объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-324

М.Р.Авакян*, Г.С.Погосян*, А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян*

СПЕКТРОСКОПИЯ
СИНГУЛЯРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Направлено в журнал "Physics Letters A"

*Ереванский государственный университет

1987

Введение

В программе будущих исследований на LEP важное место отводится кварковой физике на малых расстояниях, в частности физике топония /I/. Интересно в этой связи выяснить, насколько чувствительны физические наблюдаемые в квантовой механике к изменению потенциала вблизи начала координат.

В настоящей статье этот вопрос исследован в простой модели сингулярного линейного осциллятора

$$\mathcal{U}(x) = \frac{\mu\omega^2 x^2}{2} + \Omega\,\delta(x) .$$

Иными словами, к гамильтониану линейного осциллятора добавляется дельта-образный член $V(x) = \Omega\,\delta(x)$, и выясняется, к каким изменениям в энергетическом спектре осциллятора приводит такая добавка.

I. Волновые функции

Уравнение Шредингера для сингулярного линейного осциллятора может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) + \left\{\lambda + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} - \gamma\,\delta(z)\right\}\Phi(z) = 0 . \qquad (I)$$

Здесь приняты обозначения

$$z = \left(\frac{2\mu\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x ,$$

$$\lambda = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} ,$$

$$\gamma = \frac{\Omega}{\hbar}\left(\frac{2\mu}{\hbar\omega}\right)^{1/2} .$$

Линейно-независимыми решениями уравнения (I) при $|z| \neq 0$ являются функции параболического цилиндра $\mathcal{D}_\lambda(z)$ и $\mathcal{D}_\lambda(-z)$, так что

$$\Phi_1 = A\,\mathcal{D}_\lambda(z) + B\,\mathcal{D}_\lambda(-z)\,, \quad z>0\,,$$
$$\Phi_2 = C\,\mathcal{D}_\lambda(z) + E\,\mathcal{D}_\lambda(-z)\,, \quad z<0\,. \tag{2}$$

Решения (2) должны удовлетворять стандартным условиям:

$$\lim_{|z|\to\infty} \Phi_i(z) = 0\,, \tag{3}$$

$$\lim_{z\to 0+} \Phi_1(z) = \lim_{z\to 0-} \Phi_2(z) \equiv \Phi(0)\,, \tag{4}$$

$$\left(\frac{d\Phi_1}{dz}\right)_{z=0+} - \left(\frac{d\Phi_2}{dz}\right)_{z=0-} = \gamma\,\Phi(0)\,. \tag{5}$$

Из асимптотических формул /2/

$$\mathcal{D}_\lambda(z) \xrightarrow{z\to\infty} e^{-z^2/4} z^\lambda\,,$$

$$\mathcal{D}_\lambda(z) \xrightarrow{z\to-\infty} -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\, e^{i\pi\lambda}\, e^{z^2/4}\, z^{-\lambda-1}$$

следует, что условие (3) соблюдается лишь при $B=C=0$.

Таким образом,

$$\Phi_1(z) = A\,\mathcal{D}_\lambda(z)\,, \quad z>0\,,$$
$$\Phi_2(z) = E\,\mathcal{D}_\lambda(-z)\,, \quad z<0\,. \tag{6}$$

Функция $\mathcal{D}_\lambda(z)$ выражается через вырожденные гипергеометрические функции /2/:

$$\mathcal{D}_\lambda(z) = 2^{\lambda/2} e^{-z^2/4} \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}\, F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{z}{\sqrt{2}}\, \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\, F\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right\}\,. \tag{7}$$

При целых неотрицательных $\lambda = N$. $\mathcal{D}_\lambda(z)$ связана с полиномами Эрмита /2/:

$$\mathcal{D}_N(z) = 2^{-N/2} e^{-z^2/4} H_N\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\,. \tag{8}$$

Теперь, учитывая (7) и (4), имеем

$$\frac{A-E}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)} = 0\,. \tag{9}$$

Возможны два случая:

а) $\lambda = 2n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$

б) $A = E$.

