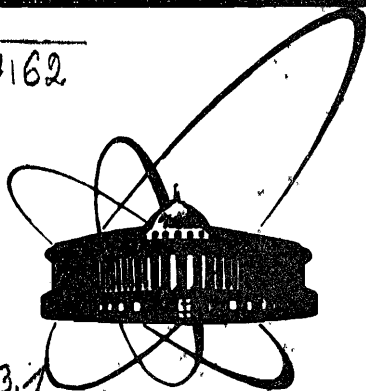


A 462



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

C 323.1

P2-87-347

Л.Александров, М.Дренска, Д.Караджов,
И.Морозов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАРКОНИЯ
С ПОЛНЫМ УЧЕТОМ СПИНОВОЙ ЗАВИСИМОСТИ
В РЕЛЯТИВИСТСКОМ УРАВНЕНИИ И.Т.ТОДОРОВА

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе ^{/1/} дана постановка прямой задачи для вычисления связанных $q\bar{q}$ -состояний в квазипотенциальном подходе И.Т.Тодорова ^{/2,3/} с учетом спиновых взаимодействий без применения теории возмущений. Решением прямой задачи показано, что ранее найденные из бесспиновой обратной задачи ^{/4,5/} параметры $q\bar{q}$ -потенциалов дают хорошее начальное соответствие между модельными и экспериментальными значениями масс в $c\bar{c}$ - и $b\bar{b}$ -системах. Решения обратной задачи с учетом полной спиновой зависимости для этих систем представлены в настоящей работе в случаях "конвенционального" потенциала ^{/6/} и потенциала Ричардсона ^{/7/}. В п.2 приведены формулировка и комментарий особенности прямой задачи кваркония. В п.3 даны основные характеристики метода стержневых сплайнов ^{/8-10/}, с помощью которого решаются численно уравнения прямой задачи. Постановка обратной задачи для определения параметров производящих потенциалов и масс кварков на основе спектроскопических данных о $q\bar{q}$ -системах приведена в п.4. Результаты решения совокупности обратных задач в бесспиновом и спиновом случаях и для различных производящих потенциалов представлены в п.5. Обсуждение результатов и сделанные на их основе выводы даны в том же параграфе.

2. О ПОСТАНОВКЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Совокупность моделей, используемых для описания спектра $q\bar{q}$ -систем, включает три варианта прямых задач, основывающихся на различных волновых уравнениях: на нерелятивистском /бесспиновом/ уравнении Шредингера $\nu = 1/$; на квазипотенциальном релятивистском уравнении ^{/2,3/} без учета спиновых взаимодействий $\nu = 2/$; на полном квазипотенциальном уравнении ^{/2,3/} с прямым учетом всех спиновых структур взаимодействия $\nu = 3/$. Полное взаимодействие строится на основе производящих потенциалов векторного (V) и скалярного (S) типов. В нашем рассмотрении исследованы два таких потенциала - "конвенциональный" потенциал ^{/6/} /CM; $i = 1/$

$$V_1(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + \eta_1 \kappa r, \quad (\alpha_s, \kappa) = \text{const} > 0, \quad S_1(r) = (1 - \eta_1) \kappa r$$

и потенциал Ричардсона^{/7/} (RM; i = 2)

$$V_2(r) = \frac{8\pi}{27} \left[\Lambda^2 r - \frac{1 - 4I_0(\Lambda r)}{r} \right], \quad \Lambda = \text{const} > 0, \quad S_2(r) = \eta_2 r,$$

где значения $\eta_1 = \frac{1}{2}$ и $\eta_2 = \frac{8\pi}{27} \Lambda^2$ определены /см.^{/8/, п.3.2/}

из условия линейной зависимости запирающего потенциала, а символ I_0 означает

$$I_0(\Lambda r) = \int_1^\infty \frac{e^{-\Lambda \mu r}}{\mu [\pi^2 + \ln^2(\mu^2 - 1)]} d\mu.$$

Постановка прямых задач рассмотрена в деталях в работах /1,3-5/. Здесь напомним уравнения и основные характеристики всей совокупности прямых задач, на основе которых решалась обратная задача кваркония.

Уравнение на собственные значения записываем в общепринятом виде

$$\left\{ \Delta + b_\nu^2(w) - V_{NS,\nu i}(r) - V_{LS,\nu i}(r)(\underline{L} \cdot \underline{S}) - V_{SS,\nu i}(r)(\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\sigma}_2) - V_{T,\nu i}(r) \frac{(\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{r})(\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{r})}{r^2} \right\} \Phi(\underline{r}; w) = 0, \quad /2.1/$$

$\nu = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2,$

где бесспиновая часть ($V_{NS,\nu i}$), спин-орбитальное ($V_{LS,\nu i}$), спин-спиновое ($V_{SS,\nu i}$) и тензорное ($V_{T,\nu i}$) взаимодействия приведены в отдельных частных случаях.

