сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-301

В.Н.Капшай*, В.Ф.Конопляников*, Н.Б.Скачков,
В.Н.Стариков*

ВКБ-РЕШЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

*Гомельский государственный университет

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

В физике элементарных частиц в последнее время получил широкое применение квазипотенциальный подход, предложенный А.А.Логуновым и А.Н.Тавхелидзе [1-3]. На основе этого подхода рассчитываются такие динамические характеристики адронов, как спектры масс, формфакторы упругого рассеяния, формфакторы распадов частиц, структурные функции глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния и т.д. [4-6]. Все указанные величины выражаются через волновые функции относительного движения кварков в адроне. В связи с этим исследование методов точного и приближенного решения квазипотенциальных уравнений для волновой функции является весьма актуальной задачей. В работах [7,8] было показано, что эти трехмерные интегральные уравнения могут быть сведены к дифференциальным непосредственно в импульсном пространстве в случае определенного класса квазипотенциалов, являющихся фурье-образами от четных рациональных функций переменной $|\vec{r}|$. Аналогичный переход к дифференциальной форме уравнения можно осуществить [9] при выборе квазипотенциала в виде образа четной рациональной функции, задаваемой в релятивистском конфигурационном представлении, которое вводится путем разложения по "релятивистским плоским волнам" - матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Лоренца [6]. Ключевым моментом такого подхода является использование релятивистской кинематики, то есть, по существу, того факта, что импульсное пространство является пространством Лобачевского [6].

В настоящей работе мы рассматриваем квазипотенциалы, являющиеся локальными в импульсном пространстве Лобачевского, образы которых в релятивистском конфигурационном представлении являются четными рациональными функциями релятивистской относительной координаты r, и сводим интегральные уравнения к задачам Штурма-Лиувилля для волновой функции в импульсном пространстве. Последняя в некоторых частных случаях может быть решена точно, в общем случае мы находим ее решение, используя известный метод ВКБ [10].

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Рассмотрим квазипотенциальные уравнения, записанные в виде

$$G_i^{-1}(E, E_p)\,\Psi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int V(\vec{p},\vec{k},E)\,\Psi(\vec{k})\,\frac{m d\vec{k}}{E_k}. \qquad /2.1/$$

Обратные свободные функции Грина G_i^{-1} имеют вид /в случае равных масс частиц $m_1 = m_2 = m$/

$$G_1^{-1}(E, E_p) = E^2 - E_p^2 = E^2 - m^2 - \vec{p}^{\,2}, \qquad /2.2/$$

$$G_2^{-1}(E, E_p) = E_p(E - E_p), \qquad /2.3/$$

$$G_3^{-1}(E, E_p) = 2m(E - E_p). \qquad /2.4/$$

При этом G_1^{-1} отвечает уравнению Логунова-Тавхелидзе [1], G_2^{-1} - уравнению Кадышевского [3]. Отметим, что в уравнении /2.1/ импульсы частиц принадлежат массовой поверхности:

$$p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = E_p^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2; \quad k_0^2 - \vec{k}^{\,2} = m^2, \qquad /2.5/$$

а квазипотенциал $V(\vec{p},\vec{k},E)$ определен вне энергетической поверхности $E_p = E_k = E$.

Мы будем полагать, что квазипотенциал является локальным в трехмерном пространстве Лобачевского, реализованном на верхнем поле массового гиперболоида /2.5/, то есть зависит от вектора неевклидовой разности $\Delta_{p,k} = \vec{p}(-)\vec{k}$ двух импульсов $\vec{p}$ и $\vec{k}$ в этом пространстве:

$$V(\vec{p},\vec{k};E) = V(\vec{p}(-)\vec{k};E) = V(\vec{\Delta}_{p,k};E),$$

где

$$\vec{\Delta}_{p,k} = \Lambda_k^{-1} p = \vec{p} - \frac{\vec{k}}{m}\left(p_0 - \frac{\vec{p}\vec{k}}{k_0 + m}\right);$$

$$\Delta^\circ_{p,k} = (\Lambda_k^{-1} p)^0 = \sqrt{m^2 + \vec{\Delta}^2_{p,k}}.$$

Здесь $\Lambda^{-1}_{\vec{k}}$ - матрица чистого преобразования Лоренца, такая, что $\Lambda_k^{-1}(k_0, \vec{k}) = (m, \vec{0})$.

