сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-391

Н.С.Шавохина

ЧЕТВЕРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

1987

В данной работе мы развиваем модель взаимодействия частиц, основанную на понятиях длины линии и площади поверхности для двух частиц /1-9/, а также на понятиях длины линии и площади поверхностей двух и трех измерений для трех частиц /10, 11/. Мы будем исследовать систему из четырех частиц, четверное взаимодействие между которыми передает само пространство-время. Чтобы рассмотреть такое взаимодействие, необходимо наряду с мерой площадей одного, двух и трех измерений задать меру самого пространства-времени. Одномерная поверхность здесь определяется как мировая линия. Такую модель, основанную на понятии меры пространства-времени и всех его подмногообразий, будем называть ареальной моделью, а объекты, которые она описывает, - ареальными объектами. Название происходит от латинского слова "area" - площадь. Ареальные объекты существуют в ареальных пространствах, известных в геометрии /12-14/. Максимальная кратность взаимодействия частиц в ареальной модели равна размерности пространства-времени. Поэтому четверное взаимодействие между частицами является максимально возможным в физических мирах. Ниже мы начинаем исследование ареальной модели взаимодействия четырех частиц в релятивистской механике, т.е. в плоском пространстве-времени Пуанкаре - Минковского.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мир Пуанкаре - Минковского представляет собой простое ориентируемое многообразие $\mathfrak{M}$, на котором задана фундаментальная форма

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = (dx^1)^2 - \frac{1}{c^2}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2], \qquad /1/$$

где постоянная c равна скорости света в пустоте, через $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(q, -\frac{1}{c^2}, -\frac{1}{c^2}, -\frac{1}{c^2})$ обозначен метрический тензор плоского пространства в декартовых координатах $x^\alpha, \alpha \in \{1,2,3,4\}$. Приведем известные формулы /см., например, /15// преобразования тензорных величин при переходе от карты $K(x)$ к карте $\tilde{K}(\tilde{x})$

$$\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha (x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad /2/$$

Векторные f^α и ковекторные величины g^α имеют следующие законы преобразования:

$$\tilde{f}^\alpha = f^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}, \qquad \tilde{g}_\alpha = g_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}. \qquad /3/$$

Законы преобразования величин с несколькими векторными /верхними/ и ковекторными /нижними/ индексами вытекают из /3/. Так, например, имеем

$$\tilde{\eta}^{\alpha\beta} = \eta^{\nu\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\mu}, \quad \tilde{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = R^\mu_{\nu\sigma\tau} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\delta}. \qquad /4/$$

Выражение, содержащее одинаковые верхний и нижний индексы, представляет собой сумму. Так,

$$\tilde{f}^\alpha = f^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\nu} = f^1 \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^1} + f^2 \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^2} + f^3 \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^3} + f^4 \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^4}.$$

Опускание и поднимание индексов в пространстве с метрикой /10/ осуществляется с помощью метрического тензора $\eta_{\alpha\beta}$ и обратного к нему $\eta^{\alpha\beta}$. Так,

$$f_\alpha = \eta_{\alpha\beta} f^\beta, \qquad T^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} T_{\mu\nu}.$$

Совокупность $\{x^\alpha\} = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ задает на $\mathfrak{M}$ мировую точку x, что будем записывать в виде $x = \{x^\alpha\}$.

Линии в $\mathfrak{M}$ задаются в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1). \qquad /5/$$

Касательный вектор в каждой точке этой линии будем обозначать

$$a_1 = \{a_1^\alpha\} = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\right\}. \qquad /6/$$

Двумерные поверхности в $\mathfrak{M}$ задаются в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2). \qquad /7/$$

Пару независимых в каждой точке касательных к этой поверхности векторов будем обозначать

$$a_1 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\right\}, \qquad a_2 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^2}\right\}. \qquad /8/$$

Трехмерные поверхности в $\mathfrak{M}$ задаются в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, u^3). \qquad /9/$$

Тройку независимых в каждой точке касательных к поверхности /9/ векторов будем обозначать

$$a_1 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\right\}, \quad a_2 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^2}\right\}, \quad a_3 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^3}\right\}. \qquad /10/$$

Наконец, запись

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, u^3, u^4) \qquad /11/$$

означает, что $\mathfrak{M}$ отнесено к новой карте $K(u)$, если якобиан $\dfrac{\mathfrak{D}(x^1, x^2, x^3, x^4)}{\mathfrak{D}(u^1, u^2, u^3, u^4)} \neq 0$. В этом случае четыре вектора

$$a_i = \{a_i^\alpha\} = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right\}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \qquad /12/$$

линейно независимы в каждой точке $\mathfrak{M}$. Меры длины, площади, объема и гиперобъема /мера пространства-времени четырех измерений/ для /5/, /7/, /9/ и /12/ соответственно обозначим

$$w_1(x, d_1x), \quad w_2(x, d_1x, d_2x),$$

$$w_3(x, d_1x, d_2x, d_3x), \quad w_4(x, d_1x, d_2x, d_3x, d_4x). \qquad /13/$$

Здесь совокупности векторов смещений - для /5/ $d_1x = \{d_1x^\alpha\}$; для /6/ $d_ix = \{d_ix^\alpha\}$, $i = 1,2$, для /9/ $d_ix = \{d_ix^\alpha\}$, $i = 1,2,3$, для /11/ $d_ix = \{d_ix^\alpha\}$, $i = 1,2,3,4$ являются независимыми.