$\nu = 1$. В классическом случае $V_{LS,1i} = V_{SS,1i} = V_{T,1i} = 0$, а

$$V_{NS,1i}(r) = m V_i(r),$$

где m - масса кварка, $b_1^2(w) = mw$, w - энергия двухчастичной системы в с.ц.и. Собственные состояния задачи имеют обычную структуру

$$\Phi(\underline{r}; w) = \frac{1}{r} \chi_{n_r \ell}(r; w) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad n_r = 0, 1, 2, \dots; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

нумеруются квантовыми числами орбитального момента ℓ и радиальным числом n_r , а радиальные функции удовлетворяют уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + b_\nu^2(w) - V_{NS,\nu i}(r) \right\} \chi_{n_r \ell}(r; w) = 0, \quad /2.2/$$

$\nu = 1; \quad i = 1, 2,$

и условию нормировки $\int_0^\infty \chi_{n_r \ell}^2(r; w) dr = 1.$

$\nu = 2$. Бесспиновый квазипотенциальный случай ($V_{LS,2i} = V_{SS,2i} = V_{T,2i} = 0$) сводится тоже к решению однокомпонентного радиального уравнения /2.2/ для функции $\chi_{n_r \ell}(r; w)$. В дан-

ном случае / $\nu = 2$ / величина $b_2^2(w) = \frac{w^2 - 4m^2}{4}$ имеет смысл

квадрата полного импульса эффективной частицы с релятивистской приведенной массой $\frac{m^2}{w}$, w - полная энергия частиц в с.ц.и.

Зависящий от энергии квазипотенциал $V_{NS,2i}$ строится из производящих потенциалов V_i и S_i . Квазипотенциал $V_{NS,2i}$ /равно как и V_{NS} , V_{LS} , V_{SS} и V_T в случае $\nu = 3$ / регуляризован /см./3/, п.3/, что обеспечивает регулярное поведение решений квазипотенциальных уравнений в окрестности нуля. Регуляризирующие потенциалы при этом имеют вид

$$V_i'(r) = \begin{cases} -C_1 \frac{4\alpha_s}{3r} & \text{при } i = 1, \\ -C_2 \frac{8\pi}{27} \frac{1 - 4I_0(\Lambda r)}{r} & \text{при } i = 2, \end{cases}$$

где $C_i = \text{const} \geq 1 / i = 1, 2/$. При предположениях, сделанных в работах /1,3/, для бесспиновой компоненты квазипотенциала получается выражение

$$V_{NS,2i} = \begin{cases} -\frac{8E\alpha_s}{3r} + \frac{\kappa w r}{2} + \frac{4\kappa\alpha_s}{3} + \frac{\kappa U_{11}}{2wr} & \text{при } i = 1, \\ \frac{8\pi}{27} \left[2E \frac{1 - 4I_0}{r} + \Lambda^2 w r + \frac{16\pi\Lambda^2}{27} (1 - 4I_0) - \frac{4\Lambda^2 m}{w Z_2 r} - \frac{8\pi}{27} \left(\frac{1 - 4I_0}{r} \right)^2 + \frac{\Lambda^2 U_{12}}{wr} \right] & \text{при } i = 2, \end{cases}$$

где

$$U_{11} = \frac{3w-2m}{Z_1}, \quad U_{12} = \frac{3w+2m}{Z_2}, \quad Z_i = w + 2m - 2V_i \quad (i = 1, 2),$$

$$E = \frac{w^2 - 2m^2}{2w}.$$

Примечание. В случаях $\nu = 2$ и 3 требуется только, чтобы $|\frac{1}{r} \chi(r; w)| < \infty \quad \forall (r \in [0, \infty], w \in \mathbb{R}^1)$.

$\nu = 3$. Случай полного квазипотенциального уравнения для двух релятивистских частиц со спином $1/2$. Бесспиновая часть квазипотенциала совпадает с той же частью из предыдущего случая: $V_{NS,3i} = V_{NS,2i} \quad /i = 1, 2/$, а регуляризованные радиальные части операторов спиновых взаимодействий имеют вид ^{1,3}:

$$V_{LS,3i} = \begin{cases} \frac{16a_s U_{21}}{3wr^3} + \frac{2\kappa}{Z_1 r} & \text{при } i = 1, \\ \frac{32\pi}{27} \left[U_{22} \frac{1-4I_0}{wr^3} + \frac{\Lambda^2}{Z_2 r} \right] & \text{при } i = 2; \end{cases}$$

$$V_{SS,3i} = \begin{cases} -U_{31} \left(\frac{2a_s}{3wr^3} - \frac{\kappa}{4wr} \right) & \text{при } i = 1, \\ -\frac{4\pi}{27w} U_{32} \left(\frac{1-4I_0}{r^3} - \frac{\Lambda^2}{r} \right) & \text{при } i = 2; \end{cases}$$

$$V_{T,3i} = \begin{cases} U_{31} \left(\frac{2a_s}{wr^3} + \frac{\kappa}{4wr} \right) & \text{при } i = 1, \\ \frac{4\pi}{27w} U_{32} \left(3 \frac{1-4I_0}{r^3} + \frac{\Lambda^2}{r} \right) & \text{при } i = 2, \end{cases}$$

где $U_{2i} = \frac{w+m}{Z_i}, \quad U_{3i} = \frac{w+2m}{Z_i} \quad (i = 1, 2); \quad b_3^2(w) = b_2^2(w).$