В случае а), как это следует из (8) и (6),

$$\Phi_1 = A\, 2^{-n-\frac{1}{2}} e^{-z^2/4} H_{2n+1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \quad z>0\,,$$

$$\Phi_2 = -E\, 2^{-n-\frac{1}{2}} e^{-z^2/4} H_{2n+1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \quad z<0\,.$$

Подставляя эти функции в (5) и помня, что в случае а) $\Phi(0)=0$, получаем, что $A=-E$. Итак, в случае а) состояния сингулярного осциллятора совпадают с нечетными состояниями обычного линейного осциллятора:

$$\Phi_\lambda^{(-)}(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^{2n+1}(2n+1)!}}\, e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2} H_{2n+1}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\,x\right). \tag{10}$$

В случае б) волновая функция (6) четна по z, и можно записать единой формулой

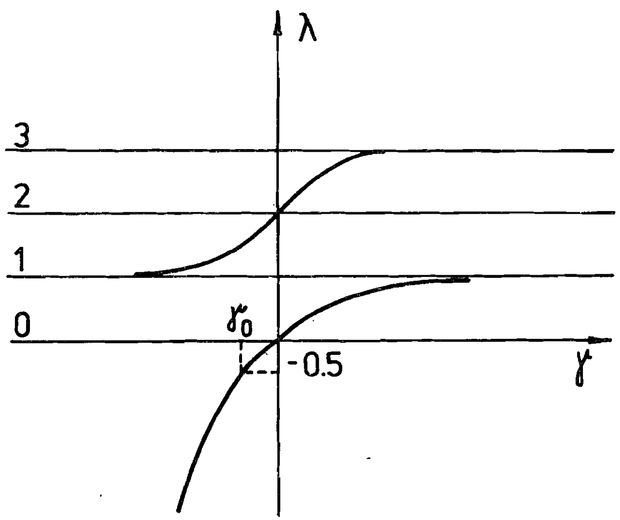
$$\Phi_\lambda^{(+)}(x) = A\,\mathcal{D}_\lambda(|z|)\,. \tag{11}$$

2. Энергетический спектр

В предыдущем пункте мы выяснили, что нечетные состояния линейного осциллятора не реагируют на включение дельта-образного потенциала. Иная картина наблюдается для четных состояний. В самом деле, из (II), (7) и условия (5) легко выводится трансцендентное уравнение

$$-\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}, \qquad \text{(I2)}$$

определяющее зависимость энергетического спектра, описываемого волновыми функциями (II), от параметра γ, а следовательно, и Ω. Из (I2) следует, что при $\gamma = 0$ индекс λ пробегает неотрицательные четные значения. Зависимость первых четных уровней $\lambda(0) = 0$ и $\lambda(0) = 2$ от параметра γ согласно (I2) изображена на рисунке. При изменении параметра γ остальные возбужденные уровни с положительной четностью, для которых $\lambda(0) = 4, 6, \ldots$, ведут себя в качественном отношении так же, как и уровень $\lambda(0) = 2$.



Подпись к рисунку: Зависимость индекса λ от параметров γ ($\gamma_0 = -0{,}6$)

Поэтому можно сделать следующие общие выводы:

а) первоначально возбужденные четные уровни $\lambda(0) = 2, 4, 6\ldots$ и т.д. при включении дельта-потенциала преобретают добавки, имеющие знак параметра γ;

б) с ростом $|\gamma|$ эти возбужденные уровни приближаются к нечетным уровням $\lambda = 3, 5, 7$ и т.д. и $\lambda = 1, 3, 5$ и т.д. для $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$ соответственно;

в) нормальный уровень осциллятора $\lambda(0) = 0$ с возрастанием γ повышается и приближается к первому нечетному уровню $\lambda(0) = 1$;

г) при изменении γ в сторону отрицательных значений нормальный уровень постепенно понижается и при $\gamma = \gamma_0 = -0{,}6$ входит в дельта-образную яму и далее уходит вниз ($E_0 \to -\infty$);

д) при $|\gamma| = \infty$ происходит слияние четных возбужденных уровней с нечетными, т.е. образуются двухкратно вырожденные аномальные для одномерной квантовой механики уровни энергии. Аномальный уровень возникает также в пределе $\gamma = \infty$ после слияния нормального уровня осциллятора с его первым нечетным уровнем $\lambda = 1$.