На всех многообразиях /5/ - /12/, вложенных в $\mathfrak{M}$ с метрикой /1/, возникает индуцированная метрика

$$ds_p^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^k} du^i du^k,$$

где $i, k \in \{1, \dots, p\}$, а в свою очередь $p \in \{1,2,3,4\}$.

Величина

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^k} = (a_i a_k) = g_{ik} \qquad /14/$$

называется метрическим тензором многообразия размерности p, вложенного в $\mathfrak{M}$. Выражение

$$\eta_{\alpha\beta}\, a_i^\alpha a_k^\beta = (a_i a_k). \qquad /15/$$

определяет скалярное произведение в $\mathfrak{M}$.

В плоском пространстве-времени выражения /13/ с учетом /14/ равны

$$w_1 = \sqrt{e_1 g_{11}}\, du^1 = \sqrt{e_1 (a_1 a_1)}\, du^1 = L_1(x, a_1)\, du^1, \qquad /16/$$

$$w_2 = \sqrt{e_2\, |g_{ik}|}\, du^1 du^2 = L_2(x, a_1, a_2)\, du^1 du^2 = \sqrt{e_2 \begin{vmatrix} (a_1 a_1) & (a_1 a_2) \\ (a_2 a_1) & (a_2 a_2) \end{vmatrix}}\, du^1 du^2, \qquad /17/$$

$$w_3 = \sqrt{e_3\, |g_{ik}|}\, du^1 du^2 du^3 = L_3(x, a_1, a_2, a_3)\, du^1 du^2 du^3 = \sqrt{e_3 \begin{vmatrix} (a_1 a_1) & (a_1 a_2) & (a_1 a_3) \\ (a_2 a_1) & (a_2 a_2) & (a_2 a_3) \\ (a_3 a_1) & (a_3 a_2) & (a_3 a_3) \end{vmatrix}}\, du^1 du^2 du^3, \qquad /18/$$

$$w_4 = \sqrt{e_4\, |g_{ik}|}\, du^1 du^2 du^3 du^4 = L_4(x, a_1, a_2, a_3, a_4)\, du^1 du^2 du^3 du^4 = \sqrt{e_4 \begin{vmatrix} (a_1 a_1) & (a_1 a_2) & (a_1 a_3) & (a_1 a_4) \\ (a_2 a_1) & (a_2 a_2) & (a_2 a_3) & (a_2 a_4) \\ (a_3 a_1) & (a_3 a_2) & (a_3 a_3) & (a_3 a_4) \\ (a_4 a_1) & (a_4 a_2) & (a_4 a_3) & (a_4 a_4) \end{vmatrix}}\, du^1 du^2 du^3 du^4. \qquad /19/$$

Числа e_1, e_2, e_3, e_4 зависят от сигнатуры метрических тензоров $\eta_{\alpha\beta}$ и g_{ik}. Для пространства с метрикой /1/ $e_4 = -1$. Для времениподобных линий[11,16] и двумерных и трехмерных поверхностей /5/, /7/, /9/ в /1/ $e_1 = 1$, $e_2 = -1$, $e_3 = 1$. Для пространственноподобных[11,16] $e_1 = -1$, $e_2 = 1$, $e_3 = -1$.

Времениподобными поверхностями двух и трех измерений мы называем такие, у которых касательное пространство в каждой точке является пространством Пуанкаре - Минковского двух и трех измерений соответственно. Пространственноподобными поверхностями двух и трех измерений называем такие, у которых касательное пространство является евклидовым.

2. ГИПЕРПРИЗМА СОБЫТИЙ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ

Гиперпризма событий четырех частиц есть область определения действия для системы из четырех частиц с четверным, тройными и парными взаимодействиями между ними. Будем обозначать ее Ω.