Решения уравнения /2.1/ в присутствии тензорного члена $V_{T,3i}$ характеризуются квантовыми числами полного момента J , полного спина S , пространственной четности P и радиальным числом n_r . В общем случае они выражаются как суперпозиции базисных функций /см. ¹¹/, гл.XIII, с.66/ $\Phi_{n_r, LSJ}(r; w) =$

$= \frac{1}{r} \chi_{n_r(L)}(r; w) \mathcal{Y}_{LSJ}^M(\theta, \phi)$ с определенным квантовым числом полного углового момента L /чьи значения определяются из неравенства $|L-S| \leq J \leq L+S$ /. Следуя работе ¹¹/, приведем набор уравнений, получающийся из уравнения /2.1/, при описании различных /по S и J / связанных состояний $q\bar{q}$ -системы со спином

$\nu = 3, S = 0$. Тогда $L = J, P = (-1)^J$ и волновая функция однокомпонентная

$$\Phi_{n_r, S=0J}(r; w) = \frac{1}{r} \chi_{n_r(J)}(r; w) \mathcal{Y}_{J0J}^M(\theta, \phi),$$

а ее радиальная часть удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} + 3V_{SS,3i} + V_{T,3i} \right\} \chi_{n_r(J)}(r; w) = 0 \quad /2.35/$$

($i = 1, 2$);

в этот случай входят состояния с сигнатурой $n_r^1 S_0, n_r^1 P_1$ и т.д. /в стандартных спектроскопических обозначениях $n_r^{2S+1} L_J$ /.

$\nu = 3, S = 1$. Здесь $L = J (J > 0), P = (-1)^J$, волновая функция тоже однокомпонентная

$$\Phi_{n_r, S=1J}(r; w) = \frac{1}{r} \chi_{n_r(J)}(r; w) \mathcal{Y}_{J1J}^M(\theta, \phi)$$

с радиальной частью, удовлетворяющей уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} + V_{LS,3i} - V_{SS,3i} - \right. \quad /2.36/$$

$$\left. - V_{T,3i} \right\} \chi_{n_r(J)}(r; w) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

которое описывает состояния типа $n_r^3 P_1$, $n_r^3 D_2$, и т.д.

$\nu = 3, S = 1$. При $L = J \pm 1$ ($J > 0$), $P = (-1)^{J \pm 1}$ собственная функция двухкомпонентная

$$\Phi_{n_r, S=1J}(\underline{r}; w) = \frac{1}{r} [X_{n_r(J-1)}(\underline{r}; w) y_{J-1, 1J}^M(\theta, \phi) + X_{n_r(J+1)}(\underline{r}; w) \times \\ \times y_{J+1, 1J}^M(\theta, \phi)],$$

а ее радиальные части являются решениями связанной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(J+1)(J+2)}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} + (J+2)V_{LS,3i} - \right. \\ & \left. - V_{SS,3i} + \frac{V_{T,3i}}{2J+1} \right\} X_{n_r(J+1)}(\underline{r}; w) - \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_{T,3i} \times \\ & \times X_{n_r(J-1)}(\underline{r}; w) = 0, \\ & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} - (J-1)V_{LS,3i} - \right. \\ & \left. - V_{SS,3i} - \frac{V_{T,3i}}{2J+1} \right\} X_{n_r(J-1)}(\underline{r}; w) - \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_{T,3i} \times \\ & \times X_{n_r(J+1)}(\underline{r}; w) = 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \right. \quad /2.3в/$$

Система /2.3в/ отвечает состояниям типа $n_r^3 S_1$, $n_r^3 D_1$, $n_r^3 P_2$, $n_r^3 F_2$ и т.д.

$\nu = 3, S = 1$. Если $J = 0$, физический смысл имеет только компонента волновой функции с $L = J + 1$ из предыдущего случая, т.е.

$$\Phi_{n_r, S=1J=0}(\underline{r}; w) = \frac{1}{r} X_{n_r(1)}(\underline{r}; w) y_{111}^M(\theta, \phi),$$

чья радиальная часть удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} + 2V_{LS,3i} - V_{SS,3i} + V_{T,3i} \right\} \times$$

$$\times X_{n_r(1)}(\underline{r}; w) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad /2.3г/$$

к которому вырождается в этом случае система /2.3в/ и которое описывает состояния $n_r^3 P_0$.

Совокупность уравнений /2.2/, /2.3а-г/ определяет энергии и волновые функции связанной $q\bar{q}$ -системы в зависимости от заданного вектора параметров

$$X = \begin{cases} X_1 (X_{11} = m, X_{12} = a_s, X_{13} = \kappa, X_{14} = C_1)^T & \text{в CM,} \\ X_2 (X_{21} = m, X_{22} = \Lambda, X_{23} = C_2)^T & \text{в RM.} \end{cases} \quad /2.4/$$