Наряду с (I0) аномальному уровню соответствует четная волновая функция

$$\varphi_\lambda^{(+)}(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^{2n+1}(2n+1)!}}\, e^{-\frac{\mu\omega^2}{2\hbar}x^2} H_{2n+1}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}|x|\right). \qquad \text{(I3)}$$

3. Падение на центр

При $\gamma \to -\infty$ нормальный уровень $E_0 \to -\infty$, т.е. частица падает на центр. Покажем, что возможно получить явный вид функции $|\varphi|^2$ в этом предельном случае. Подчиним волновую функцию (II) условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_\lambda^{(+)}(x)|^2 dx = 1 .$$

Здесь можно воспользоваться формулой [3]

$$\int_0^\infty |D_\lambda(z)|^2 dz = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \frac{\psi\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) - \psi\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)},$$

в которой ψ – это логарифмическая производная гамма-функции, и определить нормировочный множитель A:

$$\Phi_\lambda^{(+)}(x) = \left(\frac{4\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left\{\frac{\Gamma(-\lambda)}{\psi(\frac{1-\lambda}{2})-\psi(-\frac{\lambda}{2})}\right\}^{1/2} D_\lambda(|z|) \,. \qquad (I4)$$

Перейдем в (I4) к пределу $\gamma \to -\infty$, т.е. к $\lambda \to -\infty$. Так как согласно[3]

$$D_\lambda(z) \xrightarrow{\lambda\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda/2}(-\lambda)^{\lambda/2} e^{-\sqrt{-\lambda}|z|} \,,$$

то из асимптотического выражения для гамма-функции[2]

$$\Gamma(-\lambda) \xrightarrow{\lambda\to-\infty} \sqrt{2\pi}\, e^{\lambda}(-\lambda)^{-\lambda-\frac{1}{2}}$$

и формулы[4]

$$\psi(y) \xrightarrow{y\to\infty} \ln y - \frac{1}{y} \,,$$

а также представления дельта-функции в виде предела последовательности

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \sqrt{-\lambda}\, e^{-2\sqrt{-\lambda}|z|} = \delta(z)$$

легко показать, что

$$\lim_{\lambda\to-\infty} |\Phi_\lambda^{(+)}(x)|^2 = \delta(x) \,.$$

Это соотношение говорит о том, что при $\gamma \to -\infty$ частица локализуется в начале координат.

Заключение

Нами доказано, что добавление дельта-образного взаимодействия $\Omega\,\delta(x)$ полностью меняет спектроскопию четных состояний линейного осциллятора и в некоторых предельных случаях, о которых подробнее говорилось выше, приводит к возникновению двухкратно вырожденных аномальных для одномерной квантовой механики уровней энергии и к падению частицы на центр. Физическая причина таких изменений кроется в явлениях отражения и захвата в сингулярной точке $x=0$ (см. граничное условие (5)). Полученные результаты качественно совпадают с теми, которые известны в аналогичной задаче о влиянии

дельта-образного потенциала $\Omega\,\delta(x)$ на уровни бесконечной потенциальной ямы[5], и это совпадение свидетельствует об общности сделанных нами выводов. Отметим еще одно интересное явление, возникающее при подключении к исходному гамильтониану системы короткодействующего притяжения: в работе[6] доказано, что в модели одномерного бозе-газа добавление такого взаимодействия всегда приводит к образованию бозе-эйнштейновской конденсации. Наиболее яркие черты сингулярного осциллятора – наличие двухкратно вырожденных уровней и падение на центр – присущи потенциалу $U = -\alpha/|x|$, описывающему так называемый "одномерный атом водорода"[7]. В работе[7] было доказано, что утверждение о невырожденности дискретного спектра в одномерной квантовой механике[8] не является строгим и нарушается, если полюс потенциала является одновременно нулем волновых функций, как это имеет место в "одномерном атоме водорода"[7] и в случае сингулярного осциллятора (см. (I0) и (I3)). С симметричной точки зрения причина двухкратного вырождения спектра в поле $U=-\alpha/|x|$ заключается в наличии группы динамической симметрии $O(2)$, присущей "одномерному атому водорода" в области дискретного спектра[9].

Мы благодарны С.И.Виницкому, Л.И.Пономареву, Л.Г.Мардояну и Вл.В.Папояну за интересные обсуждения.

Литература

1. Physics at LEP. CERN 86-02, v.1, 21 February 1986.
2. Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс современного анализа, ч. 2, М. Физматгиз, I963.
3. Г.Бейтман, А.Эрдейн. Высшие трансцендентные функции, "Наука", М., I973, т. 2.
4. Г.Бейтман, А.Эрдейн. Высшие трансцендентные функции, "Наука", М., I973, т. I.
5. З.Флюгге. Задачи по квантовой механике, т. I, М., Мир, I974.
6. Vl.V.Papoyan, V.A.Zagrebnov. Phys.Lett. A, 113, No.1, p.8, , 1985.
7. R.Laudon. Amer.J.Phys. 27, No.9, 649, 1959.
8. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, "Наука", М., I974.
9. L.S.Davtyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan, J.Phys. A, 20, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 мая I987 года.