сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-306

Н.В.Махалдиани

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ПРОБЛЕМЕ КОМПАКТИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВА

1987

1. Кварковая модель адронов, а также вычисления в решеточной квантовой хромодинамике /1/ указывают на эффективное уменьшение размерности пространства, занимаемого адронной материей от трехмерия на масштабе 0,1 фм до одномерия на масштабе 1 фм. Современные надежды на построение объединяющей теории всех взаимодействий и непротиворечивой квантовой теории гравитации основаны на теориях Калуцы — Клейна и/или релятивистской струны /2/. На данном этапе развития теории струны исследуются вопросы расходимостей и аномалий, нарушения симметрии и компактификации пространства и другие. Проблема компактификации является проблемой сильной связи /3/, поэтому необходимы непертурбативные методы вычислений /4/.

В данной работе мы обсуждаем проблему компактификации пространства на основе модели газа частиц, взаимодействующих через внутренние, скалярные (фермионные и бозонные) и калибровочные степени свободы. Формулируем принцип стабильности, который с помощью уравнения состояний газа приводит к условию, определяющему размерность пространства, занимаемого системой. Анализируем модели случайных поверхностей и уравнения ренормгруппы (РГ), описывающие релятивистскую струну во внешних полях. Показываем, что преобразования РГ приводят к изменению с масштабом числа внутренних степеней свободы и размерности пространства. Рассматриваем фрактальные множества, аппроксимирующие пространства с нецелочисленной размерностью. Определяем размерность систем с флуктуирующим числом составляющих. Приводим вспомогательный материал из фрактального исчисления.

2. Исследование проблемы компактификации начнем с обсуждения следующего вопроса: "Почему пространство имеет три измерения?" /5/. Две невзаимодействующие частицы определяют одномерное пространство, три свободные частицы, в общем положении, определяют двумерное пространство, четыре частицы — трехмерное пространство и т.д. Но число частиц во Вселенной огромно. Как устроено взаимодействие и как получается, что вместо ожидаемого в случае свободных частиц огромного числа измерений пространства имеем всего лишь трехмерное пространство? Свободные, например бозонные, струны существуют в двадцатишестимерном пространстве Минковского /2/. Учет взаимодействия должен приводить к эффективной четырехмерной теории поля на больших расстояниях.

Мы подойдем к решению проблемы компактификации (проблема конфайнмента, по-видимому, является частным случаем проблемы компактификации) с помощью метода ренормгруппы (РГ) [6], который позволяет переходить от малых масштабов к большим и, рассматривая укрупненные частицы (квазичастицы, составные частицы), держать малым число (крупных) частиц. В нашем рассмотрении размерность пространства на заданном масштабе определяется тем, сколько имеется слабосвязанных частиц. Следовательно, размерность пространства определяется динамикой. В качестве математической модели пространства-времени обычно рассматривают (псевдо) евклидово или (псевдо) риманово многообразие. Представляет интерес рассмотрение более общих математических объектов — дифференциальных пространств [7], которые объединяют множества с разной топологической размерностью*. Физическое пространство определим как подмножество математического пространства, занимаемое физической системой. Отметим, что отсутствие материи в некоторой части N математического пространства в рамках уравнений Шредингера можно обеспечить, положив $\hbar = \hbar(x) = 0$, при $x \in N^*$.

Поле, создаваемое статическим точечным источником в d-мерном пространстве, описывается уравнением

$$(\Delta_d - \mu^2)\phi(x) = g\delta^d(x) \tag{1}$$

и имеет вид

$$\phi(x) \sim g e^{-\mu x}/x^{d-2}\ . \tag{2}$$

Взаимодействие (в ренормируемых квантовых теориях поля) приводит к тому, что источник "одевается шубой", а степенная зависимость в (2) становится нецелочисленной и зависящей от масштаба, что с позиции свободного уравнения (1) соответствует нецелочисленности размерности пространства "шубы" в окрестности источника. Следовательно, мы можем менять с расстоянием динамику (взаимодействие, константу связи), оставляя геометрию неизменной, либо не менять динамику (например, свободная теория), но менять (фрактальную) геометрию. Разумно "переводить" в структуру пространства "основную" часть взаимодействия, а по остальной части применить теорию возмущений. Например, сильное взаимодействие в КХД на масштабе 1 фм удобно описывать с помощью двумерной теории, а первый порядок теории возмущений — одноглюонный обмен — обеспечит линейно растущий с расстоянием потенциал, что приводит к конфайнменту. Число валентных кварков в мезоне равно двум, что соответствует одномерному пространству.

При построении единых теорий Калуцы — Клейна [2] исходят из классического действия достаточно простого вида (содержащего (супер)

* *Эти замечания возникли в ходе обсуждений с П.Мультожинским.*

гравитационное поле и иногда скалярные, калибровочные и спинорные поля) в многомерном пространстве. Учет квантовых эффектов (или предполагается, или показывается [8]) приводит к перестройке исходного пространства в пространство $M^4 \otimes K$, где M^4 — четырехмерное пространство Минковского, K — компактифицированное пространство дополнительных измерений. "Высвобожденные" компоненты метрического тензора интерпретируются как калибровочные и материальные поля. Таким образом, на проблему компактификации можно смотреть, как на следствие отличия (симметрии) основных состояний классической и соответствующей квантовой систем.

