сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-87-221

В.В.Курышкин*, Э.Э.Энтральго

ОПЕРАТОР ВЕРОЯТНОСТИ КООРДИНАТ И ИМПУЛЬСОВ ТОЧЕЧНЫХ ЧАСТИЦ В СТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

* Университет Дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва

1987

Введение

Переход от классической теории к квантовой с помощью оператора вероятности координат и импульсов [I-4] предполагает построение операторов $\hat{A}$ физических величин по правилу соответствия:

$$\hat{A}(t) = O_{\hat{F}}(A(q,p,t)) \overset{def}{=} \int A(q,p,t)\,\hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp , \qquad (I)$$

Здесь $A(q,p,t)$ - функция классических координат $q = (q_1, \dots, q_N)$, импульсов $p = (p_1, \dots, p_N)$ и времени t, изображающая физическую величину A в классической теории, интегрирование в (I) проводится по всей области R_{qp} значений классических переменных.

Оператор $\hat{F}$, определяющий согласно правилу (I) все остальные операторы квантовой теории, параметрически зависит от классических q, p и t, определен в пространстве $\mathcal{L}$ квантовых состояний ψ со скалярным произведением $(\cdot/\cdot)$ и обладает свойствами неотрицательности, т.е.

$$F_{\psi}(q,p,t) \overset{def}{=} (\psi/\hat{F}(q,p,t)\psi)\cdot(\psi/\psi)^{-1} \geq 0 \qquad (2)$$

для любых $q,p \in R_{qp}$ и любых $\psi \in \mathcal{L}$, и нормированности

$$\int \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp = \hat{1} , \qquad (3)$$

где $\hat{1}$ - единичный в $\mathcal{L}$ оператор.

Непосредственно из соотношений (I)-(3) следует, что в квантовой теории, операторы которой построены по правилу (I), для средних значений физических величин всегда справедливо:

$$\langle A \rangle_{\psi} \overset{def}{=} (\psi/\hat{A}(t)\psi)\cdot(\psi/\psi)^{-1} = \int A(q,p,t)\,F_{\psi}(q,p,t)\,dq\,dp ,$$

$$F_{\psi}(q,p,t) \geq 0 , \qquad \int F_{\psi}(q,p,t)\,dq\,dp = 1 ,$$

что позволяет трактовать функцию F_{ψ} как плотность вероятности координат и импульсов физической системы в квантовом состоянии ψ. При этом из (2) следует - F_{ψ} при заданном ψ однозначно определена оператором $\hat{F}$, что и привело к появлению термина "оператор вероятности" [I,2].

В работах [3,4] предложен общий метод построения оператора вероятности в тех случаях, когда исходная классическая теория допускает гамильтонову формулировку.

В присутствии электромагнитных полей исходная классическая теория может быть сформулирована либо в терминах координат q и канонических импульсов P, либо в терминах координат q и кинетических импульсов p. Специфика построения оператора вероятности при этом обуславливается тем, что формулировка классической теории в терминах (q,p) не является гамильтоновой, а формулировка в терминах (q,P) содержит классические функции (например, сам канонический импульс P), не принадлежащие ко множеству экспериментально измеряемых физических величин. Кроме того, квантование с помощью оператора вероятности должно гарантировать инвариантность получающейся квантовой теории относительно градиентных преобразований электромагнитного потенциала.

Поэтому при наличии электромагнитных полей разработанный в [3,4] метод построения оператора вероятности требует определенного уточнения, которое мы и проведем в настоящей работе, ограничиваясь для простоты рассмотрением систем точечных частиц во внешнем стационарном электромагнитном поле.

I. Общая схема построения оператора вероятности

При квантовании с оператором вероятности все квантовые операторы $\hat{A}(t)$ устанавливаются по известным классическим функциям $A(q,p,t)$ правилом соответствия (I). При этом необходимо (и достаточно) знать явный вид оператора вероятности $\hat{F}(q,p,t)$, или определенный метод его построения. Один из таких методов, согласованный с гамильтоновой формулировкой исходной классической теории, предложен в работах [3,4] и основывается на следующих положениях.

Пусть известна функция $H(q,p,t)$ и множество функций $\{A(q,p,t)\}_{exp}$, изображающих в исходной классической теории гамильтониан H и множество $\{A\}_{exp}$ физических величин, значения которых считаются доступными экспериментальному измерению.

Тогда, полагая, что состояния ψ в строящейся квантовой теории принадлежат некоторому комплексному векторному пространству $\mathcal{L}$ со скалярным произведением $(\cdot/\cdot)$ и $\mathcal{A}$ есть максимальная алгебра линейных в $\mathcal{L}$ операторов, предъявим (обоснование см. в [3,4]) следующие требования к оператору вероятности:

I. Оператор вероятности параметрически зависит от классических

координат, импульсов и времени и принадлежит подалгебре $\mathcal{A}_{\hat{q},\hat{p}}$, образующими которой являются операторы координат $\hat{q}=(\hat{q}_1,\dots,\hat{q}_N)$ и импульсов $\hat{p}=(\hat{p}_1,\dots,\hat{p}_N)$, устанавливаемые в соответствие классическим образующим $q=(q_1,\dots,q_N)$ и $p=(p_1,\dots,p_N)$ правилом (I), т.е.:

$$\hat{F}(q,p,t) \in \mathcal{A}_{\hat{q},\hat{p}} \subseteq \mathcal{A} \quad \text{при любых } t \text{ и } q,p \in R_{qp}, \tag{4а}$$

$$\hat{q}_k = O_{\hat{F}}(q_k) \in \mathcal{A}, \qquad \hat{p}_k = O_{\hat{F}}(p_k) \in \mathcal{A}, \qquad k \in \overline{1,N}. \tag{4б}$$

2. Оператор вероятности неотрицателен в $\mathcal{L}$ (в смысле (2)).

3. Оператор вероятности нормирован в R_{qp} (в смысле (3)).

4. Оператор вероятности удовлетворяет системе уравнений динамического соответствия между классической и квантовой теориями, т.е

$$O_{\hat{F}}\left(\partial_t A(q,p,t) + \{H(q,p,t), A(q,p,t)\}\right) = \partial_t \hat{A}(t) + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t), \hat{A}(t)], \tag{5}$$

где $A \in \{A\}_{exp} \cup H$. Здесь $\{\cdot,\cdot\}$ – классическая скобка Пуассона, $[\cdot,\cdot]$ – коммутатор, $\hbar$ – постоянная Планка.