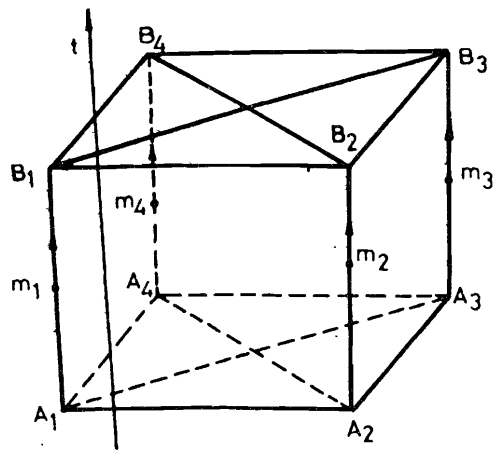
Гиперпризма событий Ω есть совокупность открытой области пространства-времени ω_4 и всех ее времениподобных трехмерных и двумерных граней и ребер между двумя мгновениями времени $t = t_1$ и $t = t_2$. Гиперповерхность $t = \text{const}$ будем называть мгновенным пространством и обозначать $\pi(t)$. Пересечение Ω и $\pi(t)$ обозначим

$$T = \Omega \cap \pi(t). \qquad /19/$$

Четверное взаимодействие частиц передает ω_4. Тройные взаимодействия частиц передают трехмерные боковые грани Ω, совокупность внутренних точек которых обозначим ω_3. Двойные взаимодействия частиц передают двумерные боковые грани Ω, совокупность внутренних точек которых обозначим ω_2. Мировые траектории частиц служат ребрами Ω. Их совокупность обозначим ω_1. Итак, имеем

$$\Omega = \omega_4 \cup \omega_3 \cup \omega_2 \cup \omega_1, \qquad /20/$$

где ω_4, ω_3, ω_2 и ω_1 являются времениподобными многообразиями с общей ориентацией времени.



На рисунке изображена гиперпризма событий Ω между мгновенными пространствами $\pi(t_1)$ и $\pi(t_2)$. Для призмы Ω /на рисунке/ T из /19/ является евклидовым тетраэдром. Тетраэдры

$$T_1 = A_1 A_2 A_3 A_4, \qquad T_2 = B_1 B_2 B_3 B_4 \qquad /22/$$

- нижняя и верхняя по времени грани Ω.

Граница области ω_4 отделяет ее от внешней части пространства-времени. Обозначим ее $\partial\omega_4$. Граница любой области на ориентированном многообразии имеет индуцированную ориентацию [17,18]. Ориентацию $\partial\omega_4$ задает внешняя нормаль к ней. Имеем

$$\partial\omega_4 = -T_2 + T_1 + \omega_3 . \qquad /22/$$

Здесь и далее знак плюс перед слагаемым означает, что оно входит в сумму со своей ориентацией, а минус - с противоположной. Далее имеем /см. рисунок/

$$\omega_3 = \Pi_{132} + \Pi_{234} + \Pi_{314} + \Pi_{412} , \qquad /23/$$

где через Π_{ijk} обозначена призма событий i-й и k-й частиц [10-11]. Напомним, что призма событий - это область трехмерной времениподобной поверхности /9/, ограниченная двумерными гранями и ребрами. Двумерные грани передают парные взаимодействия частиц, а ребрами служат траектории частиц. Призма событий Π_{ijk} ориентирована. Четная перестановка индексов не меняет ориентации Π_{ijk}, нечетная - меняет.

Граница призмы Π_{ijk} равна

$$\partial\Pi_{ijk} = \Lambda_{ij} + \Lambda_{jk} + \Lambda_{ki} - \Delta B_i B_j B_k + \Delta A_i A_j A_k , \qquad /24/$$

где через Λ_{ij} обозначена внутренняя часть ленты событий i-й и j-й точек [1-2], а треугольники $\Delta B_i B_j B_k$ и $\Delta A_i A_j A_k$ являются гранями тетраэдров T_2 и T_1. Лента событий частиц представляет собой область двумерной времениподобной поверхности, передающую парные взаимодействия частиц и ограниченную траекториями частиц. При перестановке индексов меняется ориентация ленты событий. Призмы Π_{ijk} и $\Pi_{ij\ell}$ имеют общей границей ленту Λ_{ij}. Далее /см. рисунок/ имеем

$$\omega_2 = \Lambda_{12} + \Lambda_{23} + \Lambda_{34} + \Lambda_{41} + \Lambda_{24} + \Lambda_{31} . \qquad /25/$$

Граница ленты событий Λ_{ij} равна

$$\partial\Lambda_{ij} = -\Gamma_i + \Gamma_j - (B_i B_j) + (A_i A_j), \qquad /26/$$

где через Γ_i обозначена траектория i-й частицы с массой m_i, а открытые отрезки $(B_i B_j)$ и $(A_i A_j)$ являются ребрами тетраэдров T_2 и T_1. Заметим, что Γ_i в Ω служит общей границей трех лент Λ_{ij}, Λ_{ik} и $\Lambda_{\ell i}$. Для ω_1 имеем /см. рисунок/

$$\omega_1 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 , \qquad /27/$$

где все ребра Γ_i ориентированы в положительном направлении времени. Наконец, границей Γ_i по определению являются точки B_i и A_i, то есть

$$\partial\Gamma_i = -B_i + A_i , \qquad /28/$$

а для $\partial\omega_1$ имеем

$$\partial\omega_1 = -B_1 - B_2 - B_3 - B_4 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 . \qquad /29/$$