Пусть имеется классическая система, описываемая набором координат q_n и действием $S(q)$, обладающим инвариантностью относительно преобразований

$$dq_n \to G_{nm}(q)\, dq_m\ . \tag{3}$$

Введем инвариантную квадратичную форму

$$dI^2 = dq_n T^{nm} dq_m\ ,$$

где при преобразованиях (3)

$$T \to (G^T)^{-1}\, T G^{-1}.$$

Определим инвариантную меру

$$dq = (\det T)^{1/2} \prod_n dq_n\ .$$

Тогда квантовое описание, обладающее инвариантностью (3), осуществляется статсуммой:

$$Z = \int dq\, e^{-S(q)}\ ,$$

где как мера, так и действие имеют симметрию (3). Но для инвариантного квантового описания достаточно совместной инвариантности меры и действия. Например, статсумма

$$Z = \int \prod_n dq_n e^{-S_{eff}(q)}\ ,$$

где

$$S_{eff} = S(q) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln T\ ,$$

имеет симметрию (3). Мы будем требовать инвариантности относительно масштабных преобразований, что приведет к соотношению, определяющему размерность пространства в зависимости от динамики.

3. Рассмотрим проблему компактификации на примере квантовой статистической механики системы, состоящей из N частиц, взаимодействующих с помощью скалярных внутренних степеней свободы ϕ^a, $1 \le a \le n$. Пусть система находится в d-мерном пространстве при конечной температуре T. Описание системы осуществляется с помощью статсуммы [9] (постулат Гиббса, формула Фейнмана — Каца):

$$Z_N = \mathrm{tr}\, e^{-\hat{H}/T} = \int\limits_{\substack{x_i(0)=x_i(\beta)\\ 1 \le i \le N}} \prod d^d x_i \int\limits_{1 \le a \le n} \prod d\phi_i^a \cdot \times$$

$$\times \exp\left\{ - \int_0^\beta dt \left[\sum_i \frac{m\dot{\hat{x}}_i^2}{2} + \sum_{i<j} \omega_{ij} (\phi_i^a - \phi_j^a)^2 \right] \right\}, \tag{4}$$

где $\beta = 1/T$; интеграл берется по периодическим траекториям $x_i(0) = x_i(\beta)$; константы связи — веса ω_{ij} определяются из геометрии симплексной решетки, построенной на точках $\{x_i\}$ [10],

$$\omega_{ij} = \frac{V_{ij}}{\ell_{ij}}, \qquad \ell_{ij} = |x_i - x_j|,$$

V_{ij} — объем дуального к ребру (ij) (d-1)-мерного симплекса. Веса ω_{ij} обладают свойствами однородности:

$$\omega_{ij}(\alpha x) = \alpha^{d-2}\, \omega_{ij}(x). \tag{5}$$

Для давления системы имеем [9]

$$P = T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_N = -\left(\frac{\partial F_N}{\partial V}\right)_T, \tag{6}$$

где $F_N = -T \ln Z_N$ — свободная энергия, V — объем системы. Далее [11]

$$\frac{\partial Z_N}{\partial V} = \frac{1}{dV} \left\{ \frac{\partial Z_N(\alpha, m)}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha = 1}, \tag{7}$$

где $Z(\alpha, m)$ — статсумма нашей системы после увеличения линейных размеров в α раз. С учетом свойства (5) из определения (4) следует, что

$$Z_N(\alpha, m) = \alpha^{d\mathfrak{N} - \frac{d-2}{2}\mathfrak{N} n}\, Z_N(1, m\alpha^2). \tag{8}$$

Из соотношений (6)-(8) получаем

$$PV = \mathfrak{N}T\left(1 - \left(1 - \frac{2}{d}\right)\frac{n}{2} - \frac{2K}{d}\right), \tag{9}$$

где $\mathfrak{N} = N \cdot N_\beta$, N_β — число узлов на отрезке $(0, \beta)$ при дискретизации суммы по траекториям (4).

$$K = \left\langle \int_0^{1/T} dt \left(\frac{1}{\mathfrak{N}} \sum_i \frac{m\dot{\hat{x}}_i^2}{2} \right) \right\rangle \ge 0.$$

Если пренебречь последним слагаемым в (9) — статическое приближение, получим уравнение состояния идеального газа. В равновесии имеет место соотношение [12]

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T < 0, \tag{10}$$

то есть, если имеется возможность изометрического расширения, давление уменьшается. Состояния с $P < 0$ в природе существуют, но они метастабильны. Условие $P = 0$ мы будем называть условием стабильности. Из соотношений (6), (10) следует, что свободная энергия стабильной системы имеет минимальное значение. Из уравнений состояний (9) и условия стабильности в статическом приближении получим

$$d = \frac{2n}{n-2} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{d} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Отметим, что в подходе кинетической и термодинамической интерпретации интегрируемых нелинейных систем [13] стабильным солитонным состояниям соответствует условие $P = 0$. Если солитонная конфигурация имеет малую амплитуду, то $P > 0$ и со временем солитон увеличивается до стабильного состояния. Если амплитуда большая, то $P < 0$ и солитон уменьшается. В обоих случаях система приходит в состояние с $P = 0$.

