

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

И 265

P3-87-326

В.К.Игнатович, Ю.В.Никитенко

ДИФФУЗИЯ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ
В НАМАГНИЧЕННЫХ НЕЙТРОНОВОДАХ
И ПОРОШКАХ

Направлено в "Журнал экспериментальной
и теоретической физики"

1987

Одной из задач в физике ультрахолодных нейтронов (УХН) является задача о распространении УХН по нейтроноводам. Интересно, однако, что эта задача оказалась связанной не только с проблемой транспортировки УХН (см., например, ^{1/}, с.70), но и с проблемой отражения УХН от порошков, размер зерна которых значительно превосходит длину волны нейтрона. Отражение от порошков происходит не только в результате отражения от отдельных зерен, расположенных на поверхности, но и вследствие диффузии нейтрона между зернами, что эквивалентно диффузии по нейтроноводам сложной конструкции. Таким образом, отражение УХН от порошка можно моделировать отражением от входного отверстия нейтроновода, если заданы длина свободного пробега и время жизни, а распространение по нейтроноводу полагается целиком диффузным ^{2/}.

Если порошок свойственен магнетизм, то возникает задача о вычислении поляризации УХН при отражении от намагниченного порошка. Принципиально расчет отражения от намагниченного порошка не содержит никаких новых особенностей по сравнению с отражением от ненамагниченного порошка. Однако математически он очень трудоемок. В настоящей работе предлагается новый алгоритм для решения задач диффузии УХН или любого другого газа по трубам. Этот алгоритм делает расчеты более простыми и физически наглядными.

Отличие нового подхода от общепринятого удобнее всего продемонстрировать в немагнитном случае. Задача формулируется следующим образом: имеется труба длины S , на выход которой падает поток J_0 , и нужно найти пропускание трубы, то есть поток из выходного отверстия. Решим эту задачу двумя способами.

ДИФфуЗИЯ УХН ПО НЕМАМАГНИЧЕННОМУ НЕЙТРОНОВОДУ

А. Обычный подход

Уравнение диффузии записывается в виде

$$D \frac{d^2 N(z)}{dz^2} = -N/\tau, \quad (1)$$

где ось z направлена вдоль трубы, $N(z)$ — линейная плотность УХН в ней, D — коэффициент диффузии, τ — время жизни УХН в трубе до поглощения. Решение уравнения (1) ищется в виде

$$N(z) = A e^{-kz} + B e^{kz}, \quad (1a)$$

где $k = 1/L_D$, $L_D = \sqrt{D\tau}$ — длина диффузии, а коэффициенты A ; B определяются из граничных условий на концах трубы. Чтобы поставить эти условия, воспользуемся определением диффузного потока

$$j(z) = -D dN(z)/dz, \quad (2)$$

и в каждом сечении трубы определим потоки $\vec{j}(z)$ и $\overleftarrow{j}(z)$ слева направо и наоборот. Полагая распределение частиц в трубе почти изотропным, можем записать

$$\vec{j}(z) = Nv/4 - (D/2) dN(z)/dz, \quad (3)$$

$$\overleftarrow{j}(z) = Nv/4 + (D/2) dN(z)/dz, \quad (4)$$

Граничные условия теперь естественным образом представляются в следующем виде:

$$j_0 = j(z=0) + \overleftarrow{j}(z=0) = \vec{j}(z=0), \quad (5)$$

$$\overleftarrow{j}(z=S) = 0. \quad (6)$$

Два граничных условия позволяют определить два коэффициента в (1а), после чего находится поток (2) при $z=S$ и отраженный поток (4) при $z=0$. Таким образом, задача оказывается полностью решенной. Трудность решения уравнения диффузии УХН по магнитному нейтронводу состоит в том, что число коэффициентов удваивается и приходится решать систему с матрицей четвертого порядка. В результате, если даже и удастся выписать решение полностью, оно имеет совершенно необозримый вид.

Б. Новый подход

Новый подход использует рекуррентные соотношения, аналогичные тем, какие используются при описании распространения нейтрона в одномерном периодическом потенциале (см. ^{1/1}, с.106).

Рассмотрим сначала бесконечно длинную трубу, расположенную вдоль оси $z \geq 0$. Плотность нейтронов, падающих на входное отверстие, обозначим через N_0 , плотность нейтронов, вылетающих из входного отверстия, — через N_r ; а плотность нейтронов внутри трубы обозначим через $N_{in}(z)$. Пусть нейтроны имеют скорость v . Полагая распределение N_0 изотропным в переднюю полусферу, находим поток нейтронов, падающих на входное отверстие:

$$j_0 = N_0 v/2. \quad (7)$$

Введем коэффициент отражения Γ_{out} нейтронов от входного отверстия

$$N_r = \Gamma_{out} N_0 \quad (8)$$

и коэффициент пропускания входного отверстия снаружи вовнутрь трубы t_{in} , тогда для $N_{in}(z)$ можно записать следующее выражение:

$$N_{in}(z) = e^{-kz} t_{in} N_0. \quad (9)$$

Это выражение является решением уравнения (1), и оно естественным образом содержит только одну экспоненту, поскольку физически очевидно, что внутри бесконечной трубы плотность нейтронов не может содержать экспоненциально растущей компоненты. Показатель затухания плотности, как и ранее, равен

