$ и $u_n = y_{n_x}$.

Теперь мы можем легко построить частные классы решений цепочки Тода и Вольтерра, используя известные решения P_2 и P_{34}. Хорошо известно, что уравнение P_2 при $\mu = -1$ и $\nu = n \pm \frac{1}{2}$ имеет однопараметрическое семейство решений, выражающихся через функции Эйри. В работе /25/ была получена замкнутая формула для решений этого семейства. Выпишем здесь этот результат, так как эти формулы будут давать также и решение цепочки Тода.

Пусть в уравнении P_2 $\nu = n - \frac{1}{2}$ и $\beta = -1$. Тогда его решения, рационально выражающиеся через функции Эйри и их производные, будут иметь вид

$$u_0(x) = -u_1(x) = \frac{d}{dx} \ln \vartheta(x)$$

$$u_n(x) = \frac{d}{dx} \ln \frac{\det B_{n-1}(-x(2)^{-1/3})}{\det B_n(-x(2)^{-1/3})}, \tag{I4}$$

где $B_n(x)$ – матрица с элементами

$$(B_n(x))_{m,2p-1} = \binom{m-1}{m-p} \vartheta^{(m-p)}(x), \quad m=1,2,\dots,n$$

$$(B_n(x))_{m,2p} = \binom{m-1}{m-p} \vartheta^{(m-p+1)}(x), \quad p=1,2,\dots,[\tfrac{n+1}{2}].$$

$$\vartheta^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \vartheta(x), \quad \vartheta^{(-k)}(x)=0, \quad k>0,$$

здесь $\vartheta(x)$ – некое решение уравнения Эйри

$$\vartheta''(x) - x\vartheta(x) = 0.$$

Соответствующее решение уравнения P_{34} будет иметь вид

$$F_n(x) = \frac{d^2}{dx^2} (\ln \det B_n). \tag{I5}$$

Имея выражения (I4) и (I5), мы сразу получаем решения цепочки Тода (I3), выражающиеся через функции Эйри. Действительно, u_n дается выражением (I4) и $v_n = -2F_n$, где F_n определяется из (I5). Заметим, что соответствующие автомодельные решения КдВ, МКдВ и цилиндрического уравнения КдВ были получены в работах /24,25/.

3. Связь ПБ для P_{34} с теоремой сложения для $\wp$-функций и частные решения нелинейных цепочек

Полученное в первом параграфе ПБ (4) справедливо для любых значений входящих в него параметров. Положим теперь в уравнении P_{34} параметр $\beta=0$, тогда P_{34} точно решается и его решениями будут $\wp$-функции Вейерштрасса следующего вида:

$$F(z) = \wp\left(\sqrt{\tfrac{\alpha}{4}}\, z + c_2,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right), \tag{I6}$$

где c_1, c_2 – константы интегрирования. Инварианты g_2 и g_3 $\wp$-функции равны $g_2 = c_1$ и $g_3 = -\frac{4c^2}{\alpha}$. ПБ (4) в этом случае перейдет в частный случай теоремы сложения для $\wp$-функций, а именно в тот случай, когда к аргументу функции прибавляется ее нуль, т.е. (4) примет вид

$$\wp(z+u_0) = -\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \sqrt{-g_3}}{\wp(z)}\right)^2,$$

где $\wp(u_0)=0$ и $\wp'(u_0) = \sqrt{-g_3}$.

Заметим, что связь ПБ для нелинейного уравнения Шредингера с теоремой сложения для $\wp$-функций указывалась в работе /I5/. Авторы отталкивались от ПБ для нелинейного эволюционного уравнения и использовали другой метод для перехода к теореме сложения. Факт связи ПБ для уравнений типа Пенлеве с теоремой сложения для $\wp$-функций Вейерштрасса является новым.