С точки зрения квантовой теории измерения или волновой оптики размерность исследуемого объекта зависит от разрешающей способности прибора. Любой протяженный, составной объект имеет нульмерную структуру в пределе "большого" или "малого" разрешения. В промежуточной области разрешения размерность отлична от нуля и может принимать разные значения вплоть до размерности объемлющего пространства. Например, адрон при разрешении 0,1 фм представляет собой газ точечных частиц — партонов.[14]; при разрешении порядка 1 фм адрон — протяженный объект с ненулевой размерностью ("струна", "мешок"), при более слабом разрешении видим опять точечную частицу. Таким образом, целесообразно введение размерности, зависящей от масштаба, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(a)$ [15,16]. Нецелочисленные значения размерности пространства можно понимать как формальное аналитическое продолжение из целочисленных, аналогично тому, как это делается в рамках теории возмущений в методе ϵ-регуляризации [17] и в приближениях вариационного и среднего поля в решеточной теории поля [18]. Пространства с нецелочисленной размерностью можно реализовать как фрактальные множества [19].

Из соотношения (11) видим, что если растет n, то d уменьшается — происходит компактификация. Эта картина соответствует интуитивному представлению (калицы-клейновской картине компактификации): чем больше пространство компактифицируется, тем больше внутренних степеней свободы. Уменьшение $d \searrow 2$ достигается при $n \nearrow \infty$, следовательно, система (4) (в статическом приближении) из фазы $d > 2$ не может перейти в фазу $d < 2$. При $d = 2$ и $K = 0$ $P > 0$. Значение $d = 1$ соответствует $n = -2$, то есть двум фермионным степеням свободы. Вообще, для произвольного числа бозонных и фермионных степеней свободы уравнение состояния имеет прежний вид (9) с точностью замены n на $n_{eff} = n_b - 2n_f$, где n_b — число бозонных, $2n_f$ — фермионных степеней свободы, значению $d = 1$ соответствует $n_b = 2(n_f - 1)$, $n_f \geq 1$, условию $d = 0$ — равенство фермионных и бозонных степеней свободы, $n_b = 2n_f$. При этом действие инвариантно относительно преобразований суперсимметрии,смешивающей фермионные и бозонные степени свободы. Следовательно, конфайнменту, то есть ситуации, когда существует масштаб, на котором система выглядит как точечная, нульмерная, соответствует условие суперсимметрии.

В отсутствие бозонных степеней свободы

$$1 \leq d = \frac{2n_f}{n_f + 1} \leq 2 . \qquad (12)$$

Согласно (11) из существования состояния с $n = n_c$ и $d = d_c$ следует существование состояния с $n = d_c$ и $d = n_c$.

Взаимодействие с помощью калибровочных полей включим, добавив в действие слагаемого [10] (обозначения стандартные [40])

$$\frac{1}{g^2} \sum_{\Delta} \omega_{\Delta} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(I - v_{\Delta}) ,$$

где веса ω_{Δ} треугольных плакеток определяются согласно

$$\omega(x_i, x_j, x_k) = \frac{V_{ijk}}{\Delta_{ijk}} ,$$

V_{ijk} — объем дуального к плакетке (ijk) $(d-2)$-мерного симплекса; Δ_{ijk} — площадь плакетки (ijk). При масштабных преобразованиях веса удовлетворяют свойству однородности:

$$\omega_{\Delta}(\alpha x) = \alpha^{d-4}\, \omega_{\Delta}(x) ,$$

что позволяет, повторяя предыдущее рассмотрение, получить уравнение состояний

$$PV = \mathfrak{N}T\left(1 - \left(1 - \frac{2}{d}\right)\frac{n_{eff}}{2} - \frac{2K}{d} + \left(\frac{4}{d} - 1\right)A\right), \qquad (13)$$

где

$$A = \left\langle \frac{1}{g^2} \int_0^{1/T} \frac{1}{\mathfrak{N}} \sum_{\Delta} \omega_{\Delta} \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(I - v_{\Delta}) \right\rangle \geq 0 \; -$$

среднее действие калибровочного поля, приходящееся на одну частицу. Из условия стабильности получаем