$$k = 1/L_D = 1/\sqrt{D\tau}. \quad (10)$$

Коэффициенты Γ_{out} и t_{in} неизвестны и должны быть определены из граничного условия в точке $z=0$ путем сшивания решений для плотности нейтронов внутри и снаружи трубы. Первое граничное условие — очевидное следствие непрерывности плотности нейтронов:

$$N_0 + N_r = N_{in}(z=0) \rightarrow 1 + \Gamma_{out} = t_{in}. \quad (11)$$

Второе условие — следствие сохранения потока на границе. Если считать, что вылетающие из входного отверстия нейтроны распределены полностью изотропно в заднюю полусферу (что соответствует духу диффузионной модели), то для отраженного потока можно записать выражение

$$j_r = N_r v/2. \quad (12)$$

Непрерывность потока при $z=0$ может быть представлена следующим способом:

$$j_0 = j(z=0) + j_r \rightarrow 1 - \Gamma_{out} = \rho k t_{in}, \quad (13)$$

где

$$\rho = 2D/v \quad (14)$$

и для потоков использованы выражения (7), (12) и (2). Из (11) и (13) следует

$$\Gamma_{out} = (1 - \rho k)/(1 + \rho k), \quad t_{in} = 2/(1 + \rho k). \quad (15)$$

Для решения задачи в случае конечной трубы необходимо рассмотреть, что происходит у выходного отверстия. Для этого сначала опять рассмотрим бесконечную трубу, расположенную вдоль оси $z < 0$.

Примем, что плотность внутри трубы имеет две компоненты. Одна экспоненциально затухает слева направо $\vec{N}(z)$, другая — справа налево $\vec{N}(z)$. Снаружи плотность нейтронов N_{out} изотропно распределена в переднюю полусферу. Снова введем коэффициент отражения внутри трубы r_{in} и коэффициент пропускания t_{out} выходного отверстия наружу:

$$\vec{N}(z) = e^{-kz} \vec{N}(0), \quad \vec{N}(z) = e^{kz} r_{in} \vec{N}(0), \quad N_{out} = t_{out} \vec{N}(0). \quad (16)$$

Условия непрерывности плотности и потока у выходного отверстия приводят к граничным условиям:

$$\vec{N}(0) + \vec{N}(0) = N_{out} \cdot 1 \cdot r_{in} \cdot t_{out}. \quad (17)$$

$$-D \frac{d}{dz} (\vec{N}(z) + \vec{N}(z))_{z=0} = N_{out} v/2 \rightarrow k\rho(1 - r_{in}) = t_{out}, \quad (18)$$

решение которых имеет вид

$$r_{in} = -\frac{1 - k\rho}{1 + k\rho}, \quad t_{out} = \frac{2\rho k}{1 + \rho k}. \quad (19)$$

Вернемся теперь к трубе конечной длины S . Для плотности $\vec{N}(S)$ у выходного отверстия — той ее компоненты, которая экспоненциально спадает от входного отверстия к выходному, запишем рекуррентное соотношение:

$$\vec{N}(S) = e^{-kS} t_{in} N_0 + e^{-kS} r_{in1} e^{-kS} r_{in2} \vec{N}(S). \quad (20)$$

Смысл этого рекуррентного соотношения состоит в следующем: плотность $\vec{N}(S)$ вследствие отражения от выходного отверстия (коэффициент r_{in2} во втором слагаемом) порождает плотность $\vec{N}(z)$, экспоненциально убывающую по направлению ко входному отверстию, отражение от которого (коэффициент r_{in1}) дает вклад в плотность $\vec{N}(z)$, экспоненциально убывающую по направлению к выходному отверстию, и эта часть плотности вместе с долей, описываемой первым слагаемым в (20), создает искомую плотность $\vec{N}(S)$ у выходного отверстия. Решение рекуррентного соотношения (20) имеет вид

$$\vec{N}(S) = (1 - e^{-kS} r_{in1} e^{-kS} r_{in2})^{-1} e^{-kS} t_{in} N_0. \quad (21)$$

Отсюда легко определить плотность вылетающих из нейтроновода УХН:

$$N_{out} = t_{out} \vec{N}(S) = T N_0, \quad (22)$$

и коэффициент пропускания нейтроновода:

$$T = t_{out} (1 - e^{-kS} r_{in1} e^{-kS} r_{in2})^{-1} e^{-kS} t_{in}. \quad (23)$$

Аналогичным образом находится и коэффициент отражения нейтроновода:

$$R = r_{out} + t_{out} e^{-kS} r_{in2} (1 - e^{-kS} r_{in1} e^{-kS} r_{in2})^{-1} e^{-kS} t_{in}. \quad (24)$$

Здесь первое слагаемое описывает отражение от входного отверстия, а второе — выход из входного отверстия тех УХН, которые, отразившись от выходного отверстия, преобразовались в компоненту, экспоненциально затухающую по направлению к входному отверстию, и вышли из входного отверстия с коэффициентом t_{out} . В случае, когда нейтроновод открыт с обоих концов, имеем $r_{in1} = r_{in2} = -r_{out}$. Подставив в (23) и (24) выражения (15), (19), легко находим

$$T = \frac{4k\rho}{(1 + k\rho)^2} \cdot \frac{\exp(-kS)}{1 - [(1 - k\rho)/(1 + k\rho)]^2 \exp(-2kS)}, \quad (25)$$

$$R = \frac{1 - k\rho}{1 + k\rho} \cdot \frac{1 - \exp(-2kS)}{1 - [(1 - k\rho)/(1 + k\rho)]^2 \exp(-2kS)}, \quad (26)$$

что совпадает с теми формулами, которые получаются в обычном подходе.

