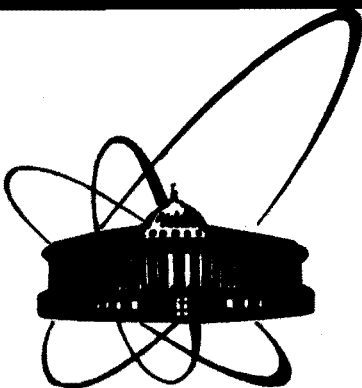


87-386



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

Л 534

P2-87-386

Ю.Лёффельхольц

**ЕВКЛИДОВА МЕРА
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

Еще в 1927 году Иордан и Паули, применяя известный метод квантования механической системы независимых гармонических осцилляторов к электромагнитному полю, нашли инвариантные коммутационные соотношения ^{/1/}

$$[F_{ij}(x), F_{kl}(y)] = -i(g_{ik} \partial_j \partial_\ell - \dots) D(x-y), \quad (1.1)$$

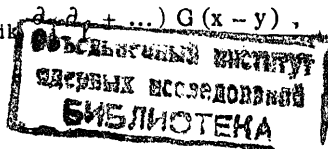
где $i, j, k, \ell = 0, 1, 2, 3$ и $x, y \in M^4$. Здесь g_{ij} — метрика в пространстве-времени Минковского M^4 . Сигнатура такая, что $g_{00} = -1$. Скорость света в вакууме c и постоянная Планка \hbar равны единице. Поскольку выражение (1.1) содержит оператор проектирования, то здесь возникает задача определения фотонного пропагатора, и пока никому не удалось ее решить полностью. Причиной трудности является тот факт, что $F_{ij}(x)$ — координаты на фазовом пространстве Ω , а истинное электромагнитное поле описывается векторным потенциалом $A_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$. По иронии судьбы, однако, из всех рассматриваемых полей это поле наиболее трудное для квантования ^{/2/}.

Действительно, если $A_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$ — локальные поля, то они должны быть определены в пространстве состояний с индефинитной матрицей, и невозможно представить тождества

$$F_{ij}(x) = \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad (1.2)$$

в виде операторного уравнения в "физическом" подпространстве \mathcal{H} ^{/3/}. Здесь оказалось необходимым воспользоваться принципом калибровочной инвариантности на более фундаментальном уровне. Обобщая метод Дирака квантования механической системы со связями на случай полей Янга-Миллса, Фаддеев и Попов нашли правильное определение функционального интеграла для калибровочных полей ^{/4/}. Тем не менее, для абелевой электродинамики в отсутствие источников должна существовать так называемая максвелловская формулировка ^{/5/}, выраженная при помощи калибровочно-инвариантных переменных $F_{ij}(x)$. В настоящей работе мы даем математически строгое решение этой задачи. Нашей исходной точкой будет служить определение гауссовой меры μ на Ω с корреляционной матрицей

$$\langle F_{ij}(x) F_{kl}(y) \rangle = (e_{ik} \partial_j \partial_\ell + \dots) G(x-y), \quad (1.3)$$



где G — функция Грина для оператора Бельтрами-Лапласа, $\Delta = -e_{ij} \partial^i \partial^j$ и e_{ij} — метрика в \mathbb{R}^4 . Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство. Основной результат состоит в следующем. Для любого $\epsilon > 0$, в силу неравенства Чебышева,

$$\mu \{ \omega \in \Omega : | \epsilon_{ijkl} \partial^j F_{kl}(x) | > \epsilon \} = 0, \quad (1.4)$$

т.е. мера μ имеет носитель на подмногообразии Ω^0 . Обозначим через \mathcal{J} соответствующий евклидов инвариантный идеал в Σ . Выбирая направление времени $(1, 0)$ в \mathbb{R}^4 , найдем изоморфизм

$$\Sigma / \mathcal{J} \approx \sigma(\mathcal{Q} \cup \mathcal{B}^0), \quad (1.5)$$

где $\mathcal{Q}, \mathcal{B}^0$ — независимые σ -подалгебры, порождаемые случайными величинами $\rho = \partial^j E_j$ и $B_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. Здесь магнитное поле, удовлетворяющее $\epsilon_{0ijk} \partial^k B_{ij}(t, x) = 0$, является марковским процессом $t \in \mathcal{R} \rightarrow B_{ij}(t, x)$ на (Ω, Σ, μ) . Таким образом получаем явный вид действия, в частности, евклидов фотонный пропагатор

$$\mathcal{P} = (1 - \frac{\partial^2}{\beta^2 \partial t^2})^{-1}, \quad (1.6)$$

где $\beta = \beta(x)$ — оператор поляризации. Заметим, что в физических единицах $0 \leq \mathcal{P} \leq hc [L^{-4}]$. Исследуя формулу Фейнмана — Каца, выводим закон Фарадея и канонические коммутационные соотношения, т.е. (1.1). К сожалению, здесь нет времени для обсуждения топологических свойств полной функции Грина (см. /6/). Вопрос о том, каким образом мера μ определяет функциональный интеграл для $A_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, рассмотрен в отдельной работе /7/.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Пусть $x^i, i = 0, 1, 2, 3$ — декартовы координаты точки $x = x^i e_i$ и e_{ij} — евклидова метрика относительно базиса $\{e_i : i = 0, 1, 2, 3\}$. Выберем направление "времени" $e_0 = (1, 0)$. Будем обозначать $x = (t, x)$, где $x \in \mathbb{R}^3$. Пусть \mathcal{S} — линейное пространство гладких вещественнозначных 2-форм

$$f = f_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j, \quad f_{ij} \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}^4). \quad (2.1)$$

Пусть $\theta = dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ и $*$ — звездочный оператор Ходжа, заданный так, что выполняется тождество $dx^i \wedge *(dx^j) = e^{ij} \theta$. Определим скалярное произведение в \mathcal{S} выражением

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^4} u \wedge *v = \sum_{i < j} \int_{\mathbb{R}^4} u^{ij} v_{ij} \theta. \quad (2.2)$$

Оно расширяется на все гильбертово пространство элементов $f, f_{ij} \in L^2_r(\mathbb{R}^4)$. Пусть K — подпространство элементов z , для которых имеет место $dz = 0$, где $d = dt \partial_0 + d$ — оператор внешнего дифференцирования. На \mathbb{R}^4 нет гармонических 2-форм z , таких, что $(z, z) < \infty$. Вследствие этого K — замкнутое подпространство элементов вида $z = d\Theta$.