5. Оператор вероятности удовлетворяет системе уравнений канонического соответствия между классической и квантовой теориями, т.е.

$$O_{\hat{F}}\left(\{A_1(q,p,t), A_2(q,p,t)\}\right) = \frac{i}{\hbar}[\hat{A}_1(t), \hat{A}_2(t)], \tag{6}$$

где $A_1, A_2 \in \{A\}_c \subseteq \{A\}_{exp} \cup H$. Подмножество $\{A\}_c$ определяется свойствами алгебры $\mathcal{A}$ и условиями совместности уравнений (6) с требованиями (2)-(5) (подробнее см. [3,4]).

Определение (I) и совокупность требований (2)-(6) позволяют рассматривать задачу построения оператора вероятности как поиск решения $\hat{F}(q,p,t) \in \mathcal{A}$ системы уравнений (5)-(6), удовлетворяющего условиям неотрицательности (2), нормировки (3), согласования (4) и сохраняющего смысл интегралов (I) для всех $A \in \{A\}_{exp} \cup H$.

2. Формулировка исходной классической теории

Рассмотрим систему n точечных частиц с массами m_j и зарядами e_j, с попарным потенциальным взаимодействием $W_{jl}(\vec{q}_j,\vec{q}_l)$ (здесь $\vec{q}_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3})$ – координата частицы j), находящуюся во внешнем стационарном электромагнитном поле. Пусть $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ и φ, $\vec{A}$ есть напряженности и потенциалы электрического и магнитного полей соответственно, так что

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{z}) = -\nabla_{\vec{z}}\,\varphi(\vec{z}), \qquad \vec{\mathcal{H}}(\vec{z}) = [\nabla_{\vec{z}} \times \vec{A}(\vec{z})]. \tag{7}$$

Ко множеству физических величин $\{A\}_{exp}$ отнесем, во-первых, индивидуальные физические характеристики частиц – координата $\vec{q}_j$, кинетический импульс $\vec{p}_j = m_j \dot{\vec{q}}_j$, момент $\vec{L}_j$, кинетическую T_j, потенциальные U_j, W_j и полную E_j энергии, во-вторых, физические характеристики системы в целом – координата центра масс $\vec{q}$, полный импульс $\vec{p}$, момент $\vec{L}$, кинетическая T, потенциальная V и полная E энергии. Таким образом,

$$\{A\}_{exp} = (q_{j\alpha}, p_{j\alpha}, L_{j\alpha}, T_j, U_j, W_j, E_j, q_\alpha, p_\alpha, L_\alpha, T, V, E), \qquad (8)$$

где $j\in\overline{1,n}$, $\alpha\in\overline{1,3}$. В принципе, множество (8) может быть расширено введением физических характеристик типа относительной скорости двух частиц, суммарного момента, или энергии двух и более частиц и т.п. Однако такие величины являются линейными комбинациями элементов множества (8) и не влияют на результаты квантования.

При классическом описании состояние рассматриваемой системы в момент t может быть задано совокупностью значений координат q частиц и их кинетических импульсов p:

$$q=(\vec q_1,\dots,\vec q_n),\quad p=(\vec p_1,\dots,\vec p_n),\quad \vec p_j = m_j\dot{\vec q}_j . \qquad (9а)$$

Тогда физические величины множества $\{A\}_{exp}$ запишутся в виде соответствующих функций $A(q,p)$, а именно

$$\vec L_j = [\vec q_j\times\vec p_j],\quad T_j = \frac{1}{2m_j}\vec p_j^{\,2},\quad U_j = e_j\varphi(\vec q_j),\quad W_j = W_j(q) = \sum_{j'\ne j} W_{jj'},$$

$$E_j = T_j+U_j+W_j,\quad \vec q = \sum m_j\vec q_j/\sum m_j,\quad \vec p=\sum\vec p_j,$$

$$\vec L=\sum\vec L_j,\quad T=\sum T_j,\quad V=\sum\left(U_j+\tfrac12 W_j\right),\quad E=T+V, \qquad (9б)$$

а динамика системы определится совокупностью известных уравнений движения в электромагнитном поле

$$m_j\ddot q_{j\alpha} = e_j\left(\mathcal{E}_\alpha(\vec q_j)+\frac1c\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot q_{j\beta}\mathcal{H}_\gamma(\vec q_j)\right) - \partial_{q_{j\alpha}} W_j(q) . \qquad (9в)$$

Здесь и далее $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – единичный полностью антисимметричный тензор, и по повторяющимся индексам $\alpha,\beta,\dots$ компонент трехмерных векторов проводится суммирование.

Рассмотренная выше формулировка классической теории в терминах (q,p) однозначна и явно градиентно-инвариантна. Однако она не является гамильтоновой и по этой причине не позволяет установить скобки Пуассона, входящие в уравнения (5) и (6) для оператора вероятности.

В гамильтоновой формулировке соответствующего классического опи-

сания независимыми переменными являются совокупности координат q и канонических импульсов P:

$$q=(\vec q_1,\dots,\vec q_n),\quad P=(\vec P_1,\dots,\vec P_n),\quad \vec P_j = m_j\dot{\vec q}_j+\frac{e_j}{c}\vec A(\vec q_j) . \qquad (10а)$$

В этих переменных гамильтониан системы можно записать как

$$H=\sum_j\left(\frac{1}{2m_j}\left(\vec P_j-\frac{e_j}{c}\vec A(\vec q_j)\right)^2+e_j\varphi(\vec q_j)+\frac12 W_j(q)\right), \qquad (10б)$$

поскольку соответствующие (10б) уравнения Гамильтона приводят к уравнениям движения (9в). Однозначная (при фиксированном потенциале $\vec A(\vec r)$) связь (9а), (10а) между p и P позволяет выразить величины (9б) в виде некоторых функций $A'(q,P)$ и записать скобки Пуассона:

$$\{A_1',A_2'\} = \sum_j\left(\frac{\partial A_1'}{\partial P_{j\alpha}}\cdot\frac{\partial A_2'}{\partial q_{j\alpha}} - \frac{\partial A_1'}{\partial q_{j\alpha}}\cdot\frac{\partial A_2'}{\partial P_{j\alpha}}\right) . \qquad (10в)$$

Повторное использование взаимосвязи между p и P позволяет переписать скобки Пуассона (10в) в терминах (q,p):

$$\{A_1,A_2\}=\sum_j\left(\frac{\partial A_1}{\partial p_{j\alpha}}\frac{\partial A_2}{\partial q_{j\alpha}}-\frac{\partial A_1}{\partial q_{j\alpha}}\frac{\partial A_2}{\partial p_{j\alpha}}-\frac{e_j}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal H_\alpha(\vec q_j)\frac{\partial A_1}{\partial p_{j\beta}}\frac{\partial A_2}{\partial p_{j\gamma}}\right) . \qquad (11)$$

Существенно, что в выражениях (11) для любых величин из $\{A\}_{exp}$ содержатся лишь силовые характеристики поля ($\vec{\mathcal E}$ и $\vec{\mathcal H}$), т.е. сами скобки Пуассона в терминах (q,p) градиентно-инвариантны. Отметим еще, что в терминах (q,p) гамильтониан (10б) совпадает с полной энергией системы,

$$H(q,p) = E(q,p) = \sum_j\left(\frac{1}{2m_j}\vec p_j^{\,2}+e_j\varphi(\vec q_j)+\frac12 W_j(q)\right), \qquad (12)$$

т.е. для рассматриваемых систем $\{A\}_{exp}\cup H = \{A\}_{exp}$.