Прямая задача при значениях параметров X_1 , полученных решением бесспиновой обратной задачи, дает правильное количественное описание энергий и функций $\bar{e}\bar{c}$ - и $\bar{b}\bar{b}$ -систем в спиновой релятивистской модели $\nu = 3$ /см. /1/, табл.1 и 2/. Отметим только, что спектр уравнения /2.3г/ в работе /1/ оказался значительно смещенным вниз из-за ошибки в компьютерной программе, где был пропущен член $-\frac{2}{r^2}$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТЕРЖНЕВЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Дифференциальные уравнения на собственные значения /2.2/, /2.3а-г/ в трех вариантах прямой задачи кваркония решаются численно методом стержневых сплайнов /МСС/ /8-10/. Приближенные радиальные волновые функции $\tilde{X}_\tau(\underline{r}; \tilde{w})$ и собственные значения \tilde{w}_τ ищутся на конечном интервале $[r_a, r_b] \subset [0, \infty]$ в виде /10/

$$\tilde{X}_\tau(\underline{r}; \tilde{w}) = p_\lambda(\underline{r}; \tilde{w}) \sum_{\lambda^*=1}^M a_{1,\lambda^*}^{(o)} S_{2,\lambda\lambda^*}(\underline{r}); \quad /3.1/$$

где в случаях $\nu = 1, 2$ и $\nu = 3$ /2.3а,б,г/: $M = 1, \lambda = 1, \tau \equiv (n_r, l)$, а в случае $\nu = 3$ /2.3в/: $M = 2, \lambda = 1, 2; \tau \equiv (n_r, L = J + 1)$, если $\lambda = 1, \tau \equiv (n_r, L = J - 1)$, если $\lambda = 2$. Стержневая функция решения /см. /10/, с.2/ $p_\lambda(\underline{r}; w) = \chi_{\tau,0}(\underline{r}; w) \times \chi_{\tau,\infty}(\underline{r}; w)$ является произведением асимптотических решений уравнения /2.1/ при $r \rightarrow 0$ (χ_0) и $r \rightarrow \infty$ (χ_∞). Ее конк-

ретный вид найден в работах^{/4/} /с.292/ и^{/1/} /с.6-9/. Полиномиальный коллокационный базисный сплайн степени 2 $S_{2,\lambda\lambda^*}(\tau)$

определен в^{/10/}, с.7. В случае системы /2.3в/ сплайновые коэффициенты $\alpha_{1,1}^{(0)}$ и $\alpha_{1,2}^{(0)}$ дают относительный вес обеих компонент полной функции Φ_{n_r, S_j} . При этом в настоящей работе принято, что $\alpha_{1,2}^{(0)} = 1$, а $\alpha_{1,1}^{(0)}$ получается решением системы /2.3в/. Значения этого коэффициента: $\alpha_{1,1}^{(0)} < 1$ или $\alpha_{1,1}^{(0)} > 1$, обуславливают классификацию данного решения системы как $^{2S+1}(L = J - 1)_J$ или $^{2S+1}(L = J + 1)_J$ соответственно.

Стабильность и точность приближенных решений зависят от выбора основных параметров МСС - τ_a, τ_b и N /числа подынтервалов в $[\tau_a, \tau_b]$ /. Путем численных экспериментов установлено, что стабильные решения, гарантирующие не менее пяти верных значащих цифр в собственных значениях \bar{w} , получаются при $\tau_a = 10^{-5}$ фм /в случае СМ; $i = 1/$ и $\tau_a = 10^{-4}$ фм /в случае РМ; $i = 2/$ и $N = 250$. Значения параметра τ_b индивидуальны для различных решений, они определялись условием $\tilde{\chi}_r(\tau_b; \bar{w}) \sim h^2 / h \approx 0,04$ - шаг сплайновой сетки/.

Вычисления проводились на ЭВМ ЕС-1061 в режиме с двойной точностью при помощи программы RODSOL, в которой реализован алгоритм^{/10/}.

4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КВАРКОНИЯ

Цель обратной задачи - это определение значений основных характеристик X /2.4/ $q\bar{q}$ -системы, а также сравнение качеств применяемых моделей / $\nu = 1, 2, 3/$ в их модификациях / $i = 1, 2/$. Эта цель достигается нахождением среднеквадратических решений^{/12/} нелинейной переопределенной системы уравнений, связывающей приближенные /модельные/ значения энергий \bar{w} с экспериментально известными массами резонансов M в чармонии и боттомони.

Формулировка обратной задачи основывается /см.^{/4/}, п.3/ на предположении, что в пространстве неизвестных ($w \in \mathbb{R}^1; X_1 \in \mathbb{R}^4; X_2 \in \mathbb{R}^3$) существует неявная функция

$$w = w(X_i), \quad i = 1, 2, \quad /4.1/$$

дифференцируемая по всем компонентам векторов X , которая генерируется методом стержневых сплайнов.

Предположим, что дан вектор измеренных энергий $q\bar{q}$ -системы

$$\bar{w} = (\bar{w}_{\tau_1}, \bar{w}_{\tau_2}, \dots, \bar{w}_{\tau_\mu})^T \in \mathbb{R}^\mu, \quad \mu - \text{целое} > 1, \quad /4.2/$$

компоненты которого нумеруются набором квантовых чисел r

/см. п.3/ и связаны с массами резонансов следующим образом:

$$\tilde{w}_r = \begin{cases} \mu_r - 2m & \text{при } \nu = 1, \\ \mu_r & \text{при } \nu = 2, 3. \end{cases}$$

С другой стороны, неявная функция /4.1/ определяет вектор

$$\tilde{w}(X) = (\tilde{w}_{\tau_1}(X), \tilde{w}_{\tau_2}(X), \dots, \tilde{w}_{\tau_\mu}(X))^T \in \mathbb{R}^\mu, \quad /4.3/$$

чьи компоненты - это энергии $\tilde{w}(X)$, вычисленные по МСС.