Лемма. Пусть $\Delta = d\delta + \delta d \geq 0$, где $\delta = *^{-1} d *$, и $G = \Delta^{-1}$ — функция Грина. Тогда $P^0 = d\delta D$ — оператор ортогонального проектирования в пространстве $\ominus L^2_r(\mathbb{R}^4)$ на подпространство K . Его ядро имеет вид

$$P^0_{ijk\ell}(x, y) = (-e_{ik} \partial_j \partial_\ell + \dots) G(x - y). \quad (2.3)$$

Доказательство: Пусть $f = z + \eta$, где $z = d\Theta$ — разложение Ходжа. Существует единственная 1-форма $\Theta = G(\delta z)$, для которой выполняется $\delta \Theta = 0$. Используя $dd = 0$, получаем $z = dG(\delta f)$ (см. /8/). Выберем счетный базис $\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ в \mathcal{S} , предположим, что $f(0) = 0, f(n) = d\Theta(n)$, если $n \geq 1$ и $f(n) = *d\Theta(-n)$, если $n \leq -1$. Тогда 2-форма электромагнитного поля

$$F = dt \wedge E_j dx^j + B, \quad x = (t, x) \in \mathbb{R}^4 \quad (2.4)$$

определяет координаты X^m, Y^n в пространстве $\Omega = \mathcal{S}'$ вещественных линейных функционалов на \mathcal{S} . Будем писать $F = (X(\omega), Y(\omega)), \omega \in \Omega$. В явном виде

$$X^m = (\Theta(m), \rho dt + (\partial^j B_{ij} - \dot{E}_i) dx^i), \quad \rho = \partial^j E_j, \quad (2.5)$$

$$Y^n = \epsilon_{0ijk} (\Theta(n), (\partial^k B_{ij} dt + (\partial_i E_j - \partial_j E_i + \dot{B}_{ij}))), \quad (2.6)$$

где точка обозначает частную производную $\partial/\partial t$. Пусть $\Sigma = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma(n))$

где σ — алгебра, порождаемая соответствующими цилиндрическими множествами в Ω . Для простоты можно предположить, что $f(n)$ ортонормированы, т.е. $(\Theta(m), d\delta \Theta(n)) = I^{mn}, m, n \geq 1$, где I^{mn} — символ Кронекера. Рассмотрим обобщенный гауссов процесс $f \in \mathcal{S} \rightarrow (f, F)$ на Ω со средним значением "0", и корреляционной функцией (\cdot, \cdot, P^0) . Координаты X^m, Y^n — семейство случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) , где μ — гауссова мера. Имеем $\langle X^m X^n \rangle = I^{mn}, \langle Y^m Y^n \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle X^m Y^n \rangle = 0$ для всех $m, n \geq 1$. Чтобы ответить на вопрос относительно вероятности данной конфигурации евклидова электромагнитного поля $F_{ij}(x), x \in \mathbb{R}^4$, мы должны вычислить только меру $\mu(M)$ соответствующего множества $M \in \Sigma$. Если M — цилиндрическое множество в σ -подалгебре

$$\Gamma = \sigma \left(\bigcup_{m \geq 1} \Sigma(m) \right), \quad (2.7)$$

порождаемое всеми X^m , то вычислить меру просто, поскольку $\Sigma(m)$ стохастически независимы друг от друга. Квазимеры $\mu_{\#} = \mu / \bigcup_{m=1}^{\#} \Sigma(m)$ факторизуются. Для выполнения условия локальности необходимо знать меру на всех $\Sigma(m)$. Существует единственное σ -аддитивное расширение μ на Σ . Соответствующая формальная плотность имеет вид

$$d\mu = e^{-X^2/2} dX \cdot I(Y) dY, \quad (2.8)$$

где I — функция Дирака. В электродинамике традиционно используют координаты E, B или векторный потенциал $A_i(t, x)$, $i = 0, 1, 2, 3$. Естественно поэтому возникает задача переписать выражение для плотности меры (2,8) в этих координатах. Это и будет целью настоящей работы.

3. ИЗОМОРФИЗМ ГАУССОВЫХ МЕР

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^2$, $(E(\omega), B(\omega))$ — координаты точки $\omega \in \Omega$, и Σ — σ -алгебра борелевских множеств. Если $M \in \Sigma$ — ограниченное множество, то мера Лебега $\lambda(M)$ существует. Умножая $d\lambda(E, B)$ на гауссово распределение, получаем вероятностную меру на

$$d\nu(E, B) = e^{-\frac{1}{2}(E^2 + B^2)} \frac{dE \cdot dB}{2\pi}, \quad (E, B) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

Рассмотрим

$$P^0(e, b) = \frac{\alpha e + \beta b}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha, \beta), \quad \beta > 0 \quad (3.2)$$

оператор проектирования в \mathbb{R}^2 на вещественное подпространство K . P^0 диагонален в базисе $\{\gamma(\alpha, \beta), \gamma(\beta, -\alpha)\}$ в \mathbb{R}^2 , где $\gamma = (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}$. Пусть $c = \beta^{-1} \alpha$. Определим гауссов двумерный случайный процесс

$$f = (e, b) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow F = eE + bB \quad (3.3)$$

со средним значением $\langle F \rangle = 0$ и корреляционной матрицей P^0 . Для переменных $X = \gamma(\alpha E + \beta B)$, $Y = \gamma(\alpha B - \beta E)$, которые тоже являются гауссовыми случайными величинами на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) , найдем $\langle X^2 \rangle = 1$, $\langle Y^2 \rangle = 0$ и $\langle XY \rangle = 0$.