3. Квантовая алгебра и структура оператора вероятности

В соответствии с двумя различными формулировками исходной классической теории квантование с оператором вероятности можно проводить в терминах (q,P), тогда $\hat F=\hat F(q,P)\in\mathcal A_{\hat q,\hat P}\subseteq\mathcal A$, либо в терминах (q,p), $\hat F=\hat F(q,p)\in\mathcal A_{\hat q,\hat p}\subseteq\mathcal A$. Естественно, что оба подхода эквивалентны в силу однозначной взаимосвязи между p и P при фиксированном потенциале магнитного поля.

Первый подход явно зависит от $\vec A(\vec r)$, что приводит к специфическим затруднениям – неопределенность интегралов (1), поскольку $A'(q,P)$ содержат неоднозначно определенный потенциал $\vec A(\vec r)$, отсутствие гарантии градиентной инвариантности в конечных результатах и т.п.

Поэтому мы предпочтем второй подход, записав правило (I) в виде

$$\hat{A} = O_{\hat{F}}(A(q,p)) \overset{def}{=} \int A(q,p)\,\hat{F}(q,p)\,dq\,dp\ , \qquad (13)$$

где p - кинетический импульс. Одновременно мы считаем, что оператор вероятности не зависит от времени (квантование стационарно), так как ни одна из функций множества $\{A\}_{exp}$ явно от t не зависит.

Считая, что алгебра $\mathcal{A}_{\hat{q},\hat{p}}$ некоммутативна (см. результат работ [3,4] о коммутативных алгебрах), отнесем к подмножеству $\{A\}_c$ компоненты координат и кинетических импульсов. Тогда из уравнений (6) при $A_1 = q_{j\alpha}$ (или $p_{j\alpha}$) и $A_2 = p_{\ell\beta}$ (или $q_{\ell\beta}$) с учетом нормировки (3), согласования (4) и определения (13) имеем:

$$\hat{q}^+_{j\alpha} = \hat{q}_{j\alpha}\,,\quad \hat{p}^+_{j\alpha} = \hat{p}_{j\alpha}\,,\quad [\hat{q}_{j\alpha}, \hat{q}_{\ell\beta}] = 0,\quad [\hat{q}_{j\alpha}, \hat{p}_{\ell\beta}] = i\hbar\delta_{j\ell}\delta_{\alpha\beta}\,, \qquad (14а)$$

$$[\hat{p}_{j\alpha}, \hat{p}_{\ell\beta}] = i\,\frac{\hbar e_j}{c}\,\delta_{j\ell}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int \mathcal{H}_\gamma(\vec{q}_j)\,\hat{F}(q,p)\,dq\,dp\,. \qquad (14б)$$

Соотношения (14б) показывают, что подалгебра $\mathcal{A}_{\hat{p}}$ компонент импульса здесь в общем случае некоммутативна. В то же время из (14а) следует возможность упорядочения любого оператора алгебры $\mathcal{A}_{\hat{q},\hat{p}}$, например записи его в форме, где все $\hat{q}_{j\alpha}$ стоят слева от всех $\hat{p}_{\ell\beta}$.

В дальнейшем, основываясь на результатах работ [3,4], будем искать интересующий нас оператор вероятности во множестве операторов, имеющих структуру

$$\hat{F}(q,p) = \sum_{m,k} \hat{f}^+_{mk}(q,p)\cdot\hat{f}_{mk}(q,p)\,,\qquad \hat{f}_{mk}\in\mathcal{A}_{\hat{q},\hat{p}}\,, \qquad (15а)$$

где оператор $\hat{f}_{mk}$ зависит от двух вспомогательных функций (X_m и φ_k) и имеет упорядоченную форму, а именно

$$\hat{f}_{mk} = (2\pi\hbar)^{-3N/2}\int X_m(q,p,\xi')\cdot\varphi_k(q+\xi'-\xi)\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\xi'\eta+\xi'p-\xi p)}\,e^{\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}}\,d\xi'd\xi\,d\eta\,. \qquad (15б)$$

Здесь и далее $N=3n$; $\xi, \xi', \ldots$ и $\eta, \ldots$ принадлежат вспомогательным пространствам R_ξ, $R_{\xi'}, \ldots$ и $R_\eta, \ldots$, изоморфным пространству конфигураций R_q и пространству кинетических импульсов R_p соответственно, а $\xi\eta$, $\eta\hat{q}, \ldots$ означают произведения типа

$$\xi\hat{p} = \sum_j \xi_{j\alpha}\hat{p}_{j\alpha} \qquad \text{(с суммированием по } \alpha\text{).}$$

Неотрицательность операторов множества (15) очевидна, так что требование (2) уже выполнено. Требования (3)-(6) предполагается удовлетворить подходящим выбором вспомогательных функций $\{X_m\}$ и $\{\varphi_k\}$.

Подставляя операторы (15б) и сопряженные к ним в сумму (15а) и используя соотношения (14а) и тождества Вейля

$$e^{A+B} = e^{\frac{1}{2}[B,A]}\,e^{A}\,e^{B}\,,\qquad e^{A}e^{B} = e^{[A,B]}\,e^{B}\,e^{A}\,, \qquad (16)$$

справедливые при $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, после интегрирования с помощью появляющихся δ-функций имеем:

$$\hat{F}(q,p) = (2\pi\hbar)^{-2N}\sum_k\int \gamma(q,p,\xi''+\xi'-q)\cdot\varphi^*_k(\xi'')\cdot\varphi_k(\xi''+\xi)\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\xi''+\xi)\eta}\cdot$$
$$\cdot\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\eta q+\xi p)}\,e^{\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}}\,e^{\frac{i}{\hbar}(\xi-\xi')\hat{p}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\xi'\hat{p}}\,d\xi''d\xi'd\xi\,d\eta\,.$$

Здесь обозначено $\gamma = \sum|X_m|^2$ (фактическая замена набора функций $\{X_m\}$ одной функцией γ связана с неоднозначностью записи неотрицательного оператора в форме (15а) (подробнее см. [3,4])).