Формулы /5/ для траектории Γ_i запишутся в виде

$$x^\alpha = x^\alpha({}_i u^1) . \qquad /30/$$

Формулы /7/ для Λ_{ij} запишутся в виде

$$x^\alpha = x^\alpha({}_{ij}u^1, {}_{ij}u^2). \qquad /31/$$

Формулы /9/ для Π_{ijk} запишутся в виде

$$x^\alpha = x^\alpha({}_{ijk}u^1, {}_{ijk}u^2, {}_{ijk}u^3). \qquad /32/$$

Тот факт, что Γ_i является границей Λ_{ik}, запишется в виде

$${}_{ik}u^1 = {}_{ik}u^1({}_i u^1), \quad {}_{ik}u^2 = {}_{ik}u^2({}_i u^2). \qquad /33/$$

Тот факт, что Λ_{ij} является границей Π_{ijk}, запишется в виде

$${}_{ijk}u^q = {}_{ijk}u^q({}_{ij}u^1, {}_{ij}u^2), \quad q = 1, 2, 3. \qquad /34/$$

Тот факт, что Π_{ijk} является границей ω_4, запишется в виде

$$u^q = u^q({}_{ijk}u^1, {}_{ijk}u^2, {}_{ijk}u^3), \quad q = 1,2,3,4. \qquad /35/$$

Таким образом, все параметры u^q на вложенных в $\mathfrak{M}$ многообразиях получили несколько дополнительных нижних индексов, которые указывают, на какой боковой грани Ω рассматривается параметр, а число нижних индексов указывает на размерность этой грани.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И СВЯЗИ МЕЖДУ НИМИ

Действие для системы из четырех частиц с парными, тройными и четверным взаимодействиями между ними определено на Ω и имеет вид

$$S = m\int\limits_{\omega_1} w_1 + G_2\int\limits_{\omega_2} w_2 + G_3\int\limits_{\omega_3} w_3 + G_4\int\limits_{\omega_4} w_4, \qquad /36/$$

где w_1, w_2, w_3, w_4 даны в /13/ и /16/ - /19/, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 - в /20/, а через m, G_2, G_3, G_4 обозначены постоянные однократного, двукратного /парного/, трехкратного /тройного/, и четырехкратного /четверного/ взаимодействий. По определению постоянная однократного взаимодействия равна массе частицы. Запишем действие /36/ с учетом /23/, /25/ и /27/. Имеем

$$S = \sum_{i=1}^{4} m_i\int\limits_{\Gamma_i} L_1(x,a_1)\,du^1 + \sum_{(ij)}^{C_4^2} G_{ij}\int\limits_{\Lambda_{ij}} L_2(x,a_1,a_2)\,du^1du^2 +$$
$$+\sum_{(ijk)}^{C_4^3} G_{ijk}\int\limits_{\Pi_{ijk}} L_3(x,a_1,a_2,a_3)\,du^1du^2du^3 + G_4\int\limits_{\omega_4} du^1du^2du^3du^4\times$$
$$\times L_4(x,a_1,a_2,a_3,a_4), \qquad /37/$$

где L_1, L_2, L_3, L_4 определены в /16/-/19/. Отметим, что в общем случае постоянная m для каждой траектории Γ_i имеет свое значение m_i, постоянная G_2 для каждой ленты Λ_{ij} имеет свое значение G_{ij}, постоянная G_3 для каждой призмы Π_{ijk} имеет свое значение G_{ijk}.

Обозначим

$$I_p = \int\limits_{\omega_p} L_p(x, a_1,\dots, a_p)\,du^1\dots du^p. \qquad /38/$$

Для вариации δI_p имеем

$$\delta I_p = \int\limits_{\omega_p}\left[\frac{\partial L_p}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + \frac{\partial L_p}{\partial a_i^\alpha}\delta\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right]du^1\dots du^p =$$
$$= \int\limits_{\omega_p}\left\{-[L_p]_\alpha\,\delta x^\alpha + \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a_i^\alpha}\delta x^\alpha\right)\right\}du^1\dots du^p, \qquad /39/$$

где величину

$$[L_p]_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial L_p}{\partial a_i^\alpha} - \frac{\partial L_p}{\partial x^\alpha}, \quad p\in\{1,2,3,4\}, \qquad /40/$$

будем называть ковектором Эйлера. Нетрудно видеть, что при замене /2/ он преобразуется по ковекторному закону /3/.