Лемма. Меры μ и ν взаимно сингулярны. Производная Радона-Никодима $d\mu/d\nu = (2\pi)^{-1/2} I(Y)$, где I — обобщенная функция Дирака. В явном виде

$$d\mu(E, B) = I(E - cB) dE \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}(1+c^2)B^2} dB}{(2\pi/(1+c^2))^{1/2}}. \quad (3.4)$$

Доказательство: Пусть $F(s) = sX + (1-s)Y$, $s \in (0, 1)$. При помощи неравенства Чебышева

$$\mu\{\omega \in \Omega : |F(s)| \geq \epsilon\} \leq s^2 \cdot \epsilon^{-2}, \quad \epsilon > 0, \quad (3.5)$$

в пределе $s \rightarrow 0$ получаем замечательный результат: мера $\mu(M)$ цилиндрических множеств

$$M = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in N\}, \quad N \cap (-\epsilon, \epsilon) = \emptyset \quad (3.6)$$

для любого $\epsilon > 0$ равна нулю. Такие множества порождают идеал \mathcal{J} в σ -алгебре Σ . Следовательно, меру μ можно "перенести" /9/ на фактор-алгебру Σ/\mathcal{J} . Как это делается? Мера μ имеет носитель на подмногообразии

$$\Omega^0 = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = 0\}. \quad (3.7)$$

Сужение

$$d\mu^0(X) = e^{-X^2/2} \frac{dX}{(2\pi)^{1/2}}, \quad X \in \Omega^0, \quad (3.8)$$

корректно определяет меру μ на соответствующей σ -подалгебре $\Gamma \subseteq \Sigma$. Используя соотношение $\sigma(\mathcal{J} \cup \Gamma) = \Sigma$, при условии $\mu(\mathcal{J}) = 0$, найдем единственное расширение $d\mu = d\mu^0(X) \cdot I(Y) dY$ на Σ . Замена переменных $(X, Y) \rightarrow (E, B)$ дает (3.4). После интегрирования по переменной E остается сужение μ/\mathcal{B} меры μ на σ -подалгебру \mathcal{B} , порождаемую случайной величиной B . Пусть π -оператор ортогонального проектирования в $\Omega = \mathbb{R}^2$ на линейное подмногообразие $\{\omega \in \Omega : E(\omega) = 0\}$. Тогда преобразование

$$M \in \Sigma \rightarrow M^c = \mathbb{R} \times \Pi(M \cap \Omega^0) \quad (3.9)$$

является изоморфизмом вероятностных пространств (Ω, Σ, μ) и $(\Pi, \Omega, \mathcal{B}, \mu/\mathcal{B})$. Геометрия конструкции M^c представлена на рис. 1. Если $M = (E_1, E_2) \times (B_1, B_2)$ — цилиндрическое множество в Σ , то легко видеть, что $M^c = \mathbb{R} \times ((c^{-1}E_1, c^{-2}E_2) \cap (B_1, B_2))$. Как построить меру μ/\mathcal{B} ?

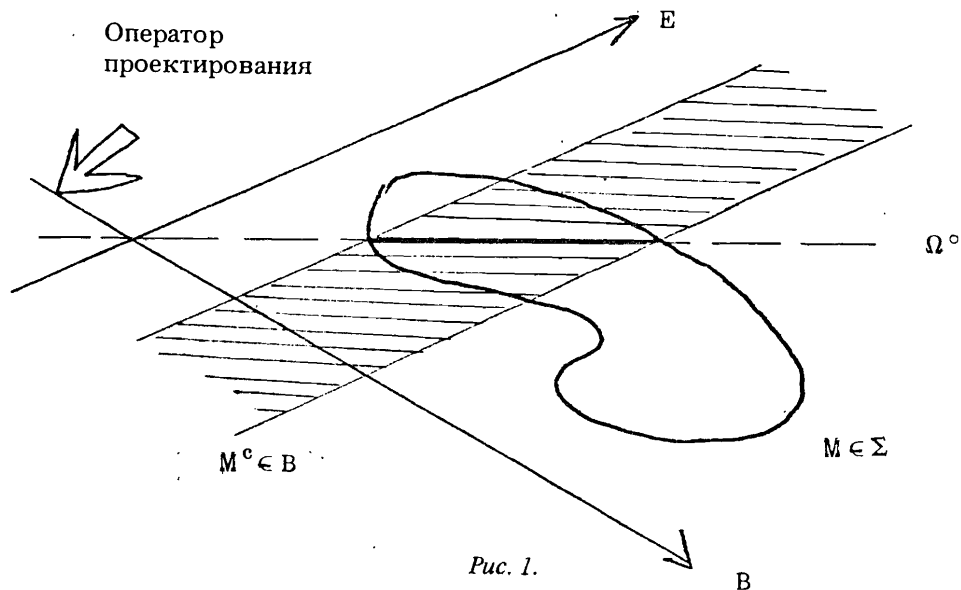


Рис. 1.

Пусть \mathcal{L} — линейное подпространство в \mathbb{R}^2 элементов вида $f = (0, b)$, с индуцированным скалярным произведением (\cdot, P^0) . \mathcal{L} — одномерное вещественное гильбертово пространство, изоморфное фактор-пространству $\mathbb{R}^2 / \ker P^0$. Из условия $P^0 P f = P^0 f$, для всех $f \in \mathbb{R}^2$, найдем проектор $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}$

$$P(e, b) = (0, c \cdot e + b), \quad c = \beta^{-1} \cdot a. \quad (3.10)$$

Подчеркнем, что P однозначно определен на K . Получаем $P(a, \beta) = (0, (1 + C^2)\beta)$. Окончательно $\langle B^2 \rangle = \|P^0 P(0, 1)\|^2$, что согласуется с выражением (3.4).