$$d = \frac{2n_{eff} - 4K + 8A}{n_{eff} + 2A - 2} ,$$

$$n_{eff} = \frac{2d(1-A) - 4K + 8A}{d-2} . \qquad (14)$$

Необходимым условием достижимости значения $d = 2$ при конечных значениях n является условие $K = 1 + A$. Условию $d = 1$ соответствует $n_f + 2K = 1 + n_b/2 + 3A$. В отсутствие материальных полей в статическом приближении при $d < 4$, $P > 0$ и имеет место расширение. При $d > 4$ и $A > d/(d-4)$, $P < 0$ имеется компактификация, при $A \leq d/(d-4)$ $P \geq 0$. Для детального количественного анализа соотношения (14) необходимо провести численные эксперименты методами вычислительной квантовой теории поля [20]. В случае КХД необходимо уточнить нашу модель. Учет спина фермионных кварков удобно проводить в геометрическом подходе [21]. При проведении численных экспериментов следует, монотонно меняя d, вычислять кинетическую энергию K и калибровочное действие A частиц (9), (13) и сравнивать правую часть равенства (14) со значением d. При установлении равенства получаем критическое значение для размерности пространства. Стабильным состояниям системы соответствуют те критические значения для d, которые удовлетворяют условию (10), то есть на которых достигается минимум свободной энергии. В случае КХД для масштабов порядка 0,1 фм должно получиться $d \simeq 4$. Для масштабов порядка 1 фм ожидается значение $d \approx 2$.

4. Имеется связь между квантовой теорией поля, случайными кривыми и поверхностями. Функцию Грина материальных полей можно представить с помощью сумм по случайным траекториям, на которые при наличии калибровочных полей натягиваются случайные поверхности [22]. Случайные поверхности описывают также динамику границы между разными термодинамическими фазами вещества и рост (поверхности) кристаллов. Теория релятивистской струны [2], возникшая на основе дуальных моделей сильных взаимодействий, также является теорией случайных поверхностей.

Ковариантная, калибровочно-инвариантная, вторично-квантованная полевая теория струн с взаимодействием еще строится [23]. В подходе первичного квантования S-матрица теории струны представляется через континуальный интеграл по всем поверхностям и топологиям. Например, для бозонной струны [24]

$$S = \sum_{\text{по топологиям } T} \omega_T \int dg_{mn}(\zeta) \int dx^\mu(\zeta) \times \tag{15}$$

$$\times \exp\left\{- \frac{1}{4\pi a'} \int d^2\zeta \frac{1}{2} \sqrt{\det g_{mn}}\, g^{mn} \partial_m x^\mu \partial_n x_\mu \right\} \times$$

$$\times \prod_{1 \le i \le k} \int d^2\zeta_i\, V_i(\zeta_i, P_i, n_i),$$

где $x^\mu(\zeta)$, $\mu = 1,2,\ldots d$ — координаты струны; внешние частицы вводятся с помощью вершинных функций V_i, локализованных в разных точках мировой поверхности. Если в (15) ограничиться вершинами безмассовых состояний, можно получить эффективное действие для замкнутой струны, летящей над фоновыми полями [25]:

$$S = \frac{T}{2} \int d^2\zeta\, \partial_m x^\mu K^{mn}_{\mu\nu} \partial_n x^\nu + \frac{1}{4\pi} \int d^2\zeta \sqrt{g}\, R^{(2)} \Phi, \tag{16}$$

где $T = 1/2\pi a'$ — натяжение струны; $K^{mn}_{\mu\nu} = \sqrt{g}\, g^{mn} G_{\mu\nu} + \epsilon^{mn} B_{\mu\nu}$; $G_{\mu\nu}(x)$, $B_{\mu\nu}(x)$ и $\Phi(x)$ — соответственно гравитационное, тензорное антисимметричное и дилатонное фоновые поля. Действие (16) определяет обобщенную σ-модель в двумерном пространстве.

Для стабильности системы необходима масштабная инвариантность статсуммы*, что приводит к занулению следа тензора энергии импульса и ψ-функции ренормгруппы [25]:

$$\psi^\Phi = \frac{\mu d}{d\mu} \Phi = \frac{T}{32\pi}(d - 26) + \tag{17}$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \{ (\nabla \Phi)^2 - \Delta\Phi - \frac{1}{4} R + \frac{1}{48} H^2 \} + O(\frac{1}{T}),$$

$$\psi^G_{\mu\nu} = \frac{\mu d}{d\mu} G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_{\mu\rho\sigma} H^{\rho\sigma}_\nu + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + O(\frac{1}{T}),$$

$$\psi^B_{\mu\nu} = \frac{\mu d}{d\mu} B_{\mu\nu} = (\nabla_\rho - 2(\nabla_\rho \Phi)) H^\rho_{\mu\nu} + O(\frac{1}{T}),$$

$$H_{\rho\mu\nu} = \nabla_\rho B_{\mu\nu} + \nabla_\mu B_{\nu\rho} + \nabla_\nu B_{\rho\mu}.$$

Заметим, что постоянное значение размерности $d = G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ не противоречит уравнениям (17). В отсутствие внешних полей из первого уравнения (17) следует $d = 26$. Для замкнутой бозонной струны в гравитационном фоновом поле в однопетлевом приближении

$$\psi^G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}. \tag{18}$$

Учет поверхностей с топологией тора приводит [27] к фоновому пространству де-Ситера:

$$R_{\mu\nu} = \frac{2g^2\Lambda}{d-2} G_{\mu\nu}, \tag{19}$$

где Λ — космологическая константа, g — струнная константа связи. Из (18) и (19) получим