При наличии диафрагмы на конце нейтроновода все формулы несколько видоизменяются, но учесть эти изменения чрезвычайно просто. Для этого удобнее всего мысленно отделить диафрагму от нейтроновода и рассматривать нейтроновод и диафрагму как два конца некоторой системы нулевой длины $l/3$. Пусть доля открытой площади диафрагмы составляет ξ , тогда отражение диафрагмы, очевидно, равно $r_d = 1 - \xi$, а пропускание — $t_d = \xi$. Для определения пропускания всей системы можно воспользоваться выражением (23), положив в нем $r_{out} = r_{in1} = R$, $t_{in} = T$, $t_{out} = \xi$, $r_{in2} = 1 - \xi$ и $S = 0$. Тогда оно может быть приведено к виду

$$T_d = \xi T / [1 - (1 - \xi) R]. \quad (23a)$$

Совершенно аналогичным образом преобразуется и выражение (24), но в нем t_{out} следует заменить на T , в результате будем иметь

$$R_d = R + (1 - \xi) T^2 / [1 - (1 - \xi) R]. \quad (24a)$$

При $\xi = 1$ из (24a) следует выражение (24), которое можно привести к виду $R = (1 - k\rho \operatorname{cth} kS) / (1 + k\rho \operatorname{cth} kS)$, а при $\xi = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= r_{out} + t_{out} e^{-kS} (1 - e^{-kS} r_{in1} e^{-kS})^{-1} e^{-kS} t_{in} = \\ &= (1 - k^2 \rho^2) / (1 + k^2 \rho^2 + 2k\rho \operatorname{cth} kS). \end{aligned} \quad (27)$$

В предельном случае непоглощающего нейтронотода ($k \rightarrow 0$) из (25), (26) получаем соответственно

$$T = 1 / (1 + S/2\rho), \quad R = (S/2\rho) / (1 + S/2\rho). \quad (28)$$

ДИФфуЗИЯ ПО НАМАГНИЧЕННОМУ НЕЙТРОНОВОДУ

В этом случае необходимо принимать во внимание поляризацию нейтронов. Выберем ось квантования и обозначим число нейтронов, поляризованных против оси (вверх), через N_+ , а число нейтронов, поляризованных по этой оси (вниз), — через N_- . Диффузия нейтронов описывается системой уравнений:

$$D_+ \frac{d^2 N_+(z)}{dz^2} = N_+(z)/\tau_{\uparrow\uparrow} - N_- / \tau_{\uparrow\downarrow}, \quad D_- \frac{d^2 N_-(z)}{dz^2} = N_-(z)/\tau_{\downarrow\downarrow} - N_+ / \tau_{\downarrow\uparrow}, \quad (29)$$

которую можно записать в виде одного матричного уравнения:

$$d^2 \psi(z)/dz^2 = M \psi(z), \quad (30)$$

где

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} N_+(z) \\ N_-(z) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} L_{\uparrow\uparrow}^{-2} & -L_{\uparrow\downarrow}^{-2} \\ -L_{\downarrow\uparrow}^{-2} & L_{\downarrow\downarrow}^{-2} \end{pmatrix}, \quad L_{ik}^2 = D_i \tau_{ik}. \quad (31)$$

В уравнении (29) $\tau_{\uparrow\uparrow}$ — время жизни нейтронов со спином вверх до поглощения или переворота спина, $\tau_{\downarrow\downarrow}$ — аналогичное время жизни для нейтронов со спином вниз. Время $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$ характеризует скорость изменения поляризации. Равенство $\tau_{\uparrow\downarrow} = \tau_{\downarrow\uparrow}$ следует из условия детального равновесия (при условии, что внешнее поле внутри нейтронотода достаточно мало). Коэффициенты диффузии D_+ и D_- могут различаться при наличии поглощения, поскольку, по определению, $D = \ell v/3$, где v — скорость нейтрона, а ℓ — средняя длина свободного пробега, в которой учитывается диффузное рассеяние, переход из одного спинового состояния в другое и поглощение. Последнее же может быть разным для двух направлений спина.

Каждую матрицу 2×2 можно разложить по матрицам Паули. В данном случае $M = b_+ + b_- \hat{\sigma}$, где

$$b_{\pm} = \frac{1}{2} (L_{\uparrow\uparrow}^{-2} + L_{\downarrow\downarrow}^{-2}), \quad (32)$$

$$\vec{b}_- = -\frac{1}{2} (L_{\uparrow\downarrow}^{-2} + L_{\downarrow\uparrow}^{-2}, i(L_{\uparrow\downarrow}^{-2} - L_{\downarrow\uparrow}^{-2}), L_{\uparrow\uparrow}^{-2} - L_{\downarrow\downarrow}^{-2}).$$

Можно ввести единичный вектор $\vec{n} = \vec{b}_- / b_-$, при этом длина вектора b_- равна

$$b_- = \frac{1}{2} \sqrt{(L_{\uparrow\uparrow}^{-2} - L_{\downarrow\downarrow}^{-2})^2 + 4L_{\uparrow\downarrow}^{-2} L_{\downarrow\uparrow}^{-2}}. \quad (33)$$

Следует обратить внимание на мнимую единицу в определении вектора \vec{b}_- , соответственно она войдет и в определение \vec{n} . Ее появление целиком обусловлено мнимой единицей в определении матриц Паули и не приведет к появлению комплексных значений N_+ , N_- .