В случае локальных в пространстве Лобачевского квазипотенциалов переход в релятивистское конфигурационное представление осуществляется по формулам [6]

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\vec{p},\vec{r})\,\Psi(\vec{p})\,\frac{m d\vec{p}}{E_p},$$

$$V(\vec{r};E) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\vec{\Delta},\vec{r})\,V(\vec{\Delta};E)\,\frac{m d\vec{\Delta}}{\Delta_0}, \qquad /2.6/$$

где "релятивистские плоские волны" $\xi(\vec{p},\vec{r})$ имеют вид

$$\xi(\vec{p},\vec{r}) = \left(\frac{E_p - \vec{p}\vec{n}}{m}\right)^{-1-imr}; \qquad \vec{r} = r\vec{n}.$$

Для сферически-симметричных потенциалов $V(\vec{r};E) = V(r)$ из /2.6/ имеем

$$|\vec{\Delta}_{p,k}|\,V(|\vec{\Delta}_{p,k}|) = 4\pi\int_0^\infty \sin(mr\chi_\Delta)\,rV(r)\,dr, \qquad /2.7/$$

причем быстрота χ_Δ, отвечающая квадрату переданного 4-импульса $q^2 = (p-k)^2$, определяется из соотношения

$$q^2 = 2m^2 - 2m\Delta^\circ_{p,k} = 2m^2 - 2m^2 \operatorname{ch}\chi_\Delta.$$

Заметим теперь, что квазипотенциалу, который в релятивистском конфигурационном представлении задается в виде

$$V_0(r) = -g^2/r^2,$$

в импульсном пространстве отвечает согласно /2.6/, /2.7/ выражение

$$V_0(|\vec{\Delta}_{p,k}|) = \frac{2\pi^2 g^2}{|\vec{\Delta}_{p,k}|}. \qquad /2.8/$$

Аналогично для квазипотенциалов

$$V_\pm(r) = -\frac{g^2}{r^2 \pm a^2} \qquad /2.9/$$

в импульсном пространстве получаем

$$V_+(|\vec{\Delta}_{p,k}|) = -\frac{2\pi^2 g^2}{|\vec{\Delta}_{p,k}|}\left(\frac{m}{\Delta^\circ_{p,k} + |\vec{\Delta}_{p,k}|}\right)^{am}, \qquad /2.10/$$

$$V_-(|\vec{\Delta}_{p,k}|) = -\frac{2\pi^2 g^2}{|\vec{\Delta}_{p,k}|}\cos(am\chi_\Delta). \qquad /2.11/$$

Рассмотрим теперь случай сферически-симметричных волновых функций $\Psi(\vec{p}) = \Psi(p)$, где $p_{\to} = |\vec{p}|$, и определим быстроты, соответствующие импульсам $\vec{p}$ и k, соотношениями

$$E_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} = m\,ch\chi_p; \quad E_k = m\,ch\chi_k .$$

Подставляя потенциалы $V_s(\Delta_{p,k})\,(s = 0,+,-)$, задаваемые формулами /2.8/, /2.10/, /2.11/, в уравнение /2.1/, интегрируя в нем по угловым переменным вектора k и вводя функцию

$$\mathcal{F}(\chi_p) = G_1^{-1}(E, E_p)\, p\,\Psi(p) = G_1^{-1}(E, m\,ch\chi_p)\cdot m\,sh\chi_p\,\Psi(m\,sh\chi_p), \qquad /2.12/$$

получим для нее уравнение

$$\mathcal{F}(\chi_p) = \int_0^\infty V_s(\chi_p, \chi_k)\, G_1(E, m\,ch\chi_k)\,\mathcal{F}(\chi_k)\, m\,d\chi_k . \qquad /2.13/$$