Решение переопределенной нелинейной системы уравнений

$$f(X) \equiv \tilde{w}(X) - \bar{w} = 0 \quad /4.4/$$

относительно неизвестных $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n = 4$ при $i = 1$ и $n = 3$ при $i = 2$, $n < \mu$ в смысле минимизации функционала

$$\chi^2(X) = \|\mathcal{P}(\tilde{w}(X) - \bar{w})\|_2^2$$

достигается решением $(\tilde{w}'(X)\mathcal{P})^T$ - усредненной задачи^{/12/} размерностью $(n \times n)$

$$F(X) \equiv (\tilde{w}'(X))^T \mathcal{P}^2 f(X) = 0, \quad /4.5/$$

где $\mathcal{P} = \text{diag}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_\mu)$ - матрица взвешивания, а $\tilde{w}'(X)$ - матрица Якоби для вектора $\tilde{w}(X)$.

Система уравнений /4.5/ относительно неизвестных X представляет /см.^{/4/} обратную задачу для связанных состояний кваркония. Численные решения задачи /4.5/ находятся авторегуляризованным итерационным процессом гаусс-ньютоновского типа^{/13/}. Статистический характер решаемой задачи учитывается применением двухшаговой процедуры LCH /см.^{/4/}, с.297/, которая позволяет определить наследственные ошибки неизвестных и значение статистического критерия $\bar{\chi}^2 = \chi^2 / (\mu - n + 1)$ в точке решения системы /4.5/.

Вычисления проведены на ЭВМ ЕС-1061 в режиме с двойной точностью. Итерационный процесс осуществлялся программой COMPD^{/13/} /библиотека стандартных программ ОИЯИ, программа № С-401/ в варианте^{/14/}.

5. РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КВАРКОНИЯ.
АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Спектр масс чармония, соответствующий различным решениям обратной задачи

Решения обратной задачи - массы кварков и параметры потенциалов $c\bar{c}$ - и $b\bar{b}$ - систем - для квазипотенциальной модели с полным учетом спина $\nu = 3$ и для бесспиновых моделей $\nu = 1, 2$ представлены в табл.1. Расчеты в обоих рассматриваемых вариантах $i = 1$ /CM/ и $i = 2$ /RM/ основываются на экспериментальных

Таблица 1
Массы кварков и параметры "конвенционального" потенциала $i = 1$ и потенциала Ричардсона $i = 2$

Параметры	Уравнение Шредингера ($\nu = 1$)		Бесспиновое квазипотенциальное уравнение ($\nu = 2$)		Квазипотенциальное уравнение с точным учетом спина ($\nu = 3$)	
	m /ГэВ/	α_s	α_s	α_s	α_s	α_s
$i=1$	m /ГэВ/	$c\bar{c}$	$1,45155 \pm 0,010$	$1,39482 \pm 0,015$	$1,51632 \pm 0,016$	
		$b\bar{b}$	$4,77640 \pm 0,006$	$4,80641 \pm 0,005$	$4,82733 \pm 0,008$	
	α_s	$c\bar{c}$	$0,47317 \pm 0,020$	$0,32476 \pm 0,042$	$0,59211 \pm 0,049$	
		$b\bar{b}$	$0,36715 \pm 0,006$	$0,42479 \pm 0,009$	$0,43737 \pm 0,010$	
	α /ГэВ ² /	$c\bar{c}$	$0,14625 \pm 0,004$	$0,15415 \pm 0,003$	$0,15925 \pm 0,003$	
		$b\bar{b}$	$0,17548 \pm 0,002$	$0,17442 \pm 0,001$	$0,16971 \pm 0,003$	
C_1	$c\bar{c}$	—	(4.)	$6,335 \pm 1,05$		
	$b\bar{b}$	—	(4.)	$7,443 \pm 0,68$		
$i=2$	m /ГэВ/	$c\bar{c}$	$1,49754 \pm 0,004$	$1,54328 \pm 0,003$	$1,53120 \pm 0,004$	
		$b\bar{b}$	$4,88704 \pm 0,002$	$4,88075 \pm 0,002$	$4,88755 \pm 0,0008$	
	Λ /ГэВ/	$c\bar{c}$	$0,39019 \pm 0,003$	$0,27517 \pm 0,002$	$0,28402 \pm 0,0009$	
		$b\bar{b}$	$0,40268 \pm 0,002$	$0,29655 \pm 0,001$	$0,29298 \pm 0,0005$	
	C_2	$c\bar{c}$	—	(4.)	$5,292 \pm 0,46$	
		$b\bar{b}$	—	(4.)	$9,648 \pm 1,25$	