Решение уравнения (30) приведем в виде

$$\psi(z > 0) = e^{-\hat{k}z} \psi(z = 0), \quad (34)$$

где показатель \hat{k} представляет собой матрицу $\hat{k} = \sqrt{M}$:

$$\hat{k} = k_+ + k_- \hat{n} \hat{\sigma}, \quad \vec{k} = k_- \vec{n}. \quad (35)$$

Из условия $\hat{k}^2 = M$ получаем

$$k_+ = \frac{1}{2} (\sqrt{b_+ + b_-} + \sqrt{b_+ - b_-}), \quad k_- = \frac{1}{2} (\sqrt{b_+ + b_-} - \sqrt{b_+ - b_-}). \quad (36)$$

Граничные условия на входном конце имеют вид, аналогичный (11), (13):

$$1 + \hat{r}_{out} = \hat{t}_{in}, \quad (37)$$

$$1 - \hat{r}_{out} = \hat{\rho} \hat{k} \hat{t}_{in},$$

где $\hat{\rho}$ — диагональная матрица с матричными элементами $\rho_{\uparrow\downarrow} = 2D_{\uparrow\downarrow}/v$. Ее можно также представить в виде разложения по матрицам Паули:

$$\hat{\rho} = \rho_+ + \hat{\rho}_- \hat{\sigma}; \quad \rho_+ = (\rho_{\uparrow} + \rho_{\downarrow})/2, \quad \hat{\rho}_- = (0, 0, (\rho_{\uparrow} - \rho_{\downarrow})/2). \quad (38)$$

Матричные коэффициенты \hat{r}_{out} , \hat{t}_{in} и полученные из аналогичных граничных условий на выходном конце нейтронотода \hat{r}_{in} и \hat{t}_{out} можно представить в виде

$$\hat{r}_{out} = -\hat{r}_{in} = (1 - \hat{q}) / (1 + \hat{q}), \quad \hat{t}_{in} = 2 / (1 + \hat{q}), \quad \hat{t}_{out} = 2\hat{q} / (1 + \hat{q}), \quad \hat{q} = \hat{\rho} \hat{k}. \quad (39)$$

Матрицу $\hat{q} = \hat{\rho} \hat{k}$ можно записать аналогично (35) $\hat{q} = q_+ + \hat{q}_- \hat{\sigma}$, причем компоненты q_+ и \hat{q}_- легко вычисляются из произведения $\hat{\rho} \hat{k}$ с учетом правил умножения матриц Паули:

$$q_+ = \rho_+ k_+ + \rho_- k_-, \quad \vec{q}_- = \rho_+ k_- \vec{n} + \rho_- k_+ + i[\vec{\rho}_- \vec{k}_-]. \quad (40)$$

Удобно ввести единичный вектор

$$\vec{n}' = \vec{q}_- / |q_-|, \quad q_- = \sqrt{(\rho_+ k_-)^2 + (\rho_-)^2 k_+^2 + 2\rho_+ k_- k_+ (\rho_- \vec{n}) - |[\vec{\rho}_- \vec{k}_-]|^2}. \quad (41)$$

Пропускание \hat{T} , отражение \hat{R} от открытого с обеих сторон нейтронорода, а также отражение \hat{R} от нейтронорода, закрытого на одном конце, записываются в матричном виде аналогично (23), (24) и (27):

$$\begin{aligned} \hat{T} &= t(1 - \text{er} \text{er})^{-1} \text{et}', & R &= r - \text{ter}(1 - \text{er} \text{er})^{-1} \text{et}', \\ \hat{R} &= r + \text{te}(1 + \text{ere})^{-1} \text{et}', \end{aligned} \quad (42)$$

где для упрощения записи введены обозначения $t = t_{\text{out}}$, $t' = t_{\text{in}}$, $r = r_{\text{out}}$, $e = \exp(-kS)$.

Если падающий пучок нейтронов не поляризован и нас интересует полная интенсивность прошедших или отраженных нейтронов, то эту интенсивность можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= I_{\uparrow} + I_{\downarrow} = (A_{\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\uparrow}) I_{0\uparrow} + (A_{\uparrow\downarrow} + A_{\downarrow\downarrow}) I_{0\downarrow} = \\ &= (A_{\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow} + A_{\downarrow\downarrow}) I_0 / 2 = \psi_0 \hat{A} \psi_0 I_0 / 2, \end{aligned} \quad (43)$$

где $I_0 = I_{0\uparrow} + I_{0\downarrow} = 2I_{0\uparrow}$ — полная интенсивность первичных неполяризованных нейтронов, которую мы в дальнейшем будем нормировать на 2. Матрица \hat{A} представляет собой \hat{T} , \hat{R} или \hat{R} , $A_{\uparrow\downarrow}$ — соответствующие матричные элементы, а ψ_0 — двумерный вектор:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

При нормировке $I_0 = 2$ пропускание и вероятности отражения получаются делением интенсивностей на 2:

$$W = I / 2. \quad (45)$$

Поляризацию отраженного или прошедшего пучка также можно записать в компактном виде:

$$\mathcal{P} = (I_{\uparrow} - I_{\downarrow}) / (I_{\uparrow} + I_{\downarrow}) = \psi_0 \sigma_z \hat{A} \psi_0 / I. \quad (46)$$