$$G_{\mu\nu}(\mu) = (\mu/\mu_0)^{K/(d-2)} G_{\mu\nu}(\mu_0). \tag{20}$$

**Масштабная и конформная симметрия, необходимая для непротиворечивого квантования, взаимосвязаны [26].*

Следовательно, при $K \gtrless 0$, $d \gtrless 2$ по константе связи $G_{\mu\nu}$ имеем инфракрасную свободу. Для гетеротипной струны [28] уравнения (17) дополняются уравнением для калибровочного внешнего поля [25]:

$$\psi_{\mu}^{a} = \frac{\mu d}{d\mu} A_{\mu}^{a} = \nabla^{\nu} F_{\mu\nu}^{a} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Условия стабильности, $\psi = 0$, в однопетлевом приближении приводят к линеаризованным классическим уравнениям движения для внешних пóлей. Учет высших поправок должен приводить к нелинейным уравнениям для внешних полей. Следовательно, уравнения движения теории струны во внешних полях представляют собой аналог вспомогательной системы линейных уравнений теории интегрируемых нелинейных систем [29]*.

Для размерности, занимаемой струной пространства, имеем

$$d = 26 - \frac{8}{\pi}\{(\nabla\Phi)^2 - \Delta\Phi - \frac{R}{4} + \frac{H^2}{48}\}/T + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Для некоторых компактных многообразий имеются точные формулы для размерности [30]. В случае бозонной струны

$$d = 26 - d_G/(1 + C_A/2K); \quad d_G,\ C_A \text{ и } K > 0,$$

и в случае суперструны

$$d = 10 - \frac{2}{3}\,\frac{d_G}{1 + C_A/2K} - \frac{1}{3} d_G,$$

откуда видно, что $d < 26$ и $d < 10$ для бозонной и суперструны соответственно.

Рассмотрим дискретные модели случайных поверхностей. Кривизна триангулированной поверхности сконцентрирована в узлах [31]

$$\int d^2\zeta \sqrt{g} R\Phi \to \sum_i \epsilon_i \Phi_i,$$

где $\epsilon_i = 2\pi - \Sigma_a \theta_i^a$ — сумма по углам, входящим в узел i. На каждом треугольнике определим индуцированную метрику: $ds^2 = dx^{\mu} G_{\mu\nu} dx^{\nu} = g_{\alpha\beta} d\zeta^{\alpha} d\zeta^{\beta}$, $g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^{\mu} \partial_\beta x^{\nu} G_{\mu\nu}$, $\alpha, \beta = 1,2$. Для треугольника (ijk) внутренние координаты x выражаются согласно $x = \zeta_1 x_i + \zeta_2 x_j + \zeta_3 x_k$, $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1$, $\zeta_i \geq 0$. Так как $dx = (x_i - x_j)\, d\zeta_1 + (x_j - x_k)\, d\zeta_2$, то индуцированный метрический тензор принимает вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \ell_{ik}^2 & \ell_{ik}\ell_{jk} \\ \ell_{ik}\ell_{jk} & \ell_{jk}^2 \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

где $\ell_{ij} = x_i - x_j$, $\ell_{ik}\ell_{jk} = (x_i - x_k)^{\mu} G_{\mu\nu} (x_j - x_k)^{\nu}$, $G_{\mu\nu} = (G_{\mu\nu}^{i} + G_{\mu\nu}^{j} + G_{\mu\nu}^{k})/3$. При $\zeta \in (ijk)$ имеем

$$\frac{1}{2}\int d^2\zeta \sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^{\mu} \partial_\beta x^{\nu} G_{\mu\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta_{ijk} \frac{1}{\Delta_{ijk}^2}(\ell_{jk}^2 \ell_{ik}^2 - (\ell_{ik}\ell_{jk}) - (\ell_{ik}\ell_{jk}) + \ell_{ik}^2 \ell_{jk}^2) =$$

$$= \Delta_{ijk} = \sqrt{\ell_{jk}^2 \ell_{ik}^2 - (\ell_{ik}\ell_{jk})^2},$$

где полагается, что

$$G_{\mu\nu}(\zeta) = \zeta_1 G_{\mu\nu}^{i} + \zeta_2 G_{\mu\nu}^{j} + \zeta_3 G_{\mu\nu}^{k},$$

и использовали значение интеграла

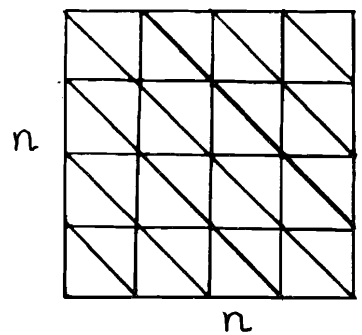
$$\frac{1}{2}\int d^2\zeta\, \zeta_1 = \int d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3\, \delta(1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3)\, \zeta_1 =$$

$$= \int_0^1 d\zeta_1 \zeta_1 \int_0^{1-\zeta_1} d\zeta_2 = \frac{1}{6}.$$

Меру дискретной модели выберем согласно [32]:

$$dM = \Pi' d^d x_i\, e^{-\beta S}, \qquad (22)$$

где $S = \sum_\Delta S_\Delta$ - сумма площадей треугольников, с помощью которых триангулируется поверхность. Чтобы исключить движение центра тяжести по координатам одного из узлов, не интегрируем. Рассмотрим поверхность с топологией тора и следующую триангуляцию (см. рисунок). Число узлов $N_0 = n^2$, число ребер $N_1 = 3n^2$, число треугольников $N_2 = 2n^2$. При масштабных преобразованиях статсумма, определяемая мерой (22), преобразуется так:



$$Z(\alpha, \beta) = \alpha^{d(n^2 - 1)}\, Z(1, \alpha^2\beta).$$

Для "уравнения состояний" газа узлов получим

Выше мы отмечали связь между условием стабильности и солитонными решениями.