При этом парциальные /орбитальный момент равен нулю/ потенциалы $V_s(\chi_p, \chi_k)$ во всех трех случаях представляются в виде

$$V_s(\chi_p, \chi_k) = a_s u_s(\chi_>)\, v_s(\chi_<), \qquad /2.14/$$

где

$$\chi_> = \max(\chi_p, \chi_k); \quad \chi_< = \min(\chi_p, \chi_k).$$

Функции $u_s(\chi)$, $v_s(\chi)$ и константы a_s таковы:

$$a_0 = -g^2 m; \quad u_0(\chi) = 1; \quad v_0(\chi) = \chi, \qquad /2.15/$$

$$a_+ = -g^2/m; \; u_+(\chi) = e^{-am\chi}; \; v_+(\chi) = sh(am\chi), \qquad /2.16/$$

$$a_- = -g^2/a; \; u_-(\chi) = \cos(am\chi); \; v_-(\chi) = \sin(am\chi). \qquad /2.17/$$

Отметим следующие важные свойства функций $u_s(\chi)$ и $v_s(\chi)$:

$$u_s''(\chi) = \beta_s u_s(\chi); \quad v_s''(\chi) = \beta_s v_s(\chi), \qquad /2.18/$$

$$u_s(\chi)\, v_s'(\chi) - v_s(\chi)\, u_s'(\chi) = \gamma_s, \qquad /2.19/$$

причем β_s и γ_s являются константами:

$$\beta_0 = 0; \quad \gamma_0 = 1; \quad \gamma_\pm = am; \quad \beta_\pm = (am)^2. \qquad /2.20/$$

Используя свойства /2.18/ и /2.19/, нетрудно показать теперь, что парциальное интегральное уравнение /2.13/ эквивалентно задаче Штурма-Лиувилля, состоящей из дифференциального уравнения

$$-\mathcal{F}''(\chi) + \beta_s \mathcal{F}(\chi) = m a_s \gamma_s\, G_1(E, m\,ch\chi)\,\mathcal{F}(\chi) \qquad /2.21/$$

и краевых условий в нуле и на бесконечности:

$$\lim_{\chi\to 0}\{v_s(\chi)\,\mathcal{F}'(\chi) - v_s'(\chi)\,\mathcal{F}(\chi)\} = 0, \qquad /2.22/$$

$$\lim_{\chi\to\infty}\{u_s(\chi)\,\mathcal{F}'(\chi) - u_s'(\chi)\,\mathcal{F}(\chi)\} = 0. \qquad /2.23/$$

Исследованию этой задачи для различных квазипотенциалов /2.8/, /2.10/ и /2.11/, а также для различных свободных функций Грина /2.2/-/2.4/ посвящены следующие разделы.

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИПОТЕНЦИАЛОМ V_0

Отметим теперь, что уравнение /2.21/ по форме совпадает с уравнением Шредингера, в котором функция $g^2 m^2 G_1(E, m\,ch\chi)$ играет роль "эффективного потенциала", причем полная энергия релятивистской связанной системы $2E = 2m\cos x$ является параметром этого "потенциала". С другой стороны, величина $-\beta_s$ играет роль нерелятивистской энергии.

Следует, однако, сразу же подчеркнуть, что краевые условия /2.22/, /2.23/ существенно отличаются от соответствующих нерелятивистских условий, накладываемых на волновую функцию.

Рассмотрим теперь уравнение /2.21/ для случая квазипотенциала /2.8/ $(s = 0)$:

$$-\mathcal{F}_0''(\chi) + g^2 m^2 G_1(E, m\,ch\chi)\,\mathcal{F}_0(\chi) = 0. \qquad /3.1/$$

Отметим, что в киральном пределе, когда масса связанного состояния $2E = 0$, это уравнение может быть решено точно для функций Грина /2.2/, /2.3/ [9]. Решение /3.1/ при $E = 0$, удовлетворяющее граничному условию на бесконечности /3.23/, имеет вид

$$\mathcal{F}_0(\chi) = A P_\nu(th\chi); \quad g^2 = \nu(\nu+1); \quad i = 1,2. \qquad /3.2/$$