Если первичный пучок поляризован, то правый вектор ψ_0 в (43), (46) нужно заменить на вектор $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Следует заметить, что r, t, t' зависят только от $\vec{n}' \vec{\sigma}$, а e — только от $\vec{n} \vec{\sigma}$, поэтому их можно записать через проекционные операторы

$$p = (1 + \vec{n}' \vec{\sigma}) / 2, \quad \bar{p} = (1 - \vec{n}' \vec{\sigma}) / 2, \quad Q = (1 + \vec{n} \vec{\sigma}) / 2, \quad \bar{Q} = (1 - \vec{n} \vec{\sigma}) / 2 \quad (47)$$

следующим образом:

$$r = r_1 p + r_2 \bar{p}, \quad e = e_1 Q + e_2 \bar{Q}, \quad (48)$$

где r_1, t_1, t_1' и r_2, t_2, t_2' определяются формулами (39), в которых \hat{Q} заменяется на $q_{1,2} = q_{\pm} \pm q_{\mp}$, а

$$e_{1,2} = \exp(-k_{1,2} S), \quad k_{1,2} = k_{\pm} \pm k_{\mp}. \quad (49)$$

Полезно также учесть, что вектор ψ_0 удовлетворяет условию

$$\sigma_x \psi_0 = \psi_0, \quad (50)$$

при этом выражения (43) и (46) можно записать и с помощью проекционного оператора $X = (1 + \sigma_x) / 2$:

$$A = \psi_0 \hat{A} \psi_0 = \psi_0 X \hat{A} X \psi_0. \quad (51)$$

Матрица $X \hat{A} X$ приводится к виду $A X$, и для определения A достаточно положить $X = 1$.

В случае первичного поляризованного пучка для интенсивности имеем

$$I = I_{\uparrow} + I_{\downarrow} = (A_{\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\uparrow}) I_{0\uparrow} = \psi_0 \hat{A} \psi_1 I_0 / 2. \quad (52)$$

Для вычислений удобно воспользоваться тождеством

$$\psi_0 \hat{A} \psi_1 = \psi_1 Z (1 + \sigma_x) A Z \psi_1, \quad (53)$$

где $Z = (1 + \sigma_z) / 2$.

Для поляризации при этом получается следующее выражение:

$$P = \psi_1 Z(1 - \sigma_x) A Z \psi_1^{-1}. \quad (54)$$

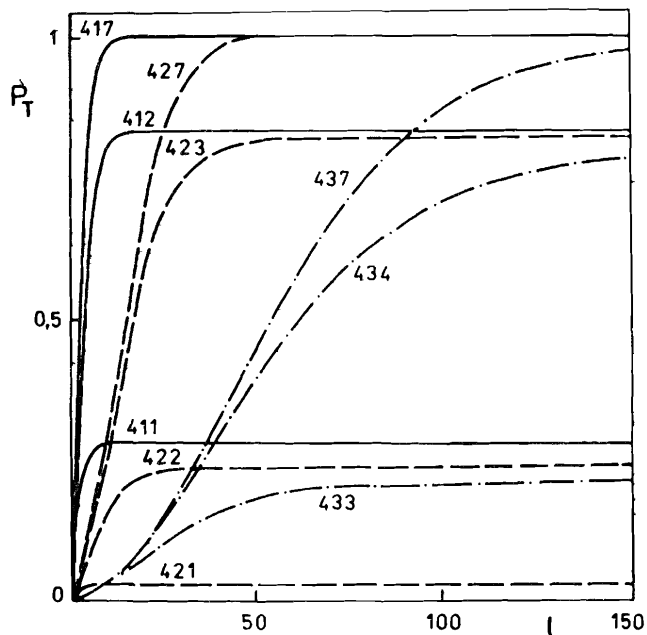
В матрице 1 приведены различные операторные соотношения, которые используются в матрицах 2 и 3 для вычисления интенсивностей и поляризаций прошедших и отраженных нейтронов. Мы приведем здесь только приближенные выражения для интенсивности и поляризации отраженных УХН, когда выходное отверстие нейтронновода закрыто и длина S нейтронновода достаточно велика, чтобы можно было пренебречь $\exp(-k_1 S)$:

$$I_{\bar{R}} = r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + \frac{t_1 t_1' a_2 \beta_1 + t_2 t_2' a_1 \beta_2 - (t_1 t_2' g_{1x} + t_2 t_1' g_{2x}) e_2^2}{1 + (r_1 a_2 + r_2 a_1) e_2^2}, \quad (55)$$

$$P_{\bar{R}} = (r_1 - r_2) \delta / I_{\bar{R}} + \frac{[t_1 t_1' (a_2 - a_1) \delta - t_1 t_2' \gamma_1 + t_2 t_1' \gamma_2] e_2^2}{[1 + (r_1 a_2 + r_2 a_1) e_2^2] I_{\bar{R}}}. \quad (56)$$

В предельном случае, когда в (31) $L_{\uparrow\downarrow} = L_{\downarrow\uparrow}$, $L_{\uparrow\uparrow} = L_{\downarrow\downarrow}$ и $\rho_1 = \rho_2$, получаем предельное соотношение (27) для $I_{\bar{R}}$ и 0 для поляризации.