Далее по теореме Стокса [17-19] имеем

$$\int\limits_{\omega_p}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L_p}{\partial a_i^\alpha}\delta x^\alpha\right)du^1\dots du^p =$$
$$= \int\limits_{\partial\omega_p}\delta x^\alpha\begin{vmatrix}\dfrac{\partial L_p}{\partial a_1^\alpha} & \dots & \dfrac{\partial L_p}{\partial a_p^\alpha}\\ \dfrac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial u^p}{\partial v^1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial u^1}{\partial v^{p-1}} & \dots & \dfrac{\partial u^p}{\partial v^{p-1}}\end{vmatrix} dv^1\dots dv^{p-1}, \qquad /41/$$

где через $u^1,\dots,u^p$ обозначены независимые параметры на ω_p, а через $v^1,\dots,v^{p-1}$ - независимые параметры на $(p-1)$-мерной границе $\partial\omega_p$. Граница $\partial\omega_p$ здесь запишется в виде

$$u^i = u^i(v^1,\dots,v^{p-1}), \qquad i\in\{1,\dots,p\}. \qquad /42/$$

Через ${}_p\mathfrak{F}_\alpha$ обозначим величину

$${}_p\mathfrak{F}_\alpha = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial L_p}{\partial a_1^\alpha} & \dots & \dfrac{\partial L_p}{\partial a_p^\alpha}\\ \dfrac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial u^p}{\partial v^1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial u^1}{\partial v^{p-1}} & \dots & \dfrac{\partial u^p}{\partial v^{p-1}}\end{vmatrix}, \qquad /43/$$

которую будем называть ковектором сил давления. Действительно, при замене /2/ величина ${}_p\mathfrak{F}_\alpha$ преобразуется по ковекторному закону /3/.

Уравнения движения системы из четырех частиц с четверным взаимодействием между ними получаются из условия обращения в нуль вариации действия на Ω. В краткой форме уравнения движения запишутся в виде

$$1/\ G_4[L_4]_\alpha = 0, \qquad 2/\ -G_3[L_3]_\alpha = G_4\,{}_4\mathfrak{F}_\alpha,$$
$$3/\ -G_2[L_2]_\alpha = G_3\,{}_3\mathfrak{F}_\alpha, \qquad 4/\ -m[L_1]_\alpha = G_2\,{}_2\mathfrak{F}_\alpha. \qquad /44/$$

Эти уравнения справедливы в n-мерном пространстве-времени /$n \geq 4$/. Уравнение 1/ является уравнением минимальной поверхности, а уравнения 2/ - 4/ являются граничными условиями. Таким образом, математическим аппаратом для описания системы четырех частиц с четверным взаимодействием между ними является краевая задача для минимальной поверхности четырех измерений в n-мерном ареальном пространстве.

В пространстве-времени четырех измерений /$n = 4$/ уравнения 1/ обращаются в тождества. То есть с внутерннней точки зрения само пространство-время является минимальным. Уравнениями движения служат граничные условия 2/, 3/, 4/.

Уравнения движения 1/ - 4/ являются зависимыми. Они связаны соотношениями

$$
\begin{aligned}
&1/\ G_4\,[L_4]_\alpha\, a^\alpha_i = 0,\quad i \in \{1,2,3,4\},\quad \alpha \in \{1,\dots,n\};\\
&2/\ G_3\,[L_3]_\alpha\, a^\alpha_j = 0,\quad j \in \{1,2,3\};\\
&3/\ G_2\,[L_2]_\alpha\, a^\alpha_k = 0,\quad k \in \{1,2\};\qquad 4)\ m[L_1]_\alpha\, a^\alpha_1 = 0,
\end{aligned}
\tag{/45/}
$$

которые мы здесь приведем без доказательства и которые для ${}_p\mathcal{F}^\alpha$ из /43/ и L_4, L_3, L_2, L_1 из /16/ - /19/ можно проверить прямыми вычислениями.

С учетом формул /23/ - /35/ уравнения /44/ примут вид

1) $[L_4]_\alpha = 0$,

2) $$G_{ijk}[{}_{ijk}L_3]_\alpha = -G_4 \begin{vmatrix} \frac{\partial L_4}{\partial a^\alpha_1} & \frac{\partial L_4}{\partial a^\alpha_2} & \frac{\partial L_4}{\partial a^\alpha_3} & \frac{\partial L_4}{\partial a^\alpha_4} \\ \frac{\partial u^1}{\partial_{ijk} u^1} & \frac{\partial u^2}{\partial_{ijk} u^1} & \frac{\partial u^3}{\partial_{ijk} u^1} & \frac{\partial u^4}{\partial_{ijk} u^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial_{ijk} u^2} & \frac{\partial u^2}{\partial_{ijk} u^2} & \frac{\partial u^3}{\partial_{ijk} u^2} & \frac{\partial u^4}{\partial_{ijk} u^2} \\ \frac{\partial u^1}{\partial_{ijk} u^3} & \frac{\partial u^2}{\partial_{ijk} u^3} & \frac{\partial u^3}{\partial_{ijk} u^3} & \frac{\partial u^4}{\partial_{ijk} u^3} \end{vmatrix},$$