Требуя теперь соответствия между подалгебрами классических и квантовых образующих, в том смысле, что

$$O_{\hat{F}}(A(q))\in\mathcal{A}_{\hat{q}}\,,\qquad O_{\hat{F}}(A(p))\in\mathcal{A}_{\hat{p}}\,, \qquad (17)$$

приходим к выводу - при интегрировании по q (по p) в интеграле от $\hat{F}$ должно возникать ядро $\delta(\eta)$ (ядро $\delta(\xi)$), т.е. функция γ может зависеть лишь от суммы двух своих аргументов: $\gamma(q,p,\xi) = \gamma_0(q+\xi)$.

Интегрируя оператор $\hat{F}$ по q и p и требуя выполнения нормировки (3), определим интегральные свойства вспомогательных функций. Наконец, подставляя $\hat{F}$ в (14б), приходим к окончательной записи тождественных соотношений для образующих алгебры $\mathcal{A}_{\hat{q},\hat{p}}$.

Суммируя все вышеизложенное, запишем:

$$\hat{F}(q,p) = (2\pi\hbar)^{-2N}\int\gamma_0(\xi''-\xi')\sum_k\varphi^*_k(\xi'')\,\varphi_k(\xi''+\xi)\,e^{\frac{i}{\hbar}(\xi''+\xi)\eta}\cdot$$
$$\cdot\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\eta q+\xi p)}\,e^{\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}}\,e^{\frac{i}{\hbar}(\xi+\xi')\hat{p}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\xi'\hat{p}}\,d\xi''d\xi'd\xi\,d\eta\,, \qquad (18а)$$

где $N=3n$, квантовые образующие подчиняются соотношениям

$$[\hat{q}_{j\alpha}, \hat{q}_{\ell\beta}] = 0,\qquad [\hat{q}_{j\alpha}, \hat{p}_{\ell\beta}] = i\hbar\delta_{j\ell}\delta_{\alpha\beta}\,, \qquad (18б)$$

$$[\hat{p}_{j\alpha}, \hat{p}_{\ell\beta}] = i\,\frac{\hbar e_j}{c}\,\delta_{j\ell}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\overline{\mathcal{H}}_{j\gamma}(\hat{\vec{q}}_j)\in\mathcal{A}_{\hat{q}}\,, \qquad (18в)$$

функции $\bar{\mathcal{H}}_{j\alpha}$ в (I8в) определяются напряженностью магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}(\vec z)$ и вспомогательными функциями $\{\varphi_\kappa\}$,

$$\bar{\mathcal{H}}_{j\alpha}(\vec z) = \int \mathcal{H}_\alpha(\vec z+\vec\xi_j)\cdot \alpha_0(\xi)\,d\xi\,, \qquad \alpha_0(\xi) \stackrel{def}{=} \sum_\kappa |\varphi_\kappa(\xi)|^2, \tag{I8г}$$

а вспомогательные функции γ_0 и $\{\varphi_\kappa\}$ обладают свойствами:

$$\gamma_0(\xi) \geq 0, \qquad \int \alpha_0(\xi)\,d\xi = \int \gamma_0(\xi)\,d\xi = 1. \tag{I8д}$$

Отметим, что оператор $\hat{F}(q,p)$, задаваемый соотношениями (I8), удовлетворяет условиям неотрицательности (2) и нормированности (3) независимо от дальнейшей конкретизации входящих в него вспомогательных функций γ_0 и $\{\varphi_\kappa\}$.

Заметим еще, что при $\vec{\mathcal{H}} = 0$ правая часть соотношения (I8в) обращается в нуль и подалгебра $\mathcal{A}_{\hat p}$ становится коммутативной, а оператор (I8) оказывается функционалом только функций $\{\varphi_\kappa\}$ и совпадает с оператором вероятности, полученным в работах [3,4] для точечных частиц в потенциальных полях.

4. Вычисление операторов физических величин

Запишем операторы (I3), где $\hat F(q,p)$ определен соотношениями (I8), в удобной для дальнейших исследований форме.

Прежде всего введем в рассмотрение функцию Φ, однозначно определяемую вспомогательными функциями γ_0 и $\{\varphi_\kappa\}$:

$$\Phi(\xi',\xi,\eta) \stackrel{def}{=} (2\pi\hbar)^{-N} \sum_\kappa \varphi_\kappa(\xi) \int \gamma_0(\xi''-\xi')\,\varphi_\kappa^*(\xi'')\,e^{\frac{i}{\hbar}(\xi''-\xi)\eta}\,d\xi''. \tag{I9}$$

Непосредственно из определения (I9) функции Φ следует ряд ее интегральных свойств, из которых наиболее важными являются:

$$\int \Phi(\xi',\xi''+\xi,\eta)\,e^{\frac{i}{\hbar}\xi\eta}\,d\eta = \gamma_0(\xi''-\xi')\sum_\kappa \varphi_\kappa^*(\xi'')\cdot\varphi_\kappa(\xi''+\xi), \tag{20а}$$

$$\int \Phi(\xi',\xi,\eta)\,d\xi' = \varphi(\xi,\eta) \stackrel{def}{=} (2\pi\hbar)^{-N/2} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi\eta} \sum_\kappa \varphi_\kappa(\xi)\,\tilde\varphi_\kappa^*(\eta), \tag{20б}$$

$$\int \Phi(\xi',\xi,\eta)\,d\xi' d\xi = \beta_0(\eta) \stackrel{def}{=} \sum_\kappa |\tilde\varphi_\kappa(\eta)|^2, \qquad \int \Phi(\xi',\xi,\eta)\,d\xi' d\eta = \alpha_0(\xi), \tag{20в}$$

$$\int \Phi(\xi',\xi,\eta)\,d\eta = \gamma_0(\xi-\xi')\cdot\alpha_0(\xi), \qquad \int \Phi(\xi',\xi,\eta)\,d\xi' d\xi\, d\eta = 1, \tag{20г}$$

где $\tilde\varphi_\kappa(\eta)$ – фурье-образы функций $\varphi_\kappa(\xi)$.