На рис. 1-3 приведены результаты численных расчетов поляризации пучка в зависимости от длины нейтронновода при различных значениях



вероятностей поглощения μ_1 и μ_2 в обоих спиновых состояниях и вероятности перехода μ_{12} из одного спинового состояния в другое. Кривые на рисунках помечены тремя индексами n_1 , n_2 , n_3 ($n_1 = \lg \mu_1^{-1}$, $n_2 = \lg \mu_2^{-1}$, $n_3 = \lg \mu_{12}^{-1}$).

Рис. 1. Поляризация прошедшего пучка P_T при различных значениях индексов n_1 , n_2 и n_3 в зависимости от длины нейтронновода l (в единицах длины пробега между двумя столкновениями). Падающий пучок неполяризован.

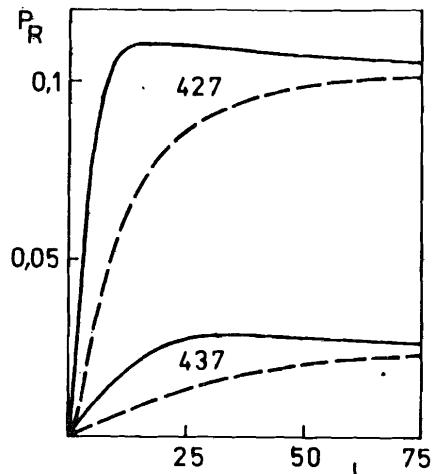


Рис. 2. Поляризация отраженного пучка для открытого P_R (штриховая линия) и закрытого с одной стороны $P_{\bar{R}}$ (сплошная линия) нейтронновода в зависимости от его длины l . Падающий пучок неполяризован.

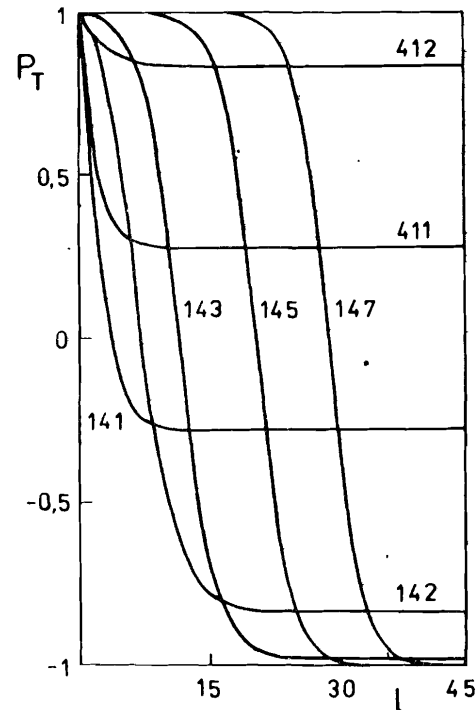


Рис. 3. Поляризация проходящего пучка P_T в зависимости от длины нейтронновода l . Падающий пучок поляризован.

На рис. 1, 2 приведены кривые изменения поляризации для прошедшего P_T и отраженного P_R пучков, если падающий на среду пучок не поляризован. Видно, что при некоторых значениях индексов n_1, n_2, n_3 поляризация P_T достигает единицы уже при длине в несколько длин пробега между двумя столкновениями. Поляризация отраженного пучка при одних значениях индексов n_1, n_2, n_3 оказывается меньше поляризации прошедшего.

На рис. 3 приведены кривые изменения поляризации для прошедшего пучка, если падающий пучок был поляризован. Из приведенных зависимостей можно заключить, что если вероятность поглощения во втором спиновом состоянии меньше, чем в первом ($n_2 > n_1$), то знак поляризации изменяется. Видно также, что, изменяя длину нейтронновода, можно по величине поляризации определить с высокой точностью в определенных пределах вероятность перехода.

Некоторые операторные соотношения

a) $(\vec{n}\vec{\sigma})(\vec{n}'\vec{\sigma}) = (\vec{n}\vec{n}') + i[\vec{n}\vec{n}']\vec{\sigma}$. б) $P + \bar{P} = 1$. (1)

a) $P^2 = P$, б) $P\bar{P} = 0$. в) $PQ + \bar{Q}\bar{P} = (1 + \vec{n}'\vec{n})/2$. (2)

a) $PQP = \frac{1}{2}(1 + \vec{n}'\vec{n})P$, б) $PQ\bar{P} = -P\bar{Q}\bar{P} = \vec{g}_1\vec{\sigma}$. (3)

a) $\bar{P}QP = -\bar{P}\bar{Q}\bar{P} = \vec{g}_2\vec{\sigma}$, б) $\vec{g}_1 = (i[\vec{n}'\vec{n}] + [\vec{n}'[\vec{n}\vec{n}']]) / 4$. (4)

a) $\vec{g}_2 = (-i[\vec{n}'\vec{n}] + [\vec{n}'[\vec{n}\vec{n}']]) / 4$, б) $X\sigma_z \vec{a}\vec{\sigma} X = (a_z - ia_y)X$. (5)

a) $\hat{A} = A_1 P + A_2 \bar{P}$, б) $\hat{B} = B_1 P + B_2 \bar{P}$, в) $\hat{C} = C_1 Q + C_2 \bar{Q}$. (6)

a) $\hat{A} = A_1 \bar{P} + A_2 P$, б) $\hat{A}\hat{A} = A_1 A_2$, в) $\hat{A}\hat{B} = A_1 B_1 P + A_2 B_2 \bar{P}$. (7)

a) $\hat{A}\hat{C} + \hat{C}\hat{A} = (A_1 C_1 + A_2 C_2) a_1 + (A_1 C_2 + A_2 C_1) a_2$, б) $a_{1,2} = (1 \pm \vec{n}'\vec{n}) / 2$. (8)