Построим теперь по решению (I6) соответствующие решения цепочек Тода и Вольтерра. Действие ПБ(4) в этом случае сводится к прибавлению нуля к аргументу $\wp$-функции, поэтому $F_n(z)$ запишется так

$$F_n(z) = \wp\left(\sqrt{\tfrac{\alpha}{4}}\, z + c^2 + nu_0,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right).$$

Соответствующее решение цепочки Вольтерра будет иметь вид

$$r_n(z) = \alpha^2 \wp\left(2c(\alpha)^{3/2} z + c_2 + nu_0, c_1, -\frac{4c^2}{\alpha}\right) \wp\left(2c(\alpha)^{3/2} z + c_2 + (n-1)u_0, c_1, -\frac{4c^2}{\alpha}\right).$$

Аналогично получим решение цепочки Тода (I3):

$$u_n(z) = \pm \frac{\wp_z\left(\sqrt{\tfrac{\alpha}{4}}\, z + c_2 + nu_0,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right) + c}{\wp\left(\sqrt{\tfrac{\alpha}{4}}\, z + c_2 + nu_0,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right)}$$

$$v_n(z) = -2\wp\left(\sqrt{\tfrac{\alpha}{4}}\, z + nu_0,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right).$$

При определенном соотношении констант эти решения выражаются через элементарные трансцендентные функции. Пусть, например, $c_1 = \frac{6c^2}{\alpha}$, тогда $\wp$-функция, а с ней и решения цепочек выражаются через $\operatorname{sh} z$ по следующей формуле:

$$\wp\left(z, \frac{6c^2}{\alpha}, -\frac{4c^2}{\alpha}\right) = \frac{c}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{3c}{\sqrt{2\alpha}}\left(\operatorname{sh}\left(\left(\frac{3c}{\sqrt{2\alpha}}\right)^{1/2} z\right)\right)^{-2},$$

при $c_1 = -\frac{6c^2}{\alpha}$ получим, что

$$\wp\left(z, -\frac{6c^2}{\alpha}, -\frac{4c^2}{\alpha}\right) = -\frac{c}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{3c}{\sqrt{2\alpha}}\left(\sin\left(\left(\frac{3c}{\sqrt{2\alpha}}\right)^{1/2} z\right)\right)^{-2}.$$

Приведенные нами решения, видимо, содержатся в общих конечнозонных решениях соответствующих цепочек, однако в таком виде не выписывались.

4. Модель Лоренца и уравнение P_2

В работе[37] в качестве модели, описывающей слабо турбулентное движение жидкости, была предложена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY, \quad \text{где} \quad \sigma, r, b > 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь точкой обозначается дифференцирование по безразмерному времени t, σ - число Прандтля, r - отношение чисел Рэлея, b - геометрическая характеристика потока. Величина X пропорциональна интенсивности конвективного движения, Y - разности температур восходящих и нисходящих потоков, Z - отклонению вертикального температурного профиля от линейности.

Приближенное решение этой системы рассматривалось в работе[38] для произвольных σ, μ и $b \gg 1$. Качественное исследование этой системы проводилось и в работе[37]. Здесь мы покажем, что при $\sigma = 1$, $b = 2$, $r = \frac{1}{9}$ общее решение системы может быть выражено через решение P_2.

Положим $b = 2\sigma$, выразим из первого и второго уравнения Y и Z через X и подставим эти выражения в третье уравнение системы (17). После элементарных преобразований приведем это уравнение к виду

$$\frac{d}{dt} \ln\left((\ddot{X} + (1+\sigma)\dot{X} - \sigma(\mu - 1)X + \tfrac{1}{2}X^3)/X \right) = -2\sigma.$$

Проинтегрировав один раз по t, приходим к

$$\ddot{X} + (1+\sigma)\dot{X} - \sigma(r-1)X + \tfrac{1}{2}X^3 = c_1 X e^{-2\sigma t}, \qquad c_1 - const.$$

Будем искать теперь решение этого уравнения в виде

$$X(t) = g(t) \cdot W(y(t)),$$

где функция W по y удовлетворяет уравнению P_2 при $\nu = 0$. Тогда сразу получаем, что $\sigma = 1$, $r = 1/9$ и функции $g(t)$ и $y(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} g(t) &= 2i \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, exp\left(-\frac{2t}{3}\right), \\ y(t) &= -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, exp\left(-\frac{2t}{3}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, мы получим выражение функции $X(t)$, а с ней и функций $Y(t)$, $Z(t)$ через общее решение P_2, с нулевым параметром ν:

$$\begin{aligned} X(t) &= 2i \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, exp\left(-\frac{2t}{3}\right) W(y, c_2, c_3), \\ Y(t) &= 2i \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, exp\left(-\frac{2t}{3}\right)\left(\frac{1}{3}W(y,c_2,c_3) + \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, e^{-\frac{2t}{3}} W_y(y,c_2,c_3)\right), \\ Z(t) &= -\left(\frac{2c_1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4t}{3}} \left(2W^2(y,c_2,c_3) + y\right), \end{aligned} \tag{19}$$