$(ijk) \in \{(132),(234),(314),(412)\}$

3) $G_{ij}[{}_{ij}L_2]_\alpha =$

$(ij) \in \{(12),(23),(34),(41),(24),(31)\}$,

$k \neq \ell \neq i \neq j$

$$= -G_{ijk} \begin{vmatrix} \frac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_1} & \frac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_2} & \frac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_3} \\ \frac{\partial_{ijk} u^1}{\partial_{ij} u^1} & \frac{\partial_{ijk} u^2}{\partial_{ij} u^1} & \frac{\partial_{ijk} u^3}{\partial_{ij} u^1} \\ \frac{\partial_{ijk} u^1}{\partial_{ij} u^2} & \frac{\partial_{ijk} u^2}{\partial_{ij} u^2} & \frac{\partial_{ijk} u^3}{\partial_{ij} u^2} \end{vmatrix} + G_{ji\ell} \begin{vmatrix} \frac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_1} & \frac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_2} & \frac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_3} \\ \frac{\partial_{ji\ell} u^1}{\partial_{ij} u^1} & \frac{\partial_{ji\ell} u^2}{\partial_{ij} u^1} & \frac{\partial_{ji\ell} u^3}{\partial_{ij} u^1} \\ \frac{\partial_{ji\ell} u^1}{\partial_{ij} u^2} & \frac{\partial_{ji\ell} u^2}{\partial_{ij} u^2} & \frac{\partial_{ji\ell} u^3}{\partial_{ij} u^2} \end{vmatrix}$$

$$4)\ m_i[{}_iL_1]_\alpha = G_{ik} \begin{vmatrix} \frac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_1} & \frac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_2} \\ \frac{\partial_{ik} u^1}{\partial_i u^1} & \frac{\partial_{ik} u^2}{\partial_i u^1} \end{vmatrix} - G_{\ell i} \begin{vmatrix} \frac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_1} & \frac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_2} \\ \frac{\partial_{\ell i} u^1}{\partial_i u^1} & \frac{\partial_{\ell i} u^2}{\partial_i u^1} \end{vmatrix} + \tag{/46/}$$

$i \in \{1,2,3,4\}$.

$i \neq j \neq k \neq \ell$

$$+ G_{ij} \begin{vmatrix} \frac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_1} & \frac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_2} \\ \frac{\partial_{ij} u^1}{\partial_i u^1} & \frac{\partial_{ij} u^2}{\partial_i u^1} \end{vmatrix}.$$

Еще раз подчеркнем, что в четырехмерном мире $[L_4] \equiv 0$.

4. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Действие системы из четырех частиц с четверным взаимодействием между ними /36/ или /37/ инвариантно относительно группы Лоренца - Пуанкаре. Согласно первой теореме Нетер исследуемая система четырех частиц как целое имеет четыревектор энергии-импульса и бивектор момента, которые одинаковы для всех сечений $t = \mathrm{const}$ гиперпризмы событий Ω /см. рисунок/.

Действительно, уравнения движения /44/, /46/ получены из условия $\delta S = 0$ на Ω. Поэтому если уравнения движения выполняются, то вариация действия равна

$$\delta S = \delta x^\alpha m_1 \mathcal{F}_\alpha \Big|_{\partial\omega_1} + G_2 \int_{\partial\omega_4 - \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_2 - \Gamma_4} \delta x^\alpha\, {}_2\mathcal{F}_\alpha\, du^1 + \tag{/47/}$$

$$+ G_3 \iint\limits_{\partial\omega_3} \delta x^{\alpha}\,{}_3\mathcal{F}_{\alpha}\, du^1 du^2 + G_4 \iiint\limits_{\partial\omega_4 - \omega_3} \delta x^{\alpha}\,{}_4\mathcal{F}_{\alpha}\, du^1 du^2 du^3,$$

где ${}_p\mathcal{F}_{\alpha}$ определены в /42/, /43/, ω_p и $\partial\omega_p$ в /22/ - /29/, а δx^{α} - произвольное смещение координат.