$$PV = T(n^2-1)\left(1-\frac{2K}{d}\right), \tag{23}$$

где

$$K = \frac{2n^2}{n^2-1}\langle\beta S_\Delta\rangle,$$

$\langle S_\Delta\rangle$ — среднее действие на одну плакетку. Таким образом, имеем уравнение состояний, аналогичное уравнению состояния газа (13) в отсутствие внутренних степеней свободы. Из условия стабильности, $P=0$, получим

$$d = 2K \simeq 4\langle\beta S_\Delta\rangle. \tag{24}$$

При больших значениях n мера (22) сконцентрирована на поверхностях с площадью $\langle S\rangle \sim n^2$, $\langle S_\Delta\rangle = \text{const}$, с дисперсией $\sqrt{\langle S^2\rangle - \langle S\rangle^2} \approx \sqrt{d/4}\, n$, описывает микроканоническое распределение поверхностей с заданной площадью. Аналогично строятся канонические меры с заданным объемом, что важно, например, для вычислений в квантовой гравитации [33]. Введем скалярные поля на случайных поверхностях, добавляя слагаемое в действие:

$$\frac{1}{2}\int d^2\zeta\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^a\partial_\beta\phi^a, \tag{25}$$

где $1 \le a \le n$. Для скалярного поля примем значения

$$\phi^a(\zeta) = \zeta_1\phi_i^a + \zeta_2\phi_j^a + \zeta_3\phi_k^a .$$

При ζ из треугольника (ijk) с учетом выражения (21) получим

$$\frac{1}{2}\int d^2\zeta\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^a\partial_\beta\phi^a =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Delta\frac{1}{4\Delta^2}\left(\ell_{jk}^2\phi_{ik}^2 - 2\ell_{ik}\ell_{jk}\phi_{ik}\phi_{jk} + \ell_{ik}^2\phi_{jk}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{8\Delta_{ijk}}\left(\ell_{ij}\phi_k^a + \ell_{jk}\phi_i^a + \ell_{ki}\phi_j^a\right)^2,$$

где

$$\phi_{ik} = \phi_i - \phi_k .$$

При масштабных преобразованиях это слагаемое не меняется и в уравнении состояния (23) дает вклад через K.

При исследовании случайных поверхностей представляет интерес пространственная протяженность поверхности

$$\langle x^2\rangle \sim S^{2/d_f}, \tag{26}$$

где $\langle x^2\rangle$ — среднеквадратичное расстояние точек поверхности от центра тяжести; S — площадь поверхности. Для описанных выше моделей фрактальная размерность d_f расходится, критическая размерность (24) конечна.

5. Проанализируем условие стабильности в теории поля. Квантовая теория (калибровочных) полей в евклидовом пространстве задается статсуммой [34]:

$$Z = \int dA\, d\phi\, e^{-\frac{1}{g^2}\int_V G_{\mu\nu}^2 - S_\phi} = e^{-\frac{F}{T}},$$

где A_μ — калибровочное поле, ϕ — материальные поля; F — свободная энергия системы, $F = E - TS$, $T = g^2$, E — экстремальное значение действия. Условие сохранения (экстремальности) свободной энергии при изменении объема и постоянном числе внутренних степеней свободы дает [35] $dF = -S\,dT - P\,dV = 0$, $dT/dV = -P/S$. Условие стабильности $P = 0$ приводит к

$$\frac{dT}{dV} \sim \frac{ad}{da}g^2(a) = \psi(g) = 0 .$$

Следовательно, стабильность имеет место в нуле ψ-функции ренормгруппы. Конечные теории поля являются стабильными при всех $T = g^2$. В случае $\psi > 0$ (например, КХД), $P < 0$ имеется компактификация. В случае $\psi < 0$ (например, КЭД), $P > 0$ имеется расширение.