4. ЕВКЛИДОВО ДЕЙСТВИЕ

Вернемся к евклидовой модели $E_j(x)$, $x = (t, x) \in \mathbb{R}^4$. Чтобы применить описанную выше конструкцию, мы должны подробно рассмотреть структуру электромагнитного поля. Для любого элемента $f \in \mathcal{S}$ найдем

$$f = dt \wedge (e_j - \partial_j \phi) dx^j + b, \quad (4.1)$$

где ϕ, e и $b = b_{ij}(t, x) dx^i \wedge dx^j$ — формы степени 0, 1, 2. Если $\partial^j e_j(t, x) = 0$, то разложение однозначно. Заметим, что форма $dt \wedge d\phi$ точна, т.е.

$$(dt \wedge d\phi, P^0(dt \wedge e + b)) = 0. \quad (4.2)$$

Вследствие этого гауссова мера μ факторизуется на $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}^0)$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B}^0$ обозначают σ -подалгебры в Σ , порождаемые случайными величинами $(d(\phi dt), F)$ и $(b_{ij} dx^i \wedge dx^j, F)$, где $db = 0$. Это означает, что нет корреляции между появлением электрического заряда и магнитного тока. Физический смысл остальных переменных легко видеть из соотношения (2.6). Пусть $h_{(t_1, t_2)}$ — характеристическая функция временного слоя $(t_1, t_2) \times \mathbb{R}^3$ в \mathbb{R}^4 и $u_{ij} \in \mathcal{S}_T(\mathbb{R}^3)$. Тогда $(\ast \Theta, dF) = 0$, где $\Theta = \epsilon_{0ijk} h_{(t_1, t_2)}(t) u_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$, запишется

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x u^{ij}(x) \left(\int_{t_1}^{t_2} dt (\partial_i E_j - \partial_j E_i) + \sum_{t \in \partial(t_1, t_2)} B_{ij}(t, x) \right) = 0. \quad (4.3)$$

Действительно, если $|\ell(t)| \leq 1$, где ℓ — гладкая функция, равная нулю вне интервала (t_1, t_2) , то оба слагаемые $(\ast d\Theta, F)$ являются гауссовыми случайными величинами на (Ω, Σ, μ) . Используя оценку

$$\langle (\ell dt \wedge \delta u, F)^2 \rangle = \|P^0(\ell dt \wedge a)\|^2 < \epsilon \cdot \|a\|^2, \quad \epsilon = (t_2 - t_1) > 0, \quad (4.4)$$

где $a = \delta u$, без труда перейдем к пределу $\ell \rightarrow h_{(t_1, t_2)}$. Закон Фарадея в нашей формулировке модели обусловлен существованием идеала $\mathcal{J} = \sigma(\bigcup_{k=1,2,3} \mathcal{J}_k)$ в Σ . Подобное слагаемое \mathcal{J}_0 евклидово-инвариантного идеала $\mathcal{J} = \sigma(\mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J})$ дает $\epsilon_{0ijk} \partial^k B_{ij}(t, x) = 0$. \mathcal{J} порождается множествами $M^n = \{\omega \in \Omega: Y \in N, n=1, 2, \dots\}$, где $N(-\epsilon, \epsilon) = \emptyset$. Легко видеть, что, например,

$$M^1 \cup M^2 \subseteq \{\omega \in \Omega: \max(|Y^1|, |Y^2|) \geq \delta\}, \quad (4.5)$$

где $\delta = \min(\epsilon^1, \epsilon^2)$. Следовательно, $\Omega \notin \mathcal{J}$, и поскольку $\ker P^0$ — замкнутое подпространство в S , то \mathcal{J} — собственный замкнутый идеал в σ -алгебре Σ . Наш основной результат относительно структуры меры μ заключается в том, что по аналогии с двумерной моделью, описанной в разделе 3, существует изоморфизм σ -алгебр с мерой.

Теорема 1.

$$\Sigma / \mathcal{J} \cong \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}^0). \quad (4.6)$$

Доказательство: Убеждаемся, что из каждого класса эквивалентности $[f]$, где $f = dt \wedge (e_j - \partial_j \phi) dx^j + b \in \mathcal{S}, (\cdot, P^0)$, единственным образом можно взять элемент $z = Pf$, $dz = 0$. Действительно, пусть $z = d(a_0 dt + a_j dx^j)$. Сразу найдем $a_0 = \phi$. Затем $z = da$ определяем из условия $\delta(f - z) = 0$, т.е. в явном виде $d^*(b - z) - \dot{e} = 0$. Получаем

$$Pf = d(\phi dt) + (Cb + \beta^{-1} \dot{e}), \quad (4.7)$$

где $\beta = d^*$, $C = d\delta(\Delta^{-1})$ и $\Delta \geq 0$ — оператор Бельтрами — Лапласа в \mathbb{R}^3 . Нетрудно обнаружить аналогию с (3.10). Обозначим R — "электромагнитную" часть проекционного оператора P .

Лемма. Пусть \mathcal{L} — гильбертово пространство элементов вида $z = da$ с индуцированным скалярным произведением (\cdot, P^0) . Система функций

$$z = i_s C u, \quad u_{ij} \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}^3),$$

где $i_s(t)$, $s \in \mathbb{R}$ — временной сдвиг функции Дирака является полной.

Доказательство:

$$\langle (i_s u, F)^2 \rangle = \frac{1}{2} \|\beta^{1/2} (Cu)\|^2, \quad (4.9)$$

т.е. $u = u_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j \rightarrow i_s C u$, для любого фиксированного $s \in \mathbb{R}^3$, непрерывное вложение пространства $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}^3)$ в \mathcal{L} и образ, плотный в \mathcal{L}_s (см. [10, 11]).

Теорема 2.
Семейство

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow (i_t u_1 F) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x u^{ij}(x) B_{ij}(t, x), \quad (4.10)$$

где $u_{ij} \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}^3)$ есть стационарный марковский процесс на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) . Трансформатрица полностью определяется мерой μ/\mathbb{B}^0 . Евклидов фотонный пропагатор — это функция Грина \mathcal{P} для положительного оператора

$$D = 1 - \frac{\partial^2}{\beta^2 \partial t^2} \Big|_{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}. \quad (4.11)$$