Здесь P_ν-функции Лежандра, а переменная $\mathrm{th}\,\chi$ по своему физическому смыслу есть скорость $|\vec{p}|/p_0$. Если учесть затем /2.22/, то возникает следующее условие на константу связи:

$$g^2 = (2n+1)(2n+2); \quad n = 0, 1, 2\ldots .$$

Вся область изменения переменной χ в /3.1/ является "классически доступной", так что правая точка поворота отодвигается на бесконечность. Нетрудно убедиться, что ВКБ-решение уравнения /3.1/, удовлетворяющее граничному условию в нуле /2.22/, имеет вид

$$\mathcal{F}_0(\chi) = \frac{C}{\sqrt{\kappa_0(\chi)}} \sin\left\{ \int_0^\chi \kappa_0(\chi')d\chi' \right\}, \qquad /3.3/$$

где

$$\kappa_0(\chi) = gm\sqrt{-G\,(E,\, m\,\mathrm{ch}\,\chi)}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Область применимости выражения /3.3/ определяется неравенством

$$2mg\left[-G_i\,(E,\, m\,\mathrm{ch}\,\chi)\right]^{3/2} \gg \left|\frac{d}{d\chi} G_i\,(E,\, m\,\mathrm{ch}\,\chi)\right|, \qquad /3.4/$$

из которого, в частности согласно сказанному выше, следует, что при $\chi \to \infty$ /3.3/ неприменимо. Значит, мы не можем накладывать условие /2.23/ непосредственно на функцию /3.3/.

Для получения условия квантования, связывающего величины g и E, поступим поэтому следующим образом. В области больших χ заменим в уравнении /3.1/ функцию $G_i\,(E, m\,\mathrm{ch}\,\chi)$ приближенным выражением так, чтобы при этом /3.1/ решалось точно. Рассмотрим вначале уравнение Логунова-Тавхелидзе. При выполнении условия $m\,\mathrm{ch}\,\chi \gg E$ имеем

$$G_1(E,\, m\,\mathrm{ch}\,\chi) \cong G_1(0,\, m\,\mathrm{ch}\,\chi) = -\frac{g^2}{\mathrm{ch}^2\chi}, \qquad /3.5/$$

и, следовательно, решение при больших χ уравнения /3.1/, удовлетворяющее граничному условию /2.23/, имеет вид /3.2/.

Сравним теперь выражения /3.2/ и /3.3/ в совместной области применимости, определяемой согласно /3.4/, /3.5/ из неравенств

$$\mathrm{sh}\,\chi \ll g; \quad \mathrm{ch}\,\chi \gg E/m = \cos x. \qquad /3.6/$$

Такая область, очевидно, существует, если константа связи велика $(g \gg 1)$ либо если масса связанного состояния мала $(E \ll m)$.

В указанной области из /3.3/ получаем для уравнения Логунова-Тавхелидзе

$$\mathcal{F}_0(\chi) = C\sqrt{mg^{-1}\mathrm{ch}\,\chi}\,\sin\{gI_1(E) - g\,\mathrm{arcctg}\,\mathrm{sh}\,\chi\}, \qquad /3.7/$$

где

$$I_1(E) = \int_0^\infty \frac{d\chi}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\chi - E^2/m^2}}.$$

С другой стороны, воспользовавшись асимптотической формулой для функций Лежандра [11], находим в области /3.6/

$$\mathcal{F}(\chi) = AP\,(\mathrm{th}\,\chi) = -A\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\sqrt{\frac{2}{\pi}\mathrm{ch}\,\chi}\cdot\sin\left\{-(\nu+\frac{1}{2})\,\mathrm{arcctg}\,\mathrm{sh}\,\chi - \frac{\pi}{4}\right\}. \qquad /3.8/$$

Из сравнения формул /3.7/, /3.8/ с учетом того факта, что при больших g

$$g^2 = \nu(\nu+1) \cong (\nu + 1/2)^2,$$

вытекает связь между константами A и C, а также соотношение

$$gI_1(E) = \pi(n - 1/4); \quad n = 1, 2, 3\ldots,$$

представляющее собой условие квантования.