6. В нашем подходе к понятию размерности физического пространства фундаментальное значение имеет понятие составной частицы — квазичастицы. Квазичастица — это точечная частица на одном масштабе a и составная частица на другом, меньшем, масштабе. Число квазичастиц на данном масштабе $N(a)$ определяет наблюдаемое значение размерности пространства. Зависящую от масштаба фрактальную размерность подмножества M евклидова пространства E^n определим с помощью соотношения [16]

$$d_f(a) = \frac{\ln N(a)}{\ln(1/a)},$$

где $N(a)$ — минимальное число n-мерных сфер (симплексов или других конечных элементов) — ''квазичастиц'' с радиусом a, необходимых для покрытия множества M. Если в промежутке масштабов $a_0 < a < a_1$, $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{d}(a)$, то $N(a) \sim a^{-\mathfrak{d}}$ и объем множества $M \sim a^{\mathfrak{d}} N(a) = \mathrm{const}$, что является естественным обобщением аналогичного соотношения для множеств с целочисленной размерностью. Для квантовых систем с флуктуирующим числом квазичастиц можно ввести разные определения размерности. Например,

$$\mathfrak{d}_1(a) = < \frac{\ln N(a)}{\ln(1/a)} >$$

или

$$\mathfrak{d}_2(a) = \frac{\ln <N(a)>}{\ln(1/a)},$$

при этом так как

$$\ln <N> \geq <\ln N>,$$

то

$$\mathfrak{d}_2(a) \geq \mathfrak{d}_1(a).$$

Интересным примером модели фрактального пространства является множество, получаемое с помощью последовательного разбиения d-мерного симплекса на n^d одинаковых симплексов и отбрасывания частей с противоположной ориентацией относительно исходного симплекса. На каждом шаге разбиения из получаемых n^d частей оставляем лишь

$$N_n^d = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(d-1)}, \qquad N_i^{(0)} = 1,$$

симплексов [36]. Легко видеть, что

$$N_n^d = \frac{n(n+1)\ldots(n+d-1)}{d\,!}.$$

Фрактальная размерность имеет вид

$$\mathfrak{d}(d, n) = \frac{\ln N_n^d}{\ln n}.$$

При $n = 2$ $\mathfrak{d} = \ln(d+1)/\ln 2$. При $n \to \infty$

$$\mathfrak{d} = d + \frac{d(d-1)}{2n \ln n}.$$

Следовательно, увеличивая n, имеем сколь угодно близкое к целочисленному значение размерности. Целочисленную размерность имеем также, например, при $n = 2$, $d = 2^K - 1$, $\mathfrak{d} = K$. Другие интересные примеры фракталов получаются при разбиении ребер d-мерного куба на L частей и отбрасывании из середины ℓ частей. Для фрактальной размерности имеем [16]

$$\mathfrak{d}(d, L, \ell) = \frac{\ln(L^d - \ell^d)}{\ln L} = d + \frac{\ln(1 - (\ell/L)^d)}{\ln L}.$$

При $d = 1$, $L = 3$, $\ell = 1$ получаем канторово множество с $\mathfrak{d} = \ln 2/\ln 3 \simeq 0{,}63$. Для моделей теории поля и статистической физики, заданных на фрактальных решетках, масштабы L и ℓ связаны с корреляционной длиной $\xi(a)$ и могут меняться с масштабом, что приводит к изменению $\mathfrak{d}(a)$.

7. Перейдем к вопросам анализа фрактальных множеств. Как можно определить символ

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x),$$

когда n принимает нецелочисленные значения? Этой проблемой занимались многие после открытия дифференциального исчисления. Современное состояние теории [37] основано на определении *

$${}_cD_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt. \qquad (27)$$

Оператор дифференцирования нецелого порядка α, D^α определяется как обратный к (27). Определение Эйлера основано на формуле

$$\frac{d^\alpha x^n}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}.$$

**Определение (27) принадлежит Холмгрену (Holmgren, 1863) и называется формулой Холмгрена – Римана – Лиувилля [38].*

Определение Лиувилля — на формуле

$$\frac{d^{\alpha}e^{nx}}{dx^{\alpha}} = n^{\alpha}e^{nx} .$$

Определение (27) сводится к определениям Эйлера и Лиувилля соответственно при $c=0$ и $c=-\infty$. Действительно, легко видеть, что

$${}_0D_x^{-\alpha} x^n = x^{n+\alpha} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}$$

и

$${}_{-\infty}D_x^{-\alpha} e^{nx} = e^{nx} n^{-\alpha} ,$$

после чего достаточно произвести замену $\alpha \to -\alpha$. Следовательно, если функция представляется в виде степенного или экспоненциального ряда, можно применить частные случаи Эйлера и Лиувилля. Для примера получим интегральное представление для ζ-функции Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \tag{28}$$

Имеем $\sum\limits_{n\geq 1} e^{nx} = \dfrac{1}{e^{-x}-1}$, $x < 0$,

$${}_{-\infty}D_x^{-s} \sum_{n\geq 1} e^{nx} = \sum \frac{e^{nx}}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{s-1} \frac{dt}{e^{-t}-1} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-x}^{\infty} \frac{(t-x)^{s-1}}{e^t - 1} dt .$$

Положив $x \to -0$, получим ответ (28). Для примера возможного применения фрактального исчисления рассмотрим функцию /39,16/

$$x_{\mu}(\sigma) = \sum_n c_{\mu}(k_n) \operatorname{Re}(e^{i(k_n\sigma+\delta_n)}) , \tag{29}$$

где $\mu = 1,2, ..., d$, $c_{\mu}(k_n) \sim 1/k_n^{1+\epsilon}$, $k_n \sim n$ при больших значениях n. Эта функция описывает фрактал с внешней размерностью:

$$d_{ext} = d - (d-1)\epsilon ,$$

и внутренней размерностью:

$$d_{int} = 1/\epsilon .$$

По определению Лиувилля,

$$D^{\alpha} x_{\mu}(\sigma) = \sum c_{\mu}(k_n) \operatorname{Re}[(ik_n)^{\alpha} e^{i(k_n\sigma+\delta_n)}] .$$

Производная порядка α от функции (29) существует при $\alpha < \epsilon$. Фрактальный параметр производной $\epsilon' = \epsilon - \alpha$. При $\alpha \nearrow \epsilon$, $\epsilon' \searrow 0$ и внутренняя размерность может стать сколь угодно большой, а внешняя — сколь угодно близкой к d. Следовательно, фрактальная геометрия и исчисление дают аппарат для рассмотрения переменной размерности.