Доказательство: Скалярное произведение $(\cdot, RP^0R \cdot)$ определяет сопряженный оператор $0 \leq P \leq 1$ на \mathcal{L} . Вследствие этого имеет место тождество $dD\delta = \Delta/\mathcal{D}$, на некотором плотном $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$. Заметим, что D — локальный дифференциальный оператор второго порядка переменной евклидова времени $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим фурье-образ $f = f_m(k)$, где $k = (k^0, \mathbf{k}) \in \mathbb{B}^4$ и $m = 1, 2, 3$, функции $\epsilon_{0ijm} z_{ij}$, $z \in \mathcal{L}$. При помощи тождества $\epsilon_{0ijm} \epsilon_{0ilm} |k^i k^j k^l| = C$ для матричных элементов проекционного оператора $C = d\delta(\Delta^{-1})$ можно переписать

$$(z, RP^0Rz) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{dk^0 d^3k}{|k^0|^2 + |\mathbf{k}|^2} |k|^2 C^{mn} f_m(k) f_n(k). \quad (4.12)$$

Если z — нормированная функция в \mathcal{L} , тогда соответствующее f должно удовлетворять условию трехмерной поперечности $k^m f_m(k^0, \mathbf{k}) = 0$. Вследствие этого задача на собственное значение оператора β сейчас запишется

$$i \epsilon_{0lmn} k^m f_n = \pm |k| f_l,$$

т.е. β имеет обратный оператор. Мы его будем обозначать β^{-1} (см. [12]).

Пусть $\Sigma(t_1, t_2)$ — подалгебра в Σ , порождаемая случайными величинами (f, F) , где $f_{ij} \in \mathcal{S}_1((t_1, t_2) \times \mathbb{R}^3)$ для всех индексов $i, j = 0, 1, 2, 3$. Тогда, обозначая $\epsilon = (t_2 - t_1) > 0$, получаем на первый взгляд парадоксальный результат

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Sigma(t_1, t_2) \cap \Omega^0 = \emptyset. \quad (4.13)$$

Действительно, ввиду $\langle (d(\phi dt))^2, F \rangle = (\phi, \Delta\phi)$ и (4.3), (4.4) легко видеть, что евклидово электрическое поле нельзя локализовать на гиперплоскостях $\{x = (t, x) \in \mathbb{R}^4 : t = s\}$, т.е. $\sigma(\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \Sigma_s) = \mathbb{B}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.
Пусть

$$S(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \iint_{(t_1, t_2) \times \mathbb{R}^3} dt d^3x (E^2 + B^2), \quad (4.14)$$

где $E = -d\Phi + \beta^{-1} \dot{B}$ и $dB = 0$. Формальное тождество

$$d\mu/\sigma(\mathcal{Q} \cup \mathbb{B}^0) \approx \exp(-S) d\Phi dB$$

определяется точно при помощи изоморфизма (4.5). Следовательно, мера евклидово-инвариантна.

5. ЗАКОН ФАРАДЕЯ

Как было показано выше, μ/\mathbb{B} имеет структуру меры Винера, т.е. полностью определяется совместными распределениями семейств случайных величин

$$\{B(s_n, u(n)) : n = 1, 2, 3, \dots, N\}, \quad (5.1)$$

где взамен (4.10) мы будем использовать краткую запись $t \in \mathcal{R} \rightarrow V(t, u)$. Если $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_N$, вследствие марковского свойства для соответствующих временно упорядоченных моментов, при помощи трансферматрицы получаем формулу Фейнмана — Каца [13]. Пусть $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ — "физическое" гильбертово пространство и $\{T_s : s \in \mathcal{R}\}$ — группа унитарных операторов сдвига $x = (t, x) \in \mathcal{R}^4 \rightarrow (t+s, x)$ в $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$. Для любого $s \geq 0$ имеет место

$$\langle V(0, u) V(0, v) \rangle = (I, V(0, u) T_s^{-1} V(0, v) I) = (i_0 u, d\delta(\Delta^{-1}) i_s^{-1} v) =$$

$$\text{где } w = +\Delta^{1/2} \text{ и } = \frac{1}{2} (Cu, wC(e^{-sW} v)),$$

$$\Psi \in \mathcal{H} \rightarrow E(T_s \Psi | \Sigma), \quad s \geq 0, \quad (5.3)$$

трансферматрица. Здесь $E(v | \Sigma_0)$ — условное математическое ожидание случайной величины v .

Лемма. Пусть $P_0 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_0$ — оператор ортогонального проектирования. Тогда семейство сжатия $\{P_0 T_s, s \geq 0\}$ определяет полугруппу в вещественном гильбертовом пространстве \mathcal{L}_0 , которое изоморфно

$$\left\{ \otimes_{1 \leq j \leq r} S_r(\mathcal{R}^3), \frac{1}{2}(\cdot, CwC \cdot) \right\}. \quad (5.4)$$

Доказательство: Легко видеть, что $\pi\Psi = \Psi$ для всех $\Psi \in \mathcal{H}$, где π — унитарный симметричный оператор отражения $x = (t, x) \in \mathcal{R}^4 \rightarrow (-t, x)$ в $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$. Действительно, функция Дирака $i_s(t)$, если $s \in \mathcal{R}$, является инвариантной относительно отражения переменной $t \in \mathcal{R} \rightarrow -t$. Исследуя билинейную эрмитовскую форму $\frac{1}{2}(\cdot, CwC \cdot)$, получаем явный вид меры

$$d\mu | \Sigma_0 \approx |V_0(B)|^2 dV, \quad (5.5)$$

где V_0 — вакуум в представлении Шредингера. Поскольку трансферматрица $\exp(-H)$, где $H \geq 0$ — гамильтонов оператор, сохраняет положительность, фазовый множитель единственным образом можно выбрать так, чтобы имело место почти всюду $V_0(B) > 0$. Очевидно, H является вторичным квантованием оператора $w = +\Delta^{1/2}$ в \mathcal{L}_0 . Заметим, что для малых $\epsilon > 0$

$$\langle V(0, u) V(0, v) \rangle \approx \frac{1}{2} (\delta u, w^{-1} (1 - \epsilon w) \delta v), \quad (5.6)$$

т.е. оценка (4.4) оптимальна. Пусть h — ступенчатая функция Хевисайда. Получаем тождество

$$h_{(t_1, t_2)} = (T_\epsilon - I) T_{t_1} h, \quad \epsilon = (t_2 - t_1) \geq 0, \quad (5.7)$$