где $y = y(t)$ задается выражением (18), c_1, c_2 и c_3 - произвольные постоянные. Формулы (19) дают решение системы Лоренца (17) для значений параметров $b = 2$, $\sigma = 1$, $r = 1/9$. Заметим, что уравнение P_2 при $\nu = 0$ имеет чисто мнимые решения, так что по формулам (19) мы можем построить вещественные решения системы (17).

5. Преобразования, связывающие уравнения КдВ и КП с цилиндрическими уравнениями КдВ и КП

В этом параграфе мы приведем ряд преобразований, обобщающих известные ранее[23,33,34]. Используя эти преобразования и известные автомодельные подстановки, нетрудно получить связь между исходными цилиндрическими уравнениями и уравнениями Пенлеве.

Рассмотрим уравнение

$$h_\beta + h h_\alpha + h_{\alpha\alpha\alpha} - \frac{a h}{\beta} = f(\alpha, \beta) \tag{20}$$

и исследуем, при каких a и $f(\alpha,\beta)$ это уравнение будет обладать Пенлеве свойством по Вайсу[27]. Повторяя рассуждения работы[17], нетрудно убедиться, что это уравнение обладает Пенлеве свойством и имеет пару Лакса*, только если $f(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha a(2a+1)}{\beta^2}$ для любого a.

Построим теперь для уравнения (20) с этой правой частью преобразование, связывающее его с КдВ. Пусть

$$h(\alpha,\beta)=\beta^{2a}u(x,t)-\frac{a\alpha}{\beta}, \tag{21}$$

где $x=\alpha\beta^a$, $t=\dfrac{\beta^{1+3a}}{1+3a}$,

тогда $u(x,t)$ будет решением уравнения КдВ

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0.$$

Используя известную автомодельную подстановку/16/

$$u(x,t)=12(t-W(z)),\qquad z=x-6t^2,$$

мы приходим к уравнению P_1 для $W(z)$

$$W''=6W^2+z+c. \tag{P_1}$$

Суперпозиция этих подстановок позволяет перейти непосредственно от уравнения (20) к уравнению P_1 следующим образом:

$$h(\alpha,\beta)=12\beta^{2a}\left(\frac{\beta^{1+3a}}{1+3a}-W(z)\right)-\frac{a\alpha}{\beta},$$

$$z=\alpha\beta^a-\frac{6\beta^{2+6a}}{(1+3a)^2}. \tag{22}$$

При $a=-\frac{1}{2}$ уравнение (20) представляет собой стандартную запись цилиндрического уравнения КдВ и преобразование (21) переходит в преобразование, предложенное в работе/33/. Уравнение (20) также просто связано с уравнением КП

$$v_{yy}+\partial_x(v_t+vv_x+v_{xxx})=0. \tag{23}$$

Действительно, будем искать преобразование в виде $v(x,y,t)=A(t)h(\alpha,\beta)+B(x,y,t)$, тогда сразу получаем, что

$$A(t)=T^2(t),\qquad \beta_t(x,y,t)=T^3(t),$$

$$\alpha(x,y,t)=T(t)x-\frac{1}{2}\left(T_t(t)+\frac{a}{\beta}T^4\right)y^2+r_1(t)y+r_0(t)$$

* В формулах (25) работы/17/ нужно положить $f(t)=t^{2a}$.

$$B(x,y,t)=-\frac{T_t(t)}{T(t)}x+\frac{1}{2}\left(\frac{T_{tt}(t)}{T}-2\left(\frac{T_t(t)}{T(t)}\right)^2-\frac{a(2a+1)}{\beta^2}T^6\right)y^2+b_1(t)y+b_0(t)$$

$$b_0(t)=-\frac{r_{0t}(t)}{T(t)}-\frac{r_1^2(t)}{T^2(t)},\qquad b_1(t)=\frac{2r_1(t)T_t(t)}{T^2(t)}+\frac{2ar_1(t)T^2(t)}{\beta}-\frac{r_{1t}(t)}{T(t)},$$

где $T(t)$, $r_1(t)$ и $r_0(t)$ – произвольные функции t. При $T(t)=1$, $r_0(t)=r_1(t)=0$, $a=-\frac{1}{2}$. Это преобразование переходит в предложенное в работе/23/.