В заключение отметим, что в данной работе предлагается новый подход к решению проблемы компактификации пространства. При конкретных вычислениях необходимо применить аппарат вычислительной квантовой теории поля /40/.

Мне хочется поблагодарить многих, с кем я обсуждал затронутые здесь вопросы, в том числе Ю.М.Макеенко, В.Г.Маханькова, М.Мюллера-Пройскера, О.К.Пашаева и С.Ю.Шмакова. К основной идее работы с интересом отнеслись также Л.Альварец-Гоме и А.М.Переломов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ambjorn J., Olesen P., Peterson C. – Nucl. Phys. B, 1984, 240, p.189.*
2. *Арефьева И.Я., Волович И.В. – УФН, 1985, 146, с.655;*
   Duff M.J., Nilsson B.E.W., Pope C.N. – Phys. Rep., 1986, 130, p.1.
3. *Dine M., Sceiberg N. – Phys. Lett. B, 1985, 162, p.299.*
4. *Thorn C.B. – Nucl. Phys. B, 1986, 263, p.493;*
   Orland P. – Nucl. Phys. B., 1986, 278, p.790.
5. *Пуанкаре А. О науке. Последние мысли. М.: Наука, 1983.*
6. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.:Наука, 1984;*
   Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ϵ-разложение. М.: Мир,1975.
7. *Sikorski R. Wstep do geometrii rozniczkowej. Warsawa, 1972.*
8. *Candelas P., Weinberg S. – Nucl. Phys. B, 1984, 237, p.397.*
9. *Фейнман Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1975.*
10. *Christ N.H., Fridberg R., Lee T.D. – Nucl. Phys. B, 1982, 210, p.310; 337.*
11. *Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: ГИТЛ, 1946.*
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976.*
13. *Minelli T.A., Pascolini A. – Nuovo Cimento B, 1985, 85, p.1.*
14. *Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. М.: Мир, 1975.*
15. *Kraemmer A.B., Nielsen H.B., Tze H.C. – Nucl. Phys. B, 1974, 81, p.145.*
16. *Махалдиани Н.В. ОИЯИ, Р2-85-962, Дубна, 1985.*

17. Leibrand G. – Rev. Mod. Phys., 1976, 47, p.849.
18. Drouffe J. – Nucl. Phys. B, 1980, 170, p.211.
19. Mandelbrot B. The Fractal Geometry Nature. Freeman, San Francisco, 1982.
20. Махалдиани Н.В., Мюллер-Пройскер М., Шмаков С.Ю. ОИЯИ, Р2-84-302, Дубна, 1984.
21. Becher P., Joos H. – Z. Phys. C., 1982, 15, p.343.
22. Wilson K.G. – Phys. Rev. D., 1974, 10, p.2445.
23. Witten E – Nucl. Phys. B, 1986, 268, p.253.
24. Polyakov A..M. – Phys. Lett. B, 1981, 103, p.207; Nucl. Phys. B, 1986, 268, p.406.
25. Callan C.G. et al. – Nucl. Phys. B, 1985, 262, p.593.
26. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. – Nucl. Phys. B, 1984, 241, p.333.
27. Fishler W., Susskin L. Phys. Lett. B, 1986, 171, p.383; 173, p.262.
28. Gross D.J. et al. – Nucl. Phys. B, 1985, 256, p.253; Nucl. Phys. B, 1986, 267, p.75.
29. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.:Наука, 1986.
30. Berghoeff E. et al. – Nucl. Phys. B, 1986, 269, p.77.
31. Bander M., Itzykson C. – Nucl. Phys. B, 1985, 257, p.543.
32. Gross D.J. – Phys. Lett. B, 1984, 138, p.185.
33. Hawking S. – Nucl. Phys. B, 1978, 144, p.349.
34. Зайлер Э. Калибровочные теории. М.: Мир, 1985.
35. Nambu Y. – Phys. Rep., 1984, 104, p.237.
36. Englert F. et al. – Nucl. Phys. B, 1986, 280, p.147.
37. Fractional Calculus and its Applications, ed. B.Ross, Berlin, 1975.
38. Lützen J. In.: Proceedinds of the Nineteenth Nordic Congress of Mathematician, ed. Stefansson J.R., Reykjavik, 1985.
39. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. -- УФН, 1985, 146, с.493.
40. Махалдиани Н.В. ОИЯИ, Р2-86-849, Дубна, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1987 года.