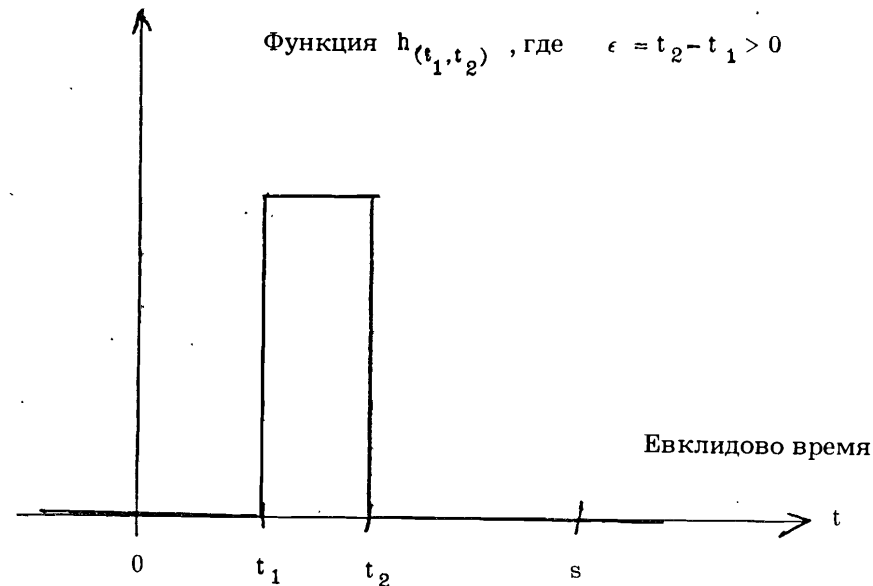


Рис. 2.

Теорема 4.

Для любого $s \geq 0$ и многочленов U, V переменных $V(0, \cdot)$ существует предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} \langle U(h_{(0, \epsilon)} dt \wedge \delta u, F) V_s \rangle = (I, U[H, V(0, u)] e^{-sH} V I), \quad (5.8)$$

где V_s сдвиг V . Следовательно, сингулярная случайная величина $(i_0 dt \wedge \delta u, F)$, $\mu_{1j} \in S_r(\mathcal{R}^3)$ служит определением неограниченного симметричного оператора в \mathcal{H} поперечного электрического поля $E(0, \delta u)$.

Доказательство: Объясним идею на примере квантовомеханической модели с гамильтоновым оператором $H = \frac{1}{2}(\rho^2 + \beta^2 x^2 - 1)$, $\beta = 1$. Рассмотрим случайный гауссов процесс $t \in \mathcal{R} \rightarrow (v(t), q(t))$ со средним значением нуль и

$$\langle (e, b), F \rangle^2 = \left\| \left(1 - \frac{d^2}{dt^2}\right)^{-1/2} \left(b - \frac{de}{dt}\right) \right\|^2, \quad (5.9)$$

где $(e, b) \in S_r(\mathcal{R}) \otimes S_r(\mathcal{R})$. Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство для F . Полагая $(e, b) = (h_{(t_1, t_2)}, \frac{d}{dt} h_{(t_1, t_2)})$, легко видеть, что почти всюду

$$\int_{t_1}^{t_2} dt v(t) = q(t_2) - q(t_1), \quad (5.10)$$

т.е. мера μ имеет носитель на линейном подмногообразии Ω^0 в Ω . По аналогии с (3.4) сужение μ/\mathcal{Q} на σ -подалгебру \mathcal{Q} , порождаемую $q(t)$, $t \in \mathcal{R}$, окажется известной винеровской мерой. Формально ее плотность

$$d\mu/\mathcal{Q} = e^{-\frac{1}{2} \int (q, (I - \frac{d^2}{dt^2}) q)} dq(\cdot) \quad (5.11)$$

получается проинтегрированной по скоростям $v(t)$, $t \in \mathcal{R}$. Пусть U , V будут многочленами по координате $z^k = q(0)$ осциллятора в нулевом моменте времени. Они являются неограниченными симметрическими операторами в "физическом" гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \Sigma_0, \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{\pi}})$. Если $t_1, t_2 \in (0, s)$, то ввиду формулы Фейнмана — Каца

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \partial(t_1, t_2)} \langle U(q(0)) q(t) V(q(s)) \rangle &= (U e^{-t_1 H} (e^{-\epsilon H} x - \epsilon e^{-\epsilon H}) e^{-(s-t_1) H} V) = \\ &= -\epsilon (U, e^{-t_1 H} [H, x] e^{-(s-t_1) H} V) \end{aligned} \quad (5.12)$$

(см. рис. 2). Умножая обе стороны тождества на $i\epsilon$, в пределе $\epsilon \rightarrow +0$ получаем точное уравнение Гейзенберга $p = i[H, x]$. Плотное множество в \mathcal{H}

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{ \Psi \in \mathcal{H} : \| (I + H^k) \Psi \| < \infty \} \quad (5.13)$$

является областью определения симметричного оператора p . В нашей модели евклидовы электромагнитные поля $F_{ij}(x)$, $x = (t, x) \in \mathcal{R}^4$, мы найдем следующим образом частный результат: пусть $\Psi = V(0, u) I$, где $u_{ij} \in S_r(\mathcal{R}^3)$, гладкое 1-фотонное состояние в \mathcal{H} . Тогда действие гамильтонова оператора

$$H\Psi = V(P, w \cdot k), \quad w = +\Delta^{1/2},$$

эквивалентно "превращению" Ψ в состояние $-i \cdot E(0, \delta u) I$. Здесь мы использовали (5.8) и $H1 = 0$. Очевидно, если Θ — гиперплоскость в \mathcal{R}^3 , то случайная величина (Ω, Σ, μ)

$$V(s, \Theta) = (i_s u(\Theta), F) = \int_{\Theta} B_{ij}(s, x) dx^i \wedge dx^j \quad (5.15)$$

будет сингулярной, т.е. $\langle V(0, \Theta)^2 \rangle = \infty$. Тем не менее, если Θ_1, Θ_2 —

такая пара, что граничные петли $\ell_n = \partial\Theta_n$, $n = 1, 2$ не имеют совместной точки, то предел корреляции

$$\lim_{s \rightarrow +0} \langle V(0, \Theta_1) V(s, \Theta_2) \rangle = \iint_{\ell_1 \times \ell_2} \frac{e_{ij} dx^i dy^j}{(2\pi)^2 |y - y'|^2} \quad (5.16)$$