Аналогично мы можем построить преобразование, связывающее цилиндрическое уравнение КП вида

$$\frac{1}{4t^2}\tilde h_{\theta\theta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\tilde h_{\xi\xi\xi}+t^{(a-\frac{1}{2})}\tilde h\tilde h_\xi+\tilde h_\tau+\frac{a\tilde h}{\tau}\right)=0$$

с уравнением КП (23). Сделаем сначала простую подстановку

$$\tilde h(\xi,\theta,\tau)=t^{-(a-1/2)}q(\xi,\theta,\tau)$$

и перейдем к традиционной форме записи цилиндрического КП

$$\frac{1}{4t^2}q_{\theta\theta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(q_{\xi\xi\xi}+qq_\xi+q_\tau+\frac{q}{2\tau}\right)=0.$$

Так же, как и прежде, будем искать $q(\xi,\theta,\tau)$ в виде $q(\xi,\theta,\tau)=A(\tau)v(x,y,t)+B(\xi,\theta,\tau)$, тогда получим, что

$$A(\tau)=T^2(\tau),\qquad t_\tau(\tau)=T^3(\tau),$$

$$x(\xi,\theta,\tau)=T(\tau)\xi-\tau(T(\tau)+2\tau T_\tau(\tau))\theta^2+r_1(\tau)\theta+r_0(\tau),$$

$$y(\theta,\tau)=2\delta\tau T^2(\tau)\theta+\delta\int^\tau\frac{r_1(\tau)T(\tau)}{\tau}d\tau,\qquad \delta^2=1,$$

$$B(\xi,\theta,\tau)=b_1(\tau)\xi+b_2(\tau)\theta^2+b_3(\tau)\theta+b_4(\tau), \tag{24}$$

$$b_1(\tau)=-\frac{T_\tau(\tau)}{T(\tau)},$$

$$b_2(\tau)=-2\tau^2\left(b_1^2(\tau)+b_{1\tau}(\tau)+\frac{1}{2\tau}b_1(\tau)\right),$$

$$b_3(\tau)=-\frac{r_{1\tau}(\tau)}{T(\tau)}+\frac{r_1(\tau)}{\tau T^2(\tau)}\left(T(\tau)+2\tau T_\tau(\tau)\right),$$

$$b_4(\tau)=-\frac{r_{0\tau}(\tau)}{T(\tau)}-\frac{r_1^2(\tau)}{4\tau^2T^2(\tau)},$$

$T(\tau)$, $r_1(\tau)$, $r_0(\tau)$ – произвольные функции. Мы можем считать проведенное преобразование естественным обобщением преобразования, полученного в работе /34/, так как выражения (24) переходят в приведенные там формулы при $T=1$, $r_0=r_1=0$. Можно выбрать функции T, r_0 и r_1 и каким-либо иным образом и получить при этом ряд простых преобразований. Пусть, например, $T=\frac{1}{\tau}$, $r_1=r_0=0$, тогда

$$q(\xi,\theta,\tau)=\frac{1}{\tau^2}\,v\left(\frac{\xi}{\tau}+\theta,\ \frac{2\delta\theta}{\tau},\ -\frac{1}{2\tau^2}\right)+\frac{\xi}{\tau}-\theta^2,$$

либо, при $T=\frac{1}{\sqrt{\tau}}$, $r_1, r_0=0$ получим, что

$$q(\xi,\theta,\tau)=\frac{1}{\tau}\,v\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}},\ 2\delta\theta,\ -\frac{2}{\sqrt{\tau}}\right)+\frac{\xi}{2\tau}.$$