Подставляя соотношение (20а) в интеграл (I8а) и затем оператор (I8) в правило (I3), после замены переменных получим:

$$O_{\hat F}(A(q,p)) = (2\pi\hbar)^{-2N}\int \Phi(\xi',\xi,\eta)\,e^{\frac{i}{\hbar}\eta'\hat q}\,e^{\frac{i}{\hbar}(\xi''+\xi')\hat p}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\xi'\hat p}\cdot$$

$$\cdot\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\eta' q+\xi'' p)}\,A(q+\xi,p+\eta)\,d\xi'' d\xi' d\xi\, d\eta' d\eta\, dq\, dp.$$

Используя теперь дифференциальное тождество

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(\eta q+\xi p)}\cdot A(q,p) = A(i\hbar\partial_\eta, i\hbar\partial_\xi)\,e^{-\frac{i}{\hbar}(\eta q+\xi p)}$$

и возникающие в интеграле δ-функции, после интегрирования по частям приходим к наиболее удобной формуле для операторов, получаемых по правилу (I3) с оператором вероятности (I8):

$$O_{\hat F}(A(q,p)) = \int \Phi(\xi',\xi,\eta)\left\{A(\hat q+\xi, -i\hbar\partial_{\xi''}+\eta)\,e^{\frac{i}{\hbar}(\xi''+\xi')\hat p}\right\}_{\xi''=0}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\xi'\hat p}\,d\xi' d\xi\, d\eta. \tag{2I}$$

Для дальнейших вычислений надо уметь раскрывать выражения типа

$$\left\{X(-i\hbar\partial_\xi)\,e^{\hat C+\hat{\mathcal D}}\right\}_{\xi=0}, \quad \text{где} \quad \hat C = \frac{i}{\hbar}\xi\hat p, \quad \hat{\mathcal D} = \frac{i}{\hbar}\xi'\hat p, \tag{22а}$$

что представляет собой весьма сложную задачу. Однако множество $\{A\}_{exp}$ рассматриваемых нами систем и соответствующие ему скобки Пуассона (II) содержат лишь линейные и билинейные по компонентам импульса функции. Поэтому для вычисления всех необходимых операторов из (I), (5) и (6) достаточно раскрыть (22а) при $X(p) = p_{j\alpha}$ и $X(p) = p_{j\alpha}p_{\ell\beta}$.

Переходя к вычислению оператора (22а) при $X(p)=p_{j\alpha}$, отметим, что

$$-i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}}\hat C = \hat p_{j\alpha}, \qquad -i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}}\hat{\mathcal D} = 0, \qquad \{\hat C+\hat{\mathcal D}\}_{\xi=0} = \hat{\mathcal D}, \tag{22б}$$

$$-i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}}(\hat C+\hat{\mathcal D})^n = \sum_{\ell=0}^{n-1}(\hat C+\hat{\mathcal D})^\ell\,\hat p_{j\alpha}\,(\hat C+\hat{\mathcal D})^{n-\ell-1}. \tag{22в}$$

Поэтому, разлагая экспоненту в ряд и используя (22б,в), имеем:

$$\left\{-i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}}\,e^{\hat C+\hat{\mathcal D}}\right\}_{\xi=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n-1}\hat{\mathcal D}^\ell\,\hat p_{j\alpha}\,\hat{\mathcal D}^{n-\ell-1}. \tag{23}$$

Для упорядочения операторов типа (23) рассмотрим коммутатор оператора $\hat p_{j\alpha}$ с произвольным оператором $f(\hat q)$ коммутативной подалгебры $\mathcal{A}_{\hat q}$. Представляя эти операторы в интегральной форме

$$\hat{p}_{j\alpha} = (2\pi\hbar)^{-1} \int x\, e^{\frac{i}{\hbar}(x-\hat{p}_{j\alpha})y} dx\, dy, \qquad f(\hat{q}) = (2\pi\hbar)^{-N} \int f(\xi)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\xi-\hat{q})\eta} d\xi\, d\eta,$$

и пользуясь при вычислении тождествами Вейля (I6), справедливыми здесь в силу тождественных соотношений (I8б), получим:

$$[\hat{p}_{j\alpha}, f(\hat{q})] = -i\hbar \{\partial_{\xi_{j\alpha}} f(\xi)\}_{\xi=\hat{q}} . \tag{24}$$

Теперь соотношения (I8в) и (24) позволяют записать последовательность коммутаторов

$$[\hat{\mathcal{D}}, \hat{p}_{j\alpha}] = \hat{h}^{(0)}_{j\alpha}, \quad [\hat{\mathcal{D}}, \hat{h}^{(\kappa)}_{j\alpha}] = \hat{h}^{(\kappa+1)}_{j\alpha}, \quad [\hat{p}_{j\alpha}, \hat{h}^{(\kappa)}_{\ell\beta}] = \delta_{j\ell}\, \hat{g}^{(\kappa)}_{j\alpha\beta}, \tag{25а}$$

принадлежащих коммутативной подалгебре $\mathcal{A}_q$ и выражающихся через функции $\overline{\mathcal{H}}_{j\alpha}(\vec{z})$ (I8г) конструкциями

$$h^{(\kappa)}_{j\alpha}(\vec{\xi},\vec{z}) = \frac{e_j}{c}(\xi_\lambda \partial_{z_\lambda})^{\kappa} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \xi_\beta\, \overline{\mathcal{H}}_{j\gamma}(\vec{z}), \qquad g^{(\kappa)}_{j\alpha\beta}(\vec{\xi},\vec{z}) = -i\hbar\, \partial_{\xi_\alpha} h^{(\kappa)}_{j\beta}(\vec{\xi},\vec{z}), \tag{25б}$$

при $\vec{\xi} = \vec{\xi}_j'$ и $\vec{z} = \hat{\vec{q}}_j$. Используя соотношения

$$\hat{\mathcal{D}}^n \hat{p}_{j\alpha} = \hat{p}_{j\alpha} \hat{\mathcal{D}}^n + \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m\, \hat{h}^{(n-m-1)}_{j\alpha}\, \hat{\mathcal{D}}^m, \tag{25в}$$

$$\sum_{m=0}^{\kappa} C^m_{n+m+1} = C^{\kappa}_{n+\kappa+2} = \frac{(n+\kappa+2)!}{(n+2)!\ \kappa!} \tag{25г}$$

(здесь и далее C^m_κ – биноминальные коэффициенты), справедливость которых легко доказывается методом математической индукции, приводим оператор (23) к виду:

$$\left\{ -i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}} e^{\hat{C}+\hat{\mathcal{D}}} \right\}_{\xi=0} = \left(\hat{p}_{j\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \hat{h}^{(n)}_{j\alpha} \right) \cdot e^{\hat{\mathcal{D}}} . \tag{25д}$$

Возвращаясь к обозначениям (22а) и (25а,б), окончательно имеем:

$$\left\{ -i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}} e^{\frac{i}{\hbar}(\xi+\xi')\hat{p}} \right\}_{\xi=0} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\xi'\hat{p}} = \hat{p}_{j\alpha} + h_{j\alpha}(\vec{\xi}_j', \hat{\vec{q}}_j), \tag{26а}$$

$$h_{j\alpha}(\vec{\xi},\vec{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} h^{(n)}_{j\alpha}(\vec{\xi},\vec{z}) . \tag{26б}$$

Соотношения (26) позволяют вычислять операторы (2I) для линейных по компонентам импульса функций $A(q,p)$.