существует. Более того,

$$i[H, V(0, \Theta)] = E(0, \partial\Theta). \quad (5.17)$$

6. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Пусть $K_{(t_1, t_2)}$ — пополнение линейного полупространства 2-форм $f = f_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$, где

$$f_{ij} \in S_r((t_1, t_2) \times \mathcal{R}^3), \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \quad (6.1)$$

в $\{S, (\cdot, P^0, \cdot)\}$. Можно рассматривать $K_{(t_1, t_2)}$ как замкнутое подпространство в K . Это значит — для любого $f \in K_{(t_1, t_2)}$ в соответствующем

классе эквивалентности $[f]$ существует единственный элемент $f^0 = P^0 f$ такой, что выполняются условия $df^0 = 0$ и $\text{supp } f_{ij} \subseteq [t_1, t_2] \times \mathcal{R}^3$, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Легко видеть, что проекционный оператор $P: K \rightarrow \mathcal{L} \otimes \{d(\phi dt)\}$ "усиливает" локализацию относительно переменной евклидова времени $t \in \mathcal{R}$. Имеем $Pf = f$, для $f = d(\phi dt)$. Для того, чтобы $f \in K_{(t_1, t_2)} \otimes \{d(\phi dt)\}$, необходимо и достаточно

$$\begin{aligned} z = Rf &= \\ &= \ell \otimes Cu, \quad \text{supp } \ell \subseteq [t_1, t_2]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Действительно, $f^0 = da \in K \otimes \{d(\phi dt)\}$, тогда и только тогда, когда $a = a_0 dt + a_j dx^j$ удовлетворяют $a_0 = 0$ и $\delta a = 0$. Используя еще раз тождество в S

$$*d\Theta = \ell dt \delta u + \ell \otimes u \in \ker P^0, \quad (6.3)$$

где $\Theta = \epsilon_{01jk} \ell(t) u_{ij}(x) dx^k$, получаем искомое разложение

$$f^0 = dt \wedge \dot{a} + da =$$

$$= \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{\beta^2 \dot{t}^2}\right) da + *d(\beta^{-1} \dot{a}). \quad (6.4)$$

Результат

$$z = R(da) =$$

$$= D(da) \quad (6.5)$$

согласуется с (4.7) и отношением $P^0|_{\mathcal{L}} = D^{-1}$. Сейчас мы готовы понимать марковское свойство относительно плоскости $\{x = (t, x) \in \mathbb{R}^4; t = 0\}$ на уровне евклидова 1-частичного гильбертова пространства K . Используя (6.5) и $(\phi, \Delta\pi\phi) = 0$, если $\phi \in S_r(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, его можно записать так:

Лемма. Пусть \mathcal{L}_+ — пространство в \mathcal{L} элементов вида $z = \ell \otimes Cu$, где $\text{supp } \ell \subset \mathbb{R}_+$. По аналогии определим \mathcal{L}_- . Тогда имеет место

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \cup \mathcal{L}_-. \quad (6.6)$$

Доказательство: Очевидно, $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_0$. Используем метод Дирихле. Рассмотрим эллиптическое уравнение $z = D\Phi$, где $\Phi = da$. Пусть $z \in \mathcal{L}^0 \cap \mathcal{L}_+$, т.е. для всех $u_{ij} \in S_r(\mathbb{R}^3)$ и любого $s \geq 0$ проекция

$$(i_s Cu, P^0 D\Phi) = (\delta u, a(s, \cdot)) \quad (6.7)$$

равна нулю. Это значит, что потенциал Φ имеет носитель в полупространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, и, следовательно, $z = D\Phi \in \mathcal{L}$, поскольку D — локальный дифференциальный оператор переменной $t \in \mathbb{R}$. Для соответствующих проекционных операторов P_\pm в \mathcal{L} следует соотношение $(1 - P_+) \subset P_-$, т.е. P_+, P_- коммутируют. Отсюда получаем $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus (\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_0)$. Более того, найдем для $f = f_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$ в S

$$(f, d\delta(\Delta^{-1}) Pf) \geq 0, \quad f_{ij} \in S_r(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3). \quad (6.8)$$

Это условие положительности Остервальдера — Шрадера ^{/14/}. Формальное действие оператора Π обращения времени на 2-форму вида

$$f = dt \wedge e_j(t, x) dx^j \in S$$

$$\Pi f = -dt \wedge e_j(-t, x) dx^j. \quad (6.9)$$

Полагая $f = h dt \wedge \delta u$, где h — функция Хевисайда, получаем $Rf = i_s Cu \in \mathcal{L}_0$ и в силу (6.3) $\Pi f = f$ физическое объяснение этого парадокса следующее: используя (5.8), заменяя $s \rightarrow t - i\epsilon$, состояние $\Psi = V(0, u) |$

можно переписать так:

$$\Psi = E((h dt \wedge \delta u, F) / \Sigma_0) = \int_0^\infty ds e^{-sH} (i_0 dt \wedge \delta u, F) | =$$

$$= (\epsilon + iH)^{-1} E(0, \delta u) |, \quad \epsilon > 0, \quad (6.10)$$

т.е.

$$\left(\int_{-\infty}^0 dr e^{r\epsilon} (e^{i\tau H} E(0, \delta u) e^{-i\tau H} - V(0, u)) | \right) = 0. \quad (6.11)$$