Литература

1. Ablowitz M.J.,Ramani A.,Segur H. Lett.Nuovo Cimento,1978, v.23,p.333 .
2. Ablowitz M.J.,Segur H. Phys.Rev.Lett.,1977,38,N°20,p.1103.
3. Ablowitz M.J.,Ramani A.,Segur H. J.Math.Phys.,1980,21,N°4,p.715.
4. Kaliappan P.,Lakshmanan M. J.Phys.A,1979,12,N°10,P.L249 .
5. Johnson S.F.,Lonngren K.E.,Nicholson D.R. Phys,Lett.,1979, 74A,N°6,p.393 .
6. Tajiri M. J.Phys.Soc.Japan,1983,52,N°6,p.1908 .
7. Tajiri M.,Kawamoto Sh. J.Phys.Soc.Japan,1982,51,N°5,p.1678 .
8. Kawamoto Sh. J.Phys.Soc.Japan,1983,v.52,N°8,p.2613 .
9. Tajiri M.,Kawamoto Sh. J.Phys.Soc.Japan,1983,52,N°7,p.2315 .
10. Lakshmanan M.,Kaliappan P. J.Math.Phys.,1983,24,N°4,p.795 .
11. Kawamoto Sh. J.Phys.Soc.Japan,1984,53,N°9,p.2922 .
12. Tajiri M. J.Phys.Soc.Japan,1984,53,N°1,p.1 .
13. Nishitani T.,Tajiri M. J.Phys.Soc.Japan,1984,53,N°1,p.79 .
14. Tajiri M.,Hagiwara M. J.Phys.Soc.Japan,1984,53,N°5,p.1634 .
15. Boiti M.,Pempinelli F. Il Nuovo Cimento,1980,59B,N°1,p.40 .
16. Fokas A,S.,Ablowitz M.J. J.Math.Phys.,1982,23,N°11,p.2033 .
17. Steeb W.-H.,Kloke M.,Spieker B.M.,Oevel W. J.Phys.A,1983, 16,P.L 447 .

18. Its A.R.,Novokshenov V.Ju. Lect.Notes in Math.,1986,1191 .
19. Kametaka Y. Proc.Japan Acad.,Ser.A,1983,59A,p.358 .
20. Kametaka Y. Proc.Japan Acad.,Ser.A,1983,59A,p.407 .
21. Jimbo M.,Miwa T. Physica D,1981,2,p.407 .
22. Gibbon J.D.,Tabor M. J.Math.Phys.,1985,26,N°8,p.1956 .
23. Johnson R.S. Phys.Lett.,1979,72A,p.197 .
24. Bordag L.A.,Matveev V.B. LPTHE 79/6,Paris,1979;Preprint KMU, Leipzig,1978 .
25. Bordag L.A. Preprint KMU-QFT 04/80,Leipzig KMU,1980 .
26. Lorenz E.N. Journ.of the Atmospheric Sciencies 1963,20.p.130 .
27. Weiss J.,Taber M.,Carnevale G. J.Math.Phys.,1983,24,N°3,p.522 .
28. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Матем.сборник, 1985, 126(168),№4, с.435.
29. Бордаг Л.А., Капаев А.А., Китаев А.В. ОИЯИ, Р5-86-679,Дубна,1986.
30. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.
31. Яблонский А.И. Весці АН БССР,сер. фiз.-тэхн. навук,1959.№3,с.30.
32. Воробьев А.П. Дифференц. уравнения, 1965, 1,№1, с.79.
33. Луговцов А.А., Луговцов Б.А. В кн.: Динамика непрерывной среды. т.1, Новосибирск: Наука, 1964, с.195.
34. Липовский В.Д., Матвеев В.Б., Смирнов А.О. В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. Зап.научн.семин.ЛОМИ АН СССР, 1986, т.150, с.120.
35. Лукашевич Н.А. Дифференц.уравнения,1971,7, №6, 1124.
36. Громак В.И. Дифференц. уравнения, 1982, 18, №5, с.753.
37. Марсден Дж.,Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир, 1980.
38. Sano O. Phys. Soc. Japan,1983,52,n.2,p.466.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля 1987 года.