В частности, подставляя (26а) в интеграл (2I) при $A = q_{j\alpha}$ и при

$A = p_{j\alpha}$ и сравнивая получаемые результаты с требованиями (4б), приходим к свойствам вспомогательных функций

$$\int \xi_{j\alpha}\, \alpha_0(\xi)\, d\xi = 0, \qquad \int \Phi(\xi', \xi, \eta)\,(\eta_{j\alpha} + h_{j\alpha}(\vec{\xi}_j', \vec{z}))\, d\xi' d\xi\, d\eta = 0, \tag{27}$$

необходимым, в дополнение к свойствам (I8д), для согласования (4).

Перейдем теперь к вычислению оператора (22а) при $X(p) = p_{j\alpha} p_{\ell\beta}$.

Дважды используя результаты (22б,в) и заменяя индексы суммирования, в этом случае получим:

$$\left\{ (-i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}})(-i\hbar\partial_{\xi_{\ell\beta}})(\hat{C}+\hat{\mathcal{D}})^n \right\}_{\xi=0} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\kappa=0}^{m-1} \hat{\mathcal{D}}^{\kappa} \hat{p}_{j\alpha} \hat{\mathcal{D}}^{m-\kappa-1} \hat{p}_{\ell\beta} \hat{\mathcal{D}}^{n-m-1} + \tag{28а}$$

+ (аналогичная сумма с заменой $j\alpha \rightleftarrows \ell\beta$). Применение соотношения (25в) и соответствующая замена индексов суммирования приводят первую сумму из (28а) к виду:

$$\sum_{m=0}^{n-1} m\, \hat{p}_{j\alpha} \hat{\mathcal{D}}^{m-1} \hat{p}_{\ell\beta} \hat{\mathcal{D}}^{n-m-1} + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{m-1} Q_{m\kappa}\, \hat{h}^{(\kappa-1)}_{j\alpha} \hat{\mathcal{D}}^{m-\kappa-1} \hat{p}_{\ell\beta} \hat{\mathcal{D}}^{n-m-1} . \tag{28б}$$

Последующее применение (25в) с учетом коммутаторов (25а) дает упорядоченную по $\hat{\mathcal{D}}$ форму:

$$\frac{n(n-1)}{2} \hat{p}_{j\alpha} \hat{p}_{\ell\beta} \hat{\mathcal{D}}^{n-2} + \sum_{\kappa=0}^{n-3} \Big[R_{n\kappa} \big(\hat{h}^{(n-\kappa-3)}_{\ell\beta} \hat{p}_{j\alpha} + \delta_{j\ell}\, \hat{g}^{(n-\kappa-3)}_{j\alpha\beta} \big) +$$

$$+ S_{n\kappa}\, \hat{h}^{(n-\kappa-3)}_{j\alpha} \hat{p}_{\ell\beta} \Big] \cdot \hat{\mathcal{D}}^{\kappa} + \sum_{\kappa=0}^{n-4} \sum_{m=\kappa+1}^{n-3} T_{n\kappa m}\, \hat{h}^{(m-\kappa-1)}_{j\alpha} \hat{h}^{(n-m-3)}_{\ell\beta} \hat{\mathcal{D}}^{\kappa} . \tag{28в}$$

В выражениях (28б,в) использованы обозначения:

$$Q_{m\kappa} = \sum_{\ell=\kappa}^{m-1} C_\ell^{\ell-\kappa}, \qquad R_{n\kappa} = \sum_{\ell=0}^{\kappa} (n-\kappa+\ell-1)\, C^{\ell}_{\ell+n-\kappa-2}, \tag{28г}$$

$$S_{n\kappa} = \sum_{\ell=0}^{\kappa} (\kappa-\ell+1)\, C^{\ell}_{\ell+n-\kappa-2}, \qquad T_{n\kappa m} = \sum_{\ell=0}^{\kappa} Q_{\ell+n-\kappa-1,\, m-\kappa}\, C^{\ell}_{n+\ell-m-2} . \tag{28д}$$

Представляя экспоненту в (22а) в виде ряда и используя последовательность соотношений (28а,б,в), с учетом вытекающих из (28г,д) и (25г) равенств

$$R_{n\kappa} = (n-\kappa-1)\cdot C_n^{\kappa}, \qquad S_{n\kappa} = C_n^{\kappa}, \qquad T_{n\kappa m} = C^{n-m-2}_{n-\kappa-1} \cdot C_n^{\kappa} , \tag{28е}$$

после соответствующих преобразований получим:

$$\left\{(-i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}})(-i\hbar\partial_{\xi_{\ell\beta}})\, e^{\hat{C}+\hat{D}}\right\}_{\xi=0} = \left\{\frac{1}{2}\hat{p}_{j\alpha}\hat{p}_{\ell\beta} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\hat{h}^{(n)}_{j\alpha}\cdot\hat{p}_{\ell\beta} + \right.$$

$$\left. + \delta_{j\ell}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} g_n\cdot\hat{g}^{(n)}_{j\alpha\beta} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_{nm}\,\hat{h}^{(n)}_{j\alpha}\cdot\hat{h}^{(m)}_{\ell\beta}\right\}\cdot e^{\hat{D}} + \tag{28ж}$$

+ (аналогичное выражение с заменой $j\alpha \rightleftarrows \ell\beta$), где

$$g_n = (n+2)\left[(n+3)!\right]^{-1}, \qquad f_{nm} = \left[(n+m+4)\cdot(m+1)!\cdot(n+2)!\right]^{-1}. \tag{28з}$$