$^{2S+1} n_r L_J$	$M_{\text{эксп.}} / \text{ГэВ}$	$\tilde{M} / \text{ГэВ} / (\nu=3)$		$n_r l$	$M_{\text{эксп.}} / \text{ГэВ}$	$\tilde{M} / \text{ГэВ} / (\nu=1)$		$\tilde{M} / \text{ГэВ} / (\nu=2)$	
		$i=1$	$i=2$			$i=1$	$i=2$	$i=1$	$i=2$
1^1S_0	2,9810	3,0779	3,0470						
2^1S_0	3,5920	3,6135	3,6215						
3^1S_0		4,0328	4,0511						
1^3P_1		3,5063	3,5128						
1^3P_1	3,5100	3,4909	3,4964	$1p^x$	3,5249	3,5205	3,5158	3,4961	3,5264
2^3P_1		3,9720	3,9335						
1^3P_0	3,4150	3,4145	3,4145						
2^3P_0		3,8647	3,8725						
1^3S_1	3,0969	3,0835	3,0551	1S	3,0969	3,0972	3,0979	3,1214	3,1008
2^3S_1	3,6860	3,6177	3,6293	2S	3,6860	3,6686	3,6739	3,6389	3,6425
1^3D_1	3,7700	3,7714	3,7742	1d	3,7700	3,7928	3,7867	3,7760	3,8073
3^3S_1	4,0300	4,0414	4,0516	3S	4,0300	4,0702	4,0753	4,0522	4,0471
2^3D_1	4,1590	4,1631	4,1594	2d	4,1590	4,1553	4,1503	4,1603	4,1689
4^3S_1	4,4150	4,4114	4,4149	4S	4,4150	4,4128	4,4152	4,4140	4,3938
3^3D_1		4,5151	4,5023						
5^3S_1		4,7497	4,7551						
1^3P_2	3,5558	3,5413	3,5492						
2^3P_2		3,9690	3,9758						
$\tilde{\chi}^2$		0,8120	0,8418			0,9088	0,8349	1,0405	1,1635
χ^2 / ρ		$6 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$			$2 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-7}$

* Средняя масса мультиплетта.

** Максимальная невязка уравнений /4.5/.

данных о связанных состояниях чармония и боттомония из работ /15/ /см. табл.2 и 3/. Размерности решаемых в каждом отдельном случае систем /4.4/ следующие:

$$\nu = 1, 2: \quad \mu = \begin{cases} 7 & \text{для } c\bar{c}, \\ 8 & \text{для } b\bar{b}, \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} 3 & \text{для } i = 1, \\ 2 & \text{для } i = 2, \end{cases}$$

$$\nu = 3: \quad \mu = \begin{cases} 11 & \text{для } \bar{c}\bar{c}, \\ 12 & \text{для } \bar{b}\bar{b}, \end{cases} \quad n = \begin{cases} 4 & \text{для } i = 1, \\ 3 & \text{для } i = 2. \end{cases}$$

Параметр C_i регуляризирующего потенциала V_i' не влияет на решения нерелятивистской модели $\nu = 1$, а в релятивистском

Таблица 3

Спектр масс боттомония, соответствующий различным решениям обратной задачи

z_{5M} $n_r L_J$	$M_{\text{экср.}} / \Gamma_{\text{эВ}}$	$\tilde{M} / \Gamma_{\text{эВ}} (\nu=3)$		$n_r l$	$M_{\text{экср.}} / \Gamma_{\text{эВ}}$	$\tilde{M} / \Gamma_{\text{эВ}} (\nu=1)$		$\tilde{M} / \Gamma_{\text{эВ}} (\nu=2)$	
		$i=1$	$i=2$			$i=1$	$i=2$	$i=1$	$i=2$
$1^1 S_0$		9,4580	9,4542						
$1^1 P_1$		9,9158	9,9078						
$1^3 P_1$	9,8945	9,9080	9,9000	$1p^x$	9,9033	9,9130	9,9021	9,9141	9,9042
$2^3 P_1$	10,2537	10,2525	10,2537	$2p^x$	10,2603	10,2585	10,2599	10,2604	10,2603
$3^3 P_1$		10,5318	10,5348						
$1^3 P_0$	9,8729	9,8746	9,8696						
$2^3 P_0$	10,2270	10,2270	10,2322						
$1^3 S_1$	9,4600	9,4586	9,4598	$1s$	9,4600	9,4600	9,4599	9,4605	9,4608
$2^3 S_1$	10,0234	9,9933	10,0016	$2s$	10,0234	10,0106	10,0216	9,9937	10,0021
$1^3 D_1$		10,1516	10,1464						
$3^3 S_1$	10,3555	10,3302	10,3404	$3s$	10,3555	10,3462	10,3546	10,3331	10,3446
$2^3 D_1$		10,4394	10,4383						
$4^3 S_1$	10,5730	10,6036	10,6122	$4s$	10,5730	10,6185	10,6203	10,6108	10,6210
$3^3 D_1$		10,6907	10,6895						
$5^3 S_1$	10,8660	10,8529	10,8525	$5s$	10,8660	10,8579	10,8477	10,8560	10,8628
$4^3 D_1$		10,9189	10,9149						
$6^3 S_1$	11,0800	11,0925	11,0768	$6s$	11,0800	11,0817	11,0524	11,0804	11,0826
$1^3 P_2$	9,9146	9,9303	9,9216						
$2^3 P_2$	10,2710	10,2711	10,2694						
$1^3 F_2$		10,3491	10,3481						
$\bar{\chi}^2$		0,8757	0,9832			0,7487	0,7724	0,7938	0,5639
ρ^{xx}		$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-2}$			$4 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-3}$

* См. табл. 2.