Действуя аналогичным образом в случае уравнений с функциями Грина /2.3/, /2.4/ и квазипотенциала /2.8/, находим, что условие квантования во всех трех случаях $(i = 1-3)$ записывается в одинаковой форме:

$$gI_i(E) = g\int_0^\infty \sqrt{-G_i(E,\, m\,\mathrm{ch}\,\chi)}\,m d\chi = \pi(n - 1/4). \qquad /3.9/$$

Волновые функции, получаемые из /3.3/ и /2.12/ и условия квантования для квазипотенциальных уравнений с функциями Грина /2.2/, /2.4/ и потенциалом /2.8/, могут быть выражены через известные функции - эллиптические интегралы первого рода:

$$p\Psi_i(p) = C\left[-G_i(E,\, m\,\mathrm{ch}\,\chi)\right]^{3/4}\sin\{gF(\phi_0^{(i)}, k_0^{(i)})\}; \quad i = 1, 3;$$

$$gF(\frac{\pi}{2},\, k_0^{(i)}) = \pi(n - 1/4); \quad n = 1, 2, 3\ldots . \qquad /3.10/$$

Параметры эллиптических интегралов $\phi_0^{(i)}, k_0^{(i)}$ при этом определяются следующим образом:

$$\sin^2\phi_0^{(i)} = \frac{G_i(E, m\,ch\,\chi)}{G_i(m, m\,ch\,\chi)}; \quad i = 1,3;$$

$$k_0^{(1)} = E/m = \cos x; \quad k_0^{(3)} = \sqrt{(E+m)/2m} = \cos(x/2). \qquad /3.11/$$

Из формул /3.11/ следует, что для слабосвязанной системы $(m - E \ll m)$ $k_0^{(i)} \cong 1$. Воспользовавшись в этом пределе асимптотической формулой для полного эллиптического интеграла:

$$F(\frac{\pi}{2}, k) = \ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{\sqrt{1-k^2}}{4}\ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\ 0\ldots,$$

мы можем упростить условия квантования /3.10/ и привести его к виду

$$E_n^{(i)} = m\{1 - 4\cdot 2^i \exp[-\frac{2\pi}{g}(n - \frac{1}{4})]\}; \quad i = 1,3. \qquad /3.12/$$

Разумеется, эта формула применима только при тех n, при которых второе слагаемое в ней много меньше первого. Формула /3.12/ означает, что спектр квазипотенциальных уравнений содержит бесконечное число уровней, причем точка $E = m$ является точкой их сгущения.

В другом предельном случае $E \to 0$ зависимость энергии от константы связи g может быть легко определена из /3.9/. Для уравнений с функциями Грина /2.2/-/2.4/ имеем соответственно

$$E_n^{(1)} = 2m\sqrt{\frac{2n+3/2}{g} - 1}; \qquad E_n^{(2)} = \pi m(\frac{2n+3/2}{g} - 1);$$

$$E_n^{(3)} = \frac{\pi m}{4\alpha^2}(\alpha\frac{2n+3/2}{g} - 1); \qquad \alpha = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma^{1/2}(1/4)}.$$

При всяком фиксированном n эти формулы применимы только для таких значений константы связи g, для которых $E_n^{(i)} \ll m$.

4. ВКБ-РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИПОТЕНЦИАЛАМИ $V_\pm$

Рассмотрим теперь краевую задачу для функции $\mathcal{F}_+(\chi)$, соответствующую квазипотенциалу V_+ /2.9/, /2.10/. Она имеет вид

$$-\mathcal{F}_+''(\chi) + a^2m^2\mathcal{F}_+(\chi) + g^2m^2G_i(E, m\,ch\,\chi)\,\mathcal{F}_+(\chi) = 0, \qquad /4.1/$$

$$\lim_{\chi\to 0}[sh(am\chi)\mathcal{F}_+'(\chi) - am\,ch(am\chi)\,\mathcal{F}_+(\chi)] = 0, \qquad /4.2/$$

$$\lim_{\chi\to\infty}\{[\mathcal{F}_+'(\chi) + am\mathcal{F}_+(\chi)]\exp(-am\chi)\} = 0. \qquad /4.3/$$