Наконец, возвращаясь к обозначениям (22а) и (25б), имеем:

$$\left\{(-i\hbar\partial_{\xi_{j\alpha}})(-i\hbar\partial_{\xi_{\ell\beta}})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\xi+\xi')\hat{p}}\right\}_{\xi=0} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi'\hat{p}} = \frac{1}{2}\left[\hat{p}_{j\alpha},\hat{p}_{\ell\beta}\right]_+ +$$

$$+ h_{j\alpha}(\vec{\xi}'_j,\hat{\vec{q}}_j)\cdot\hat{p}_{\ell\beta} + h_{\ell\beta}(\vec{\xi}'_\ell,\hat{\vec{q}}_\ell)\cdot\hat{p}_{j\alpha} + f_{j\alpha,\ell\beta}(\vec{\xi}'_j,\hat{\vec{q}}_j,\vec{\xi}'_\ell,\hat{\vec{q}}_\ell) +$$

$$+ f_{\ell\beta,j\alpha}(\vec{\xi}'_\ell,\hat{\vec{q}}_\ell,\vec{\xi}'_j,\hat{\vec{q}}_j) + \delta_{j\ell}\left\{g_{j\alpha\beta}(\vec{\xi}'_j,\hat{\vec{q}}_j) + g_{j\beta\alpha}(\vec{\xi}'_j,\hat{\vec{q}}_j)\right\}, \tag{29а}$$

где функции f и g определяются как

$$f_{j\alpha,\ell\beta}(\vec{\xi},\vec{z},\vec{\xi}',\vec{z}') = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_{nm}\, h^{(n)}_{j\alpha}(\vec{\xi},\vec{z})\cdot h^{(m)}_{\ell\beta}(\vec{\xi}',\vec{z}'), \tag{29б}$$

$$g_{j\alpha\beta}(\vec{\xi},\vec{z}) = -i\hbar\partial_{z_\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} g_n\cdot h^{(n)}_{j\beta}(\vec{\xi},\vec{z}), \tag{29в}$$

а функции $h^{(n)}_{j\alpha}$ и $h_{j\alpha}$ связаны с напряженностью магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}$ соотношениями (I8г), (25б) и (26б).

Теперь равенства (26) и (29) позволяют вычислять операторы (2I) для билинейных по компонентам импульса функций $A(q,p)$.

В частности, для операторов физических величин множества

$$\{A\}_{min} = (q_{j\alpha},\, p_{j\alpha},\, L_{j\alpha},\, T_j,\, U_j,\, W_j) \subset \{A\}_{exp} \tag{30}$$

после подстановки соответствующих им классических функций из (9а,б) в интеграл (2I) с учетом равенств (26) и (29), свойств (20) ядра Φ и необходимых свойств (I8д) и (27) вспомогательных функций имеем:

$$O_{\hat{F}}(q_{j\alpha}) = \hat{q}_{j\alpha}, \qquad O_{\hat{F}}([\vec{q}_j\times\vec{p}_j]_\alpha) = \hat{L}_{j\alpha} = [\hat{\vec{q}}_j\times\hat{\vec{p}}_j]_\alpha + \lambda_{j\alpha}(\hat{\vec{q}}_j), \tag{31а}$$

$$O_{\hat{F}}(p_{j\alpha}) = \hat{p}_{j\alpha}, \qquad O_{\hat{F}}\left(\frac{1}{2m_j}\vec{p}_j^{\,2}\right) = \hat{T}_j = \frac{1}{2m_j}\hat{\vec{p}}_j^{\,2} + \tau_j(\hat{\vec{q}}_j), \tag{31б}$$

$$O_{\hat{F}}(U_j(\vec{q}_j)) = \hat{U}_j = e_j\int\alpha_0(\xi)\cdot\varphi(\hat{\vec{q}}_j+\vec{\xi}_j)\,d\xi, \tag{31в}$$

$$O_{\hat{F}}(W_j(q)) = \hat{W}_j = \int\alpha_0(\xi)\cdot\sum_{j'\neq j} W_{jj'}(\hat{\vec{q}}_j+\vec{\xi}_j,\, \hat{\vec{q}}_{j'}+\vec{\xi}_{j'})\,d\xi. \tag{31г}$$

Здесь $\lambda_{j\alpha}$ и τ_j являются следующими функционалами напряженности магнитного поля и вспомогательных функций:

$$\vec{\lambda}_j(\vec{z}) = \int\Phi(\xi',\xi,\eta)\cdot\left[\vec{\xi}_j\times\left(\vec{\eta}_j + \vec{h}_j(\vec{\xi}'_j,\vec{z})\right)\right]d\xi'd\xi d\eta, \tag{32а}$$

$$\tau_j(\vec{z}) = \frac{1}{m_j}\int\Phi(\xi',\xi,\eta)\left(\frac{1}{2}\vec{\eta}_j^{\,2} + \vec{\eta}_j\cdot\vec{h}_j(\vec{\xi}'_j,\vec{z}) +\right.$$

$$\left. + f_{j\alpha,j\alpha}(\vec{\xi}'_j,\vec{z},\vec{\xi}'_j,\vec{z}) + g_{j\alpha\alpha}(\vec{\xi}'_j,\vec{z})\right)d\xi'd\xi d\eta. \tag{32б}$$

Так как правило соответствия (I3) с оператором вероятности (I8) линейно относительно классических функций $A(q,p)$, то операторы остальных физических величин множества $\{A\}_{exp}$ (8) определятся в виде соответствующих (9б) линейных комбинаций операторов (3I). Так, например, из (I2), (2I) и (3I) имеем:

$$O_{\hat{F}}(H(q,p)) = \hat{H} = \hat{E} = \sum_j\left(\hat{T}_j + \hat{U}_j + \frac{1}{2}\hat{W}_j\right). \tag{33}$$

5. Конкретизация оператора вероятности

Рассмотренный в предыдущих параграфах оператор $\hat{F}(q,p)$ и сама алгебра $\mathcal{A}_{\hat{q},\hat{p}}$, к которой он принадлежит, определены при заданной напряженности магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}(\vec{z})$ соотношениями (I8) с точностью до набора вспогателных функций γ_0 и $\{\varphi_k\}$, обладающих необходимыми интегральными свойствами (I8д) и (27). Любой такой оператор удовлетворяет требованиям неотрицательности (2), нормированности (3) и согласования (4).

Дальнейшая конкретизация оператора вероятности $\hat{F}(q,p)$ и алгебры $\mathcal{A}_{\hat{q},\hat{p}}$ сводится к сужению множества операторов (I8) на основе уравнений (5) и (6), накладывающих определенные ограничения на допустимые наборы вспомогательных функций.