** См. табл. 2.

бесспиновом случае его влияние мало /см., например, табл. 3 в /1/. Поэтому задача $\nu = 2$ решалась при фиксированном значении $C_i = 4 / i = 1, 2/$, которое обеспечивает регулярность квази-потенциалов V_{NS} в нуле /см. /1/, с. 9/. Определить значение параметра C_i можно только в модели $\nu = 3$.

В табл. 2 и 3 дан спектр масс $c\bar{c}$ - и $b\bar{b}$ -систем, полученный с данными из табл. 1. В этих же таблицах даны как предсказания энергии ряда состояний, не обнаруженных пока экспериментально. В каждом случае приведено и значение величины $\bar{\chi}^2$, характеризующее статистическую достоверность решения. В табл. 4 показаны структурные характеристики радиальных функций задачи $\nu = 3$: число их нулей и значений коэффициентов $\alpha_{1,1}^{(0)}$.

Качественный анализ решений /по числу нулей и по значениям коэффициента $\alpha_{1,1}^{(0)}$, определяющего вес компоненты с $L = J + 1$ в волновой функции системы /2.3в// показывает правильное соответствие между квантовыми числами модельных и экспериментально наблюдаемых состояний кварк-антикварковой системы. Спектр чармония и боттомония описывается количественно хорошо /табл. 2 и 3/.

Из анализа решений всей совокупности обратных задач можно сделать следующие выводы.

1/ Сравнение нерелятивистской и релятивистской задачи в бесспиновом случае на основе модели $i = 2$ было предметом наших исследований в работах /4,5/. Здесь, при более полном анализе /включающем модель $i = 1/$, подтверждаются сделанные ранее выводы о том, что $c\bar{c}$ -система описывается лучше релятивистским уравнением; сами же релятивистские эффекты меньше затрагивают значения масс кварков, а в гораздо большей степени влияют на параметры взаимодействия. Последнее особо выражено в модели $i = 2$, где параметр взаимодействия Λ в релятивистском случае уменьшается примерно на 25% для обеих кварковых систем /табл. 1/.

2/ Анализ результатов, полученных обратной задачей независимо для $c\bar{c}$ - и $b\bar{b}$ -систем, указывает на следующие тенденции в изменении параметров потенциалов /табл. 1/. В модели $i = 2$ значения параметра Λ примерно одинаковы в чармонии и боттомонии /только в случае $\nu = 2$ их разница достигает 7%. Это говорит в пользу "ароматной" независимости взаимодействия, которая предполагается аргументами многими авторами. В модели $i = 1$, где параметры потенциала для малых и больших расстояний отдельные, наблюдается уменьшение /на 26%/ параметра кулоновской части потенциала при переходе от $c\bar{c}$ - к $b\bar{b}$ -системе, что согласуется с явлением асимптотической свободы /табл. 1, случай $\nu = 3/$.

3/ В задаче с полным учетом спиновой зависимости модели с конвенциональным потенциалом / $i = 1/$ и с потенциалом Ричардсона / $i = 2/$ дают практически одинаковое количественное описа-

Таблица 4

Структурные данные о решениях спиновой системы / $\nu = 3$ / для CM-потенциала / $i = 1$ / и RM-потенциала / $i = 2$ /

$2S+1$ n_r L_J		$\bar{c}\bar{c}$ - система			$\bar{b}\bar{b}$ - система		
		$\alpha_{1,1}^{(0)}$	НУЛИ ФУНКЦИЙ		$\alpha_{1,1}^{(0)}$	НУЛИ ФУНКЦИЙ	
			$\chi_{(j+1)}$	$\chi_{(j-1)}$		$\chi_{(j+1)}$	$\chi_{(j-1)}$
$I^3 S_1$	$i = 1$	-0,0499	0	0	-0,0412	0	0
	$i = 2$	--0,0571	0	0	-0,0299	0	0
$2^3 S_1$	$i = 1$	-0,0454	I	I	-0,0399	I	I
	$i = 2$	-0,0507	I	I	-0,0290	I	I
$I^3 D_1$	$i = 1$	24,74	0	0	25,75	0	I
	$i = 2$	9,989	0	0	16,05	0	0
$3^3 S_1$	$i = 1$	-0,0428	2	2	-0,0391	2	2
	$i = 2$	-0,0471	2	2	-0,0284	2	2
$2^3 D_1$	$i = 1$	25,29	I	2	26,02	I	2
	$i = 2$	11,22	I	2	18,14	I	2
$4^3 S_1$	$i = 1$	-0,0409	3	3	-0,0386	3	3
	$i = 2$	-0,0446	3	3	-0,0280	3	3
$3^3 D_1$	$i = 1$	26,13	2	3	26,33	2	3
	$i = 2$	11,89	2	3	19,61	2	3
$5^3 S_1$	$i = 1$	-0,0395	4	4	-0,0381	4	4
	$i = 2$	-0,0427	4	4	-0,0276	4	4
$4^3 D_1$	$i = 1$	—	—	—	26,58	3	4
	$i = 2$	—	—	—	21,81	3	4
$6^3 S_1$	$i = 1$	—	—	—	-0,0376	5	5
	$i = 2$	—	—	—	-0,0274	5	5
$I^3 P_2$	$i = 1$	-0,0281	0	0	-0,0246	0	0
	$i = 2$	-0,0314	0	0	-0,0179	0	0
$2^3 P_2$	$i = 1$	-0,0264	I	I	-0,0241	I	I
	$i = 2$	-0,0292	I	I	-0,0176	I	I
$I^3 F_2$	$i = 1$	—	—	—	43,36	0	I
	$i = 2$	—	—	—	18,14	0	0