$\hat{A}\hat{C}\hat{A} + \hat{A}\hat{C}\hat{A} = a_1 (A_1^2 C_1 + A_2^2 C_2) + a_2 (A_1^2 C_2 + A_2^2 C_1)$. (9)

a) $(1 + \hat{A}\hat{C})^{-1} = (1 + \hat{C}\hat{A}) / N_1$, б) $N_1 = 1 + \hat{A}\hat{C} + \hat{C}\hat{A} + \hat{A}\hat{C}\hat{C}\hat{A}$. (10)

a) $(1 + \hat{A}\hat{C}\hat{A})^{-1} = (1 + \hat{A}\hat{C}\hat{A}) / N_2$, б) $N_2 = 1 + \hat{A}\hat{C}\hat{A} + \hat{A}\hat{C}\hat{A} + A_1^2 A_2^2 C_1 C_2$. (11)

$N_1 = 1 + a_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2) + a_2 (A_1 C_2 + A_2 C_1) + A_1 A_2 C_1 C_2$. (12)

$N_2 = 1 + a_1 (A_1^2 C_1 + A_2^2 C_2) + a_2 (A_1^2 C_2 + A_2^2 C_1) + A_1^2 A_2^2 C_1 C_2$. (13)

Вспользуемся правилом перемножения матриц Паули (1а) и очевидным равенством (16). Тогда после непосредственной проверки можно убедиться в справедливости соотношений (2)-(5). Рассмотрим операторы (6). Пользуясь соотношениями (2)-(5), получим (7)-(9). В (7а) введено определение сопряженного оператора. Сопряжение позволяет уничтожить операторность знаменателя (10а), (10б), аналогично уничтожению иррациональности. В результате оператором становится числитель, а знаменатель (10б), (11) становится числом (12), (13) соответственно.

Расчет интенсивностей пропускания и отражения нейтронов нейтроноводом в диффузионном приближении

$T = \frac{1}{2} t [(1 + er)^{-1} + (1 - er)^{-1}] et' = \frac{1}{2} t [(1 + \bar{r}\bar{e}) / N_+ + (1 - \bar{r}\bar{e}) / N_-] et'$. (1)

a) $\hat{T} = tet' C_+ + t\bar{r}t' e_1 e_2 C_-$, б) $C_{\pm} = \frac{1}{2} (\frac{1}{N_+} \pm \frac{1}{N_-})$. (2)

$N_{\pm} = 1 + r_1 r_2 e_1 e_2 \pm [(r_1 e_1 + r_2 e_2) a_1 + (r_1 e_2 + r_2 e_1) a_2]$. (3)

$tet' = t_1 t_1' (e_1 a_1 + e_2 a_2) P + t_2 t_2' (e_1 a_2 + e_2 a_1) \bar{P} + (e_1 - e_2) [t_1 t_2' \vec{g}_1 \vec{\sigma} + t_2 t_1' \vec{g}_2 \vec{\sigma}]$. (4)

a) $t\bar{r}t' = t_1 t_1' r_2 P + t_2 t_2' r_1 \bar{P}$, б) $X\hat{T}X = TX$. (5)

a) $I_T = T = \sum t_i t_j' T_{ij}$, б) $i, j = 1, 2$, в) $T_{12} = (e_1 - e_2) C_+ g_{1x}$. (6)

a) $T_{21} = (e_1 - e_2) C_+ g_{2x}$, б) $T_{11} = [(e_1 a_1 + e_2 a_2) C_+ + r_2 e_1 e_2 C_-] \beta_1$. (7)

a) $T_{22} = [(e_1 a_2 + e_2 a_1) C_+ + r_1 e_1 e_2 C_-] \beta_2$, б) $\beta_{1,2} = (1 \pm n_x') / 2$. (8)

$\hat{R} = r + \frac{1}{2} t [(1 + \bar{r}\bar{e}) / N_+ - (1 - \bar{r}\bar{e}) / N_-] et'$. (9)

$\hat{R} = r + tet' C_- + t\bar{r}t' e_1 e_2 C_+$. (10)

$I_R = r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + I_T (C_+ \leftrightarrow C_-)$. (11)

$\hat{\bar{R}} = r + te(1 + \bar{e}\bar{r}\bar{e}) et' / N_3 = r + (te^2 t' - t\bar{r}t' e_1^2 e_2^2) / N_3$. (12)

$I_{\bar{R}} = r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + I_T (e_1 \leftrightarrow e_1^2; C_+, C_- \rightarrow C_3 = 1/N_3)$. (13)

a) $I_{\bar{R}} = r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + \sum t_i t_j' \bar{R}_{ij}$, б) $\bar{R}_{12} = (e_1^2 - e_2^2) g_{1x} / N_3$. (14)

a) $\bar{R}_{21} = (e_1^2 - e_2^2) g_{2x} / N_3$, б) $\bar{R}_{11} = [e_1^2 a_1 + e_2^2 a_2 + r_2 e_1^2 e_2^2] \beta_1 / N_3$. (15)