Анализируя требования динамического соответствия (5) отметим, что в рассматриваемом нами случае квантования классические функции для $A \in \{A\}_{exp}$ не зависят от времени и $\partial_t \hat{F} = 0$, а следовательно, и $\partial_t \hat{A} = 0$ (см. (I3)). Кроме того, величины из $\{A\}_{exp}$ есть линейные комбинации элементов множества $\{A\}_{min}$ (30), а правило (I3) линейно. Поэтому для выполнения совокупности уравнений (5) динамического соответствия необходимо и достаточно выполнения равенств:

$$O_{\hat{F}}(\{H(q,p), A(q,p)\}) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}], \qquad A \in \{A\}_{min}. \tag{34}$$

Изучение системы (34) можно совместить с анализом уравнений канонического соответствия (6), так как функция $H(q,p)$ (I2) и оператор $\hat{H}$ (33) сами являются линейными комбинациями элементов множеств $\{A(q,p)\}_{min}$ (30) и $\{\hat{A}\}_{min}$ (3I). Поэтому для справедливости равенств (34) достаточно (и необходимо, если $\{A\}_c = \{A\}_{exp}$) выполнения соотношений (6) для подмножества физических величин (30), т.е.

$$O_{\hat{F}}(\{A_1(q,p), A_2(q,p)\}) = \frac{i}{\hbar}[\hat{A}_1, \hat{A}_2], \qquad A_1, A_2 \in \{A\}_{min}. \tag{35}$$

Вычисляя теперь согласно (II) требуемые для (35) скобки Пуассона и затем их операторы по формулам (2I), (26), (29) и последовательно подставляя получаемые результаты в равенства (35) совместно с соответствующими операторами из (3I), приходим к выводу – совокупность требований динамического (5) и канонического (6) соответствий выполнена, если вспомогательные функции γ_0 и $\{\varphi_\kappa\}$ в дополнение к свойствам (I8д) и (27) удовлетворяют соотношениям:

$$\partial_{r_\alpha} \lambda_{j\beta}(\vec{r}) \equiv \frac{e_j}{c}\int \gamma_0(\xi)\{\delta_{\alpha\beta}(\vec{\xi}_j \cdot \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}+\vec{\xi}_j)) - \xi_{j\alpha}\mathcal{H}_\beta(\vec{r}+\vec{\xi}_j)\}d\xi, \tag{36а}$$

$$\partial_{r_\alpha} \tau_j(\vec{r}) + i\frac{\hbar e_j}{2cm_j}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_{r_\beta}\overline{\mathcal{H}}_{j\gamma}(\vec{r}) \equiv$$

$$\equiv -\frac{e_j}{cm_j}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int \Phi(\xi',\xi,\eta)\cdot(\eta_{j\beta} + h_{j\beta}(\vec{\xi}_j',\vec{r}))\cdot \mathcal{H}_\gamma(\vec{r}+\vec{\xi}_j)\,d\xi' d\xi\, d\eta, \tag{36б}$$

$$\frac{e_j}{c}\int \gamma_0(\xi)\vec{\xi}_j(\vec{\xi}_j \cdot \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}+\vec{\xi}_j))d\xi \equiv \int \Phi(\xi',\xi,\eta)[(\vec{\eta}_j + \vec{h}_j(\vec{\xi}_j',\vec{r}))\times \vec{\xi}_j]\,d\xi' d\xi\, d\eta, \tag{36в}$$

$$\frac{1}{2}\int \gamma_0(\xi)\cdot[\vec{\xi}_j \times [\nabla_{\vec{r}} \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}+\vec{\xi}_j)]]\,d\xi - \overrightarrow{\overline{\mathcal{H}}}_j(\vec{r}) \equiv$$

$$\equiv \frac{i}{\hbar}\int \Phi(\xi',\xi,\eta)[\vec{\xi}_j \times [(\vec{\eta}_j + \vec{h}_j(\vec{\xi}_j',\vec{r}))\times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}+\vec{\xi}_j)]]\,d\xi' d\xi\, d\eta, \tag{36г}$$

$$\int \gamma_0(\xi)[\vec{\xi}_j \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}+\vec{\xi}_j)]\,d\xi \equiv 0, \qquad \int \gamma_0(\xi)[\vec{\xi}_j \times \nabla_{\vec{q}_j}]V_\ell(q+\xi)\,d\xi \equiv 0, \tag{36д}$$

$$\int \Phi(\xi',\xi,\eta)\cdot(\vec{\eta}_j + \vec{h}_j(\vec{\xi}_j',\vec{r}) + i\frac{\hbar}{2}\nabla_{\vec{r}})\cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}+\vec{\xi}_j)\,d\xi' d\xi\, d\eta \equiv 0, \tag{36е}$$

$$\int \Phi(\xi',\xi,\eta)\cdot((\vec{\eta}_j + \vec{h}_j(\vec{\xi}_j',\vec{q}_j) + i\frac{\hbar}{2}\nabla_{\vec{q}_j})\cdot \nabla_{\vec{q}_j})V_\ell(q+\xi)\,d\xi' d\xi\, d\eta \equiv 0. \tag{36ж}$$

Таким образом, оператор $\hat{F}(q,p)$, определенный согласно (I8а-г), удовлетворяет совокупности требований (2)-(6) и может рассматриваться как оператор вероятности координат и импульсов системы точечных частиц во внешнем стационарном электромагнитном поле, если входящие в него вспомогательные функции $\gamma_0(\xi)$ и $\{\varphi_\kappa(\xi)\}$ удовлетворяют совокупности интегральных соотношений (I8д), (27) и (36а-ж).

Вполне понятно, что дальнейшая конкретизация оператора вероятности может проводиться лишь при заданных конкретных потенциалах взаимодействия между частицами и конкретном внешнем электромагнитном поле.

Поэтому в данной работе мы ограничимся замечанием о том, что соотношения (I8д), (27) и (36) для участвующих в определении оператора вероятности вспомогательных функций γ_0 и $\{\varphi_\kappa\}$ содержат лишь силовые характеристики полей и взаимодействий ($\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ и $\vec{\mathcal{F}}_{jj'} = -\nabla W_{jj'}$). Следовательно, рассмотренная выше процедура квантования с оператором вероятности инвариантна относительно различного рода инвариантных преобразований потенциалов, в том числе и градиентных преобразований электромагнитного потенциала.

Литература

1. Kuryshkin V.V. The Uncertainty Principle and Foundation of Quantum Mechanics, London, John Wiley and Sons, 1977, p. 61-83.
2. Запарованный Ю.И., Курышкин В.В., Лябис И.А. Известия вузов,I978, Физика № 3, с. 80–84.
3. Курышкин В.В., Сидорков Н.В., Энтральго Э.Э. Квантово-механический оператор вероятности координат и импульсов, ОИЯИ, Р2–85–943, Дубна, I985, I3 с.
4. Entralgo E.E., Kuryshkin V.V., Zaparovanny Yu.I. Hamiltonian Theories' Quantization Based on a Probability Operator, JINR, E4-86-584, Dubna, 1986, 28 p.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 апреля I987 года.