При выполнении условия $a^2 < -g^2G_i(E, m)$ уравнение /4.1/ имеет точку поворота χ^*, которая определяется из условия $\kappa_+(\chi^*) = 0$. Функции $\kappa_\pm(\chi)$ есть

$$\kappa_\pm(\chi) = m[-g^2G_i(E, m\,ch\,\chi) \mp a^2]^{-1/2}. \qquad /4.4/$$

Для $\chi < \chi^*$, вдали от точки поворота, ВКБ-решение уравнения /4.1/, удовлетворяющее граничному условию /4.2/, имеет, как нетрудно убедиться, следующий вид:

$$\mathcal{F}_+(\chi) = C_+\frac{1}{\sqrt{\kappa_+(\chi)}}\sin\{\int_0^\chi \kappa_+(\chi')d\chi'\}; \quad \chi < \chi^*. \qquad /4.5/$$

Аналогично решение /4.1/ при $\chi > \chi^*$, удовлетворяющее граничному условию /4.3/, таково:

$$\mathcal{F}_+(\chi) = D_+\frac{1}{\sqrt{|\kappa_+(\chi)|}}\exp\{-\int_{\chi^*}^\chi |\kappa_+(\chi')|d\chi'\}; \quad \chi > \chi^*. \qquad /4.6/$$

Функции /4.5/, /4.6/ должны удовлетворять ВКБ-условию сшивания, из которого следует соотношение

$$\int_0^{\chi^*}\kappa_+(\chi)\,d\chi = \pi(n - 1/4); \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad /4.7/$$

определяющее спектр, и связь $D_+ = (-1)^n C_+/2$. Область применимости формул /4.5/, /4.6/ находится из неравенства

$$|g^2G_8(E, m\,ch\,\chi) + a^2|^{3/2} \gg \frac{g^2}{2m}|\frac{d}{d\chi}G_i(E, m\,ch\,\chi)|.$$

Решения /4.5/, /4.7/ при $i = 1,3$ могут быть выражены через эллиптические интегралы первого и третьего рода:

$$\mathcal{F}_+(\chi) = \frac{C_+}{\sqrt{\kappa_+(\chi)}}\sin\{g[F(\phi_+^{(i)}, k_+^{(i)}) + (\lambda_+^{(i)} - 1)\,\Pi(\phi_+^{(i)}, \lambda_+^{(i)}, k_+^{(i)})]\}, \quad \chi < \chi^*, \qquad /4.8/$$

$$\mathcal{F}_+(\chi) = \frac{(-1)^n}{2}\,\frac{C_+}{\sqrt{|\kappa_+(\chi)|}}\exp\{g\lambda_+^{(i)}F(\tilde\phi_+^{(i)}, \tilde k_+^{(i)}) - g\,\Pi(\tilde\phi_+^{(i)}, \tilde\lambda_+^{(i)}, \tilde k_+^{(i)})\}; \quad \chi > \chi^*. \qquad /4.9/$$

Параметры эллиптических интегралов в /4.8/-/4.9/ определяются следующими соотношениями:

$$\sin^2\phi_+^{(i)} = \frac{1}{\lambda_+^{(i)}}\,\frac{G_i(E, m\,ch\,\chi)}{G_i(m, m\,ch\,\chi)};$$

$$\lambda_+^{(i)} = 1 + \frac{a^2}{g^2}G_i^{-1}(E, m); \qquad k_+^{(i)} = k_0^{(i)}\sqrt{\lambda_+^{(i)}};$$

$$\sin^2\tilde\phi_+^{(i)} = \frac{1}{\lambda_+^{(i)}}G_i(m, m\,ch\,\chi)\left[\frac{g^2}{a^2} + G_i^{-1}(E, m\,ch\,\chi)\right];$$

$$\tilde\lambda_+^{(i)} = k_0^{(i)} + \frac{g^2}{a^2m^2}; \qquad \tilde k_+^{(i)} = \frac{a}{g}\sqrt{\tilde\lambda_+^{(i)}\,|G_i^{-1}(E, m)|}.$$