Если теперь δx^{α} в /47/ будем брать из преобразований Пуанкаре вида

$$\tilde{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + \mathbf{a}^{\alpha}, \quad \delta x^{\alpha} = \mathbf{a}^{\alpha}, \qquad /48/$$

где a^{α} - произвольный постоянный вектор, то инвариантность действия относительно группы Лоренца - Пуанкаре будет означать, что

$$\mathcal{P}_{\alpha}(T_1) = \sum_{i=1}^{4} {}_i\mathbf{p}_{\alpha}(A_i) + \sum_{(ij)}^{C_4^2} G_{ij} \int\limits_{(A_i A_j)} {}_2\mathcal{F}_{\alpha}\, du^1 +$$

$$+ \sum_{(ijk)}^{C_4^3} G_{ijk} \iint\limits_{\Lambda A_i A_j A_k} {}_3\mathcal{F}_{\alpha}\, du^1 du^2 + G_4 \iiint\limits_{A_1 A_2 A_3 A_4} {}_4\mathcal{F}_{\alpha}\, du^1 du^2 du^3 =$$

$$= \mathcal{P}_{\alpha}(T_2) \sum_{i=1}^{4} {}_i\mathbf{p}_{\alpha}(B_i) + \sum_{(ij)}^{C_4^2} G_{ij} \int\limits_{(B_i B_j)} {}_2\mathcal{F}_{\alpha}\, du^1 + \qquad /49/$$

$$+ \sum_{(ijk)}^{C_4^3} G_{ijk} \iint\limits_{\Lambda B_i B_j B_k} {}_3\mathcal{F}_{\alpha}\, du^1 du^2 + G_4 \iiint\limits_{B_1 B_2 B_3 B_4} {}_4\mathcal{F}_{\alpha}\, du^1 du^2 du^3,$$

то есть, что ковектор $\mathcal{P}_{\alpha}(T)$ не зависит от выбора мгновенного сечения T призмы Ω. Здесь

$${}_i\mathbf{p}_{\alpha} = m_i\, {}_1\mathcal{F}_{\alpha} = m_i \frac{\partial x^{\beta}}{\partial_i u^1} \eta_{\alpha\beta} \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial_i u^1} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial_i u^1}\right)^{-1/2}.$$

Вектор

$$\mathcal{P}_{\alpha}\, \eta^{\alpha\beta} = \mathcal{P}^{\beta} \qquad /50/$$

будем называть вектором энергии-импульса системы из четырех частиц с четверным, тройными и парными взаимодействиями между ними. Величину

$$M^2 = \eta_{\alpha\beta}\, \mathcal{P}^{\alpha} \mathcal{P}^{\beta} \qquad /51/$$

будем называть массой составной частицы.

Если δx^{α} в /47/ будем брать из преобразований Лоренца вида

$$\tilde{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + \theta^{\alpha}_{\mu} x^{\mu}, \quad \delta x^{\alpha} = \theta^{\alpha}_{\mu} x^{\mu}, \qquad /52/$$

где произвольный бивектор $\theta^{\alpha\beta} = -\theta^{\beta\alpha}$, $\theta^{\alpha\beta} = \theta^{\alpha}_{\mu}\eta^{\mu\beta}$ не зависит от $\{x^{\alpha}\}$, то из инвариантности действия относительно группы Лоренца - Пуанкаре следует закон сохранения бивектора момента $\mathfrak{M}^{\alpha\beta}(T)$. Для $\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$ имеем

$$\mathfrak{M}^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{4} [x^{\alpha}\, {}_i p^{\beta}](A_i) + \sum_{(ij)}^{C_4^2} G_{ij} \int\limits_{(A_i A_j)} [x^{\alpha}\, {}_2\mathcal{F}^{\beta}]\, du^1 +$$

$$+ \sum_{(ijk)}^{C_4^3} G_{ijk} \iint\limits_{\Delta A_i A_j A_k} [x^{\alpha}_3 \mathcal{F}^{\beta}]\, du^1 du^2 + G_4 \iiint\limits_{A_1 A_2 A_3 A_4} [x^{\alpha}\, {}_4\mathcal{F}^{\beta}]\, du^1 du^2 du^3, \qquad /53/$$

где ${}_i p^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}\, {}_i p_{\beta}$ есть импульс частицы с массой m_i, $[x^{\alpha}\, {}_i p^{\beta}] \equiv$ $\equiv {}_i M^{\alpha\beta} = x^{\alpha}\, {}_i p^{\beta} - x^{\beta}\, {}_i \mathbf{p}^{\alpha}$ есть момент импульса этой же частицы, ${}_p\mathcal{F}^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}\, {}_p\mathcal{F}_{\beta}$, $p = 2,3,4$.

5. ИЕРАРХИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В четырехмерном пространстве-времени не существует пятерного /пятикратного/ взаимодействия частиц. Поэтому действие /36/ или /37/ имеет достаточную общность, чтобы построить ареальные модели взаимодействия любого числа релятивистских частиц в четырехмерном пространстве-времени с любыми допустимыми в этой модели взаимодействиями. Так, например, действие для пяти частиц с четверными, тройными и парными взаимодействиями между ними в указанной модели примет вид

$$S = \sum_{i=1}^{5} m_i \int\limits_{\Gamma_i} L_1\, du^1 + \sum_{(ij)}^{C_5^2} G_{ij} \iint\limits_{\Lambda_{ij}} L_2\, du^1 du^2 +$$

$$+ \sum_{(ijk)}^{C_5^3} G_{ijk} \iiint\limits_{\Pi_{ijk}} L_3\, du^1 du^2 du^3 + \sum_{(ijk\ell)}^{C_5^4} G_{ijk\ell} \iiiint\limits_{\omega_{ijk\ell}} L_4\, du^1 du^2 du^3 du^4. \qquad /54/$$

Из условия $\delta S = 0$ на гиперпризме событий для пяти точек получатся уравнения движения такого сложного ареального объекта, а из условия $\delta S = 0$ на сумме верхней и нижней граней гиперпризмы событий при преобразованиях группы Пуанкаре - Лоренца /48/, /52/ получатся законы сохранения вектора энергии-импульса и бивектора момента указанной системы из пяти частиц.

С другой стороны, из действия /36/, обнуляя последовательно сверху вниз постоянные взаимодействия, т.е. положив 1/ $G_4 = 0$, 2/ $G_4 = G_3 = 0$, 3/ $G_4 = G_3 = G_2 = 0$, получим действия для систем из четырех частиц 1/ с тройными и парными взаимодействиями между ними 2/ с парными взаимодействиями 3/ для четырех свободных частиц.

Из действия /37/ при условии

$$G_4 = G_{124} = G_{134} = G_{234} = G_{14} = G_{24} = G_{34} = m_4 = 0, \qquad /55/$$

получается ранее исследованная ареальная модель [10,11] трех частиц с тройными и парными взаимодействиями между ними.

Из действия /37/ при условиях /55/ и условиях

$$G_{123} = G_{13} = G_{23} = m_3 = 0, \qquad /56/$$

следует рассмотренная в работах [1-9] релятивистская задача двух тел с ареальным взаимодействием.

Наконец, если к условиям /55/ и /56/ добавить условия

$$G_{12} = m_2 = 0,$$

то из /37/ получим известное действие для одной свободной частицы.

Теперь рассмотрим восходящую последовательность обращения в нуль постоянных взаимодействия. Если в /37/ положить

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0. \qquad G_{ij} = G_2, \qquad /57/$$

то получим ареальные модели пространственно-ограниченных объектов, в которые изначально не заложено понятие массы. Будем называть их ареальными "пузырями" по аналогии с дубненскими, или боголюбовскими, мешками [19].

Если положить

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_{ijk} = G_3, \qquad /58/$$

то получим отличные от /56/ пузыри. Уравнения движения, сохраняющиеся величины и масса пузырей получаются из формул /46/, /49/, /50/, /53/ при условиях /57/ и /58/.

Заметим, что двумерные пузыри или безмассовые мембраны можно рассмотреть уже на основе ареальной модели трех тел, развитой в работах [10,11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. - ТМФ, 1980, т.42, №1, с.59-70.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. - ТМФ, 1980, т.43, №3, с.356-366.
3. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-80-76, Дубна, 1980.
4. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-80-419, Дубна, 1980; Известия ВУЗов, Физика, №7, 1981, с.91-93.
5. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-82-157, Дубна, 1982; Известия ВУЗов, Физика, №7, 1982.
6. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-82-222, Дубна, 1982; ДАН СССР, 1983, т.265, №4, с.852-856.
7. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-83-52, Дубна, 1983; Известия ВУЗов, Физика, №12, 1983, с.46-51.
8. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-83-231, Дубна, 1983. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. №15, М.: Энергоатомиздат, 1985, с.141-149.
9. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-85-183, Дубна, 1985. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. №17, - М.: Энергоатомиздат, 1986.
10. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-84-167, Дубна, 1984. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. №16, - М.: Энергоатомиздат, 1985, с.189-196.
11. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-86-636, Дубна, 1986.
12. Вагнер В.В. - Матем.сб., 1946, т.19 /61/, с.341-404.
13. Близникас В.И. - Итоги науки и техники. Алгебра, геометрия, топология, 1967. М.: ВИНИТИ, 1969, с.73-126.
14. Кабанов Н.И. - Итоги науки и техники. Алгебра, геометрия, топология. 1968, М.: ВИНИТИ, 1970, с.1-65.
15. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ГИИЛ, 1948.
16. Берке У. Пространство-время, геометрия, космология. - М.: Мир, 1985.
17. Зейферт Г., Трельфалль Н. Топология. М.-Л.: ГОНТИ, 1938.
18. Уинти Х. Геометрическая теория интегрирования. М.:ИЛ, 1960.
19. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
20. Боголюбов П.Н. - ЭЧАЯ, 1972, т.3, №1, с.144-174.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1987 года.