ние спектров $\bar{c}\bar{c}$ - и $\bar{b}\bar{b}$ -систем. Для $\bar{c}\bar{c}$ -системы значения статистического критерия $\bar{\chi}^2$ одинаковы для обеих моделей /табл.2, случай $\nu = 3$ /, а в случае $\bar{b}\bar{b}$ -системы $\bar{\chi}^2$ для модели $i = 2$ имеет несколько лучшее значение /табл.3, случай $\nu = 3$ / . Отметим, однако, что оба потенциала неудовлетворительно описывают сверхтонкое расщепление S-состояний чармония. Этот недостаток, вероятно, связан с отсутствием /по построению/ контактных членов в спин-спиновом взаимодействии (V_{SS}), а также с уменьшением вклада запирающего потенциала, вызванным общей процедурой регуляризации потенциалов.

Получаемые в данном подходе волновые функции соответствуют точным состояниям спиновой системы в отличие от функции пертурбативного подхода, где состояния усредненные. Однако, пока вопрос об общем определении скалярного произведения в квази-потенциальном подходе остается нерешенным, собственные функции квазипотенциальной системы нельзя применить на практике.

Авторы выражают благодарность С.Б.Герасимову за конструктивное сотрудничество и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров Л., Караджов Д., Морозов П. ОИЯИ P2-86-349, Дубна, 1986.
2. Todorov I.T. - Phys.Rev., 1971, D3, p.2351; Properties of Fundamental Interactions (ed. by A.Tichichi). Ed. Compositori, Bologna, 1973, vol.9c, p.201, Ризов В.А., Тодоров И.Т. - ЭЧАЯ, 1975, 6, с.669.
3. Морозов П.Т. ОИЯИ, P2-85-401, Дубна, 1985.
4. Aleksandrov L. et al. - J.Compt.Phys., 1982, 45, p.291.
5. Aleksandrov L. et al. - J.Phys., 1984, G10, p.1003.
6. Eichten E. et al. - Phys.Rev., 1980, D21, p.203.
7. Richardson L. - Phys.Lett., 1979, B82, p.272.
8. Александров Л., Караджов Д. - ЖВМ и МФ, 1980, 20, с.923.
9. Александров Л., Дренска М., Караджов Д. - ЖВМ и МФ, 1982, 22, с.375.
10. Aleksandrov L., Drenska M., Karadjov D. JINR, E5-86-713, Dubna, 1986.
11. Мессиа А. Квантовая механика. М.: Наука, 1978, т.1; М.: Наука, 1979, т.11.
12. Александров Л. ОИЯИ P5-10366, Дубна, 1977.
13. Александров Л. ОИЯИ P5-7258, Дубна, 1973; Александров Л. ОИЯИ P5-7259, Дубна, 1973.

14. Александров Л., Дренска М., Караджов Д. ОИЯИ Б11-82-162, Дубна, 1982.
15. Particle Data Group. - Rev.Mod.Phys., 1984, vol.56, No.2, part 2; Moxhay P., Rosner J.L. - Phys.Rev., 1983, D28, p.1132; Silverman A. XII Int.Conf. on High En.Phys., Session A11, Leipzig, DDR, 1984.

Александров Л. и др.

P2-87-347

Обратная задача для кваркония с полным учетом спиновой зависимости в релятивистском уравнении И.Т.Тодорова

В квазипотенциальном подходе И.Т.Тодорова с полным учетом спиновой зависимости решена обратная задача для нахождения параметров потенциалов и масс кварков в тяжелых кварковых системах /чармония и боттомоний/ из полного спектра экспериментально наблюдаемых энергий. В качестве производящих потенциалов использованы конвенциональный потенциал и потенциал Ричардсона. Результаты спиновой обратной задачи сравниваются с результатами ее бесспиновой релятивистского варианта и с результатами, полученными на основе уравнения Шредингера.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Aleksandrov L. et al.

P2-87-347

Quarkonium Inverse Problem Based on the Relativistic Todorov's Equation

The quarkonium inverse problem based on the quasipotential approach of I.T.Todorov with exact treatment of the spin-dependent interactions is solved. As a result, potential parameters and quark masses in charmonium and bottomium systems are obtained for the complete experimentally observed spectra of these systems. The quasipotentials are constructed from the model generating potentials: the conventional (including Coulomb and linear term) potential and the Richardson potential. Results obtained by the spin inverse problem are compared with the results corresponding to a relativistic spinless equation and to Schrödinger equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987

Рукопись поступила в издательский отдел
15 мая 1987 года.