Условие квантования для тех же уравнений $(i = 1, 3)$ записывается через полные эллиптические интегралы:

$$gF(\tfrac{\pi}{2};\, k_+^{(i)}) + (\lambda_+^{(i)} - 1)\,\Pi(\tfrac{\pi}{2},\, \lambda_+^{(i)},\, k_+^{(i)}) = \pi(n - 1/4).$$

Когда $m - E \ll m$ $k_+^{(i)} \to 1$, поэтому, используя асимптотические формулы для эллиптических интегралов, находим при $i = 1,3$

$$E_n^{(i)} = m\{1 - \frac{4\cdot 2^i g^2}{g^2 + a^2m^2}\exp[-\frac{2\pi}{g}(n - \frac{1}{4})]\}. \qquad /4.10/$$

Для любых значений константы связи g формула /4.10/, очевидно, справедлива при больших значениях квантового числа n.

В случае $E = 0$ /при $i = 1,2$/ функции /4.5/, /4.6/ и условие квантования /4.7/ упрощаются и принимают, соответственно, вид

$$\mathcal{F}_+(\chi) = C_+\left(\frac{ch^2\chi}{g^2 - a^2m^2ch^2\chi}\right)^{1/4}\sin\{g\arcsin\frac{g\,th\,\chi}{\sqrt{g^2 + a^2m^2}} - am\,\mathrm{arctg}\frac{am\,sh\,\chi}{\sqrt{g^2 - a^2m^2ch^2\chi}}\}; \quad \chi < \chi^*, \qquad /4.11/$$

$$\mathcal{F}_+(\chi) = \frac{(-1)^n}{2}C_+\left|\frac{ch^2\chi}{g^2 - a^2m^2ch^2\chi}\right|^{1/4}\exp\{g\,\mathrm{Arth}\frac{\sqrt{a^2m^2ch^2\chi - g^2}}{g\,sh\,\chi} - am\,\mathrm{Arth}\frac{\sqrt{a^2m^2ch^2\chi - g^2}}{am\,sh\,\chi}\}; \quad \chi > \chi^*, \qquad /4.12/$$

$$g = am + 2n + 3/2. \qquad /4.13/$$

В области применимости ВКБ-решений

$$\left|\frac{g^2}{ch^2\chi} - a^2m^2\right|^{3/2} \gg m^2g^2\,th\,\chi$$

нетрудно установить приближенное совпадение функций /4.11/, /4.12/ и условия /4.13/ с соответствующими точными решениями [9].

Рассмотрим теперь краевую задачу, соответствующую потенциалу /2.11/. Уравнение /2.21/ в этом случае отличается от /4.1/ только знаком перед вторым слагаемым и имеет вид уравнения Шредингера с положительной энергией. На первый взгляд, спектр тогда должен быть непрерывным. Это, однако, не так, поскольку граничное условие на бесконечности для случая квазипотенциала V_-

$$\lim_{\chi\to\infty}\{\cos(am\chi)\,\mathcal{F}'_-(\chi) + am\sin(am\chi)\,\mathcal{F}_-(\chi)\} = 0 \qquad /4.14/$$

отличается от граничного условия для уравнения Шредингера.

В рассматриваемой задаче вся область изменения χ является классически доступной. ВКБ-решением, удовлетворяющим граничному условию в нуле, будет функция

$$\mathcal{F}_-(\chi) = C_- \frac{1}{\sqrt{\kappa_-(\chi)}} \sin\left\{ \int_0^{\chi} \kappa_-(\chi')\, d\chi' \right\}, \qquad /4.15/$$

где $\kappa_-(\chi)$ определено в /4.4/. При выполнении условия $a^2m^2 \gg g^2$ функция /4.15/ применима при всех значениях χ. Подстановка /4.15/ в /4.14/ приводит к соотношению

$$\lim_{\chi\to\infty} \left\{ \cos(am\chi)\cos\int_0^{\chi} \kappa_-(\chi')\, d\chi' + \right.$$
$$\left. + \sin(am\chi)\sin\int_0^{\chi} \kappa_