$N_3 = 1 + e_1^2 e_2^2 r_1 r_2 + (e_1^2 r_1 + e_2^2 r_2) a_1 + (e_1^2 r_2 + e_2^2 r_1) a_2$. (16)

$\bar{R}_{22} = (e_1^2 a_2 + e_2^2 a_1 + r_1 e_1^2 e_2^2) \beta_2 / N_3$. (17)

Представим матрицу пропускания в виде (1), где обратные операторы видоизменены в соответствии с (10а) матрицы 1. Ее можно также записать в виде двух слагаемых (2а) с коэффициентами (2б), причем использовано соотношение (7б) матрицы 1. Знаменатели обратных операторов в (1) указаны в (3). Первое слагаемое в (2б) приводится к виду (4), второе — к виду (5а). Пользуясь соотношением (5б), получаем интенсивность пропускания (6а) с коэффициентами T_{ij} , указан-

ными в (6в)-(8). Матрица отражения \hat{R} может быть преобразована аналогично (1) и (26), в результате получают выражения (9), (10). Воспользовавшись соотношением, аналогичным (5б), получим интенсивность отражения (11), где третье слагаемое равно (6а) с переставленными в этом выражении коэффициентами C_+ и C_- . Отражение от закрытого нейтронотода с помощью соотношения вида (11а) матрицы 1 может быть представлено в виде (12). Процедура, аналогичная (5), с учетом соотношений (3), (4) и (5а) матрицы 1 приводит к интенсивности отражения (13). В (14)-(17) выписаны соответствующие преобразованные коэффициенты в явном виде.

Матрица 3

Расчет поляризации прошедших и отраженных нейтронов

$$\hat{T} = t_1 t_1' [(e_1 a_1 + e_2 a_2) C_+ + r_2 e_1 e_2 C_-] P + t_2 t_2' [(e_1 a_2 + e_2 a_1) C_+ + r_1 e_1 e_2 C_-] \bar{P} + (e_1 - e_2) (t_1 t_2' \vec{g}_1 \vec{\sigma} + t_2 t_1' \vec{g}_2 \vec{\sigma}) C_+ \quad (1)$$

$$a) X_{\sigma_z} T X = \sum t_i t_j' T_{ij}' X, \quad б) \mathcal{P}_T = \sum t_i t_j' T_{ij}' / I_T \quad (2)$$

$$a) T_{11}' = [(e_1 a_1 + e_2 a_2) C_+ + r_2 e_1 e_2 C_-] \delta, \quad б) \delta = (n_z' - i n_y') / 2 \quad (3)$$

$$a) T_{22}' = -[(e_1 a_2 + e_2 a_1) C_+ + r_1 e_1 e_2 C_-] \delta, \quad б) T_{12}' = (e_1 - e_2) C_+ \gamma_1 \quad (4)$$

$$a) T_{21}' = (e_1 - e_2) C_+ \gamma_2, \quad б) \gamma_{1,2} = g_{1,2,z} - i g_{1,2,y} \quad (5)$$

$$\mathcal{P}_R = (r_1 - r_2) \delta / I_R + \mathcal{P}_T (C_+ \leftrightarrow C_-) (1 - (r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2) / I_R) \quad (6)$$

$$\mathcal{P}_{\bar{R}} = (r_1 - r_2) \delta / I_{\bar{R}} + \mathcal{P}_T (e_i \rightarrow e_i^2; C_{\pm} \rightarrow 1/N_3) (1 - (r_1 \beta_2 + r_2 \beta_1) / I_{\bar{R}}) \quad (7)$$

$$\mathcal{P}_{\bar{R}} = (r_1 - r_2) \delta / I_{\bar{R}} + \sum t_i t_j' \tilde{R}_{i,j}' / I_{\bar{R}} \quad (8)$$

$$a) \tilde{R}_{11}' = (e_1^2 a_1 + e_2^2 a_2 + r_2 e_1^2 e_2^2) \delta / N_3, \quad б) \tilde{R}_{12}' = (e_1^2 - e_2^2) \gamma_1 / N_3 \quad (9)$$

$$a) \tilde{R}_{22}' = -(e_1^2 a_2 + e_2^2 a_1 + r_1 e_1^2 e_2^2) \delta / N_3, \quad б) \tilde{R}_{21}' = (e_1^2 - e_2^2) \gamma_2 / N_3 \quad (10)$$

Матрица пропускания (1) с учетом соотношения (2а) приводит к поляризации пропускания (26). Коэффициенты T_{ij}' определяются в соответствии с выражениями (3)-(5) матрицы 1. Поляризация в отражении вычисляется аналогичным образом с учетом выражений (10), (12), (4) и (5а) матрицы 2. Результат указан в (6), (7). Для $\mathcal{P}_{\bar{R}}$ соответствующие коэффициенты выписаны в явном виде в (9)-(10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатович В.К. Физика ультрахолодных нейтронов. М.: Наука, 1986.
2. Голиков В.В., Кулагин Е.Н., Никитенко Ю.В. ОИЯИ, РЗ-87-20, Дубна, 1987.
3. Косвинцев Ю.Ю., Морозов В.И., Терехов Г.И. - В сб.: Нейтронная физика. Тр. Всесоюз. конф. М.: ЦНИИатоминформ, 1984, ч.4, с.3, 44.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 мая 1987 года.