Обобщая это тождество на все физическое гильбертово пространство, мы получаем представление $K = L^2(\Omega, \Gamma_0, \mu)$, где $\Gamma_0 \sigma$ — подалгебра в Σ_+ / \int является прообразом $\Sigma_0 \subseteq \sigma(\mathcal{L} \cup \mathcal{B}^0)$ относительно фундаментального изоморфизма (4.6).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наконец, мы будем выводить канонические коммутационные соотношения для полей E, V . Достаточно рассмотреть вакуумные средние. При помощи (5.6) получаем

$$(I, V(0, u) V(0, v) |) = \frac{1}{2} (u, d\delta v) \quad (7.1)$$

и

$$(I, [E(0, \hat{c}), V(0, v)] |) = -i(c, \delta v), \quad (7.2)$$

где $\hat{c} = \delta d(\Delta^{-1})c$, соответствующее операторному тождеству $[p, x] = -i \cdot I$ в модели гармонического осциллятора. Подставляя $u = u(\Theta_1)$ и $v = u(\Theta_2)$, ввиду (5.16), (5.17) найдем сингулярное выражение

$$(I, [E(0, \ell_1), V(0, \Theta_2)] |) = -i \cdot I(\ell_1, \ell_2), \quad (7.3)$$

где $\ell_n = \partial \Theta_n$, $n = 1, 2$ — граничные петли гиперповерхностей в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 . Для любого $\epsilon = (t_2 - t_1) > 0$ определим случайную величину

$$F(\epsilon) = (d(h_{(t_1, t_2)} \otimes c), F) = \sum_{s \in \partial(t_1, t_2)} (i_s dt \cdot c, F) + \int_{t_1}^{t_2} ds B(s, dc), \quad (7.4)$$

где $c = c_j(x) dx^j$ — гладкая 1-форма на \mathbb{R}^3 . В частности, если интервалом времени выберем $(-\epsilon, \epsilon)$, то легко видеть, что выражение

$$\langle F(\epsilon) B(0, v) \rangle = (d(h_{(-\epsilon, \epsilon)} \otimes c), F^0(i_0 \otimes v)) = n_{(-\epsilon, \epsilon)}(0) \cdot (dc, v) \quad (7.5)$$

независимо от параметра $\epsilon > 0$. В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ второе слагаемое разложения (7.4) исчезает. Используя (5.8), можно показать, что $F(\epsilon) \times B(0, v) \rightarrow -i[E(0, \hat{c}), B(0, v)]$, в смысле формулы Фейнмана — Каца. Пусть $c = *u(\Theta)$, где $*$ обозначен звездочкой оператор Ходжа в \mathbb{R}^3 . Поскольку $\delta c \neq 0$, то сингулярная случайная величина

$$E(0, c) = \epsilon_{0ijk} \int_{\Theta_1} E_k(0, x) dx^i \wedge dx^j \quad (7.6)$$

имеет проекцию на сектор \mathcal{Q} зарядов, и мы получаем "топологические" коммутационные соотношения [16]. Таким образом, мы вернулись к нашей исходной точке (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Jordan W., Pauli W. — *Z. für Phys.*, 1928, 47, p.151.
2. Bjorken J.D., Drell S.D. *Relativistic quantum fields*. Mc Graw-Hill. (Русский перевод М.: Наука, 1978, т.2, с.75).
3. Wightman A.S., Strocchi F. — *J. Mat. Phys.*, 1974, 15, p.2198.
4. Фаддеев Л.Д. — *ТМФ*, 1969, 1, с.1.
5. Gross L. — *J. Funct. Anal.*, 1985, 63, p.1.
6. Löffelholz J. *Currents on the torus. Proceed. Int. Conf. on Math. Phys., Varna (Bulgaria)*, 1982.
7. Löffelholz J. *Probability theory and gauge invariance. Preprint KMU Leipzig*, 1987.
8. Flanders H. *Differential forms with appl. to the physical sciences*, A.P., New York/London, 1983.
9. Simon B. *The $\mathcal{P}(\phi)_2$ Eucl. (Quantum) field theory*, Princeton Univ. Press, 1974. (Русский перевод: М.: Мир, 1976).
10. Richtmyer R.D. *Principles of Advanced Math. Physics*, Springer N.Y. Heidelberg/Berlin, 1978. (Русский перевод: М.: Мир, 1982, т.1, с.145.).
11. Simon B. — *Helv. Phys. Acta*, 1974, 46, p.686.
12. Gurra F., Loffredo M.I. — *Lett. Nuovo Cimento*, 1980, 27, p.41.
13. Nelson E. — *J. Funct. Anal.*, 1973, 12, p.97.
14. Osterwalder K., Schrader R. — *Comm. Math. Phys.*, 1973, 31, p.83.
15. Зиновьев Ю.М. — *ТМФ*, 1981, 49, с.156; 1982, 50, с.207.
16. Widom A. — *J. Low. Temp. Phys.*, 1979, 37, p.449.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июня 1987 года.

Лэффельholz Ю.

P2-87-386

Евклидова мера для электромагнитного поля

Дан евклидов подход к квантованию электромагнитного поля $F_{ij}(x)$, $x = (t, \underline{x}) \in \mathbb{R}^4$, которое рассматривается как семейство координат на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) . Основной результат — это явная конструкция изоморфизма $\Sigma/\mathcal{I} \cong \sigma(\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}^0)$, где \mathcal{I} — инвариантный идеал, соответствующий закону Фарадея, $\mathcal{Q}, \mathcal{R}^0$ — независимые σ -подальгебры. В частности, сужение μ/\mathcal{R}^0 — винеровская мера марковского случайного процесса $t \in \mathbb{R} \rightarrow B_{ij}(t, \underline{x})$ из которого при помощи формулы Фейнмана — Каца можно вывести фотонный пропагатор.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ

Сообщение Объединенного института ядерных исследований Дубна 1987

Перевод автора

Löffelholz J.

P2-87-386

Euclidean Measure for the Electromagnetic Field

We give a rigorous Euclidean approach to the quantization of the electromagnetic field $F_{ij}(x)$, $x = (t, \underline{x}) \in \mathbb{R}^4$, which we consider as family of coordinates on some probability space (Ω, Σ, μ) . Our main result is the construction of an isomorphism $\Sigma/\mathcal{I} \cong \sigma(\mathcal{Q} \cup \mathcal{R}^0)$, where the ideal \mathcal{I} corresponds to Faraday's law and $\mathcal{Q}, \mathcal{R}^0$ are σ -subalgebras. In particular, the restriction μ/\mathcal{R}^0 appears to be the part space measure for a Markov process $t \in \mathbb{R} \rightarrow B_{ij}(t, \underline{x})$. Using a Feynman-Kac formula we derive the photon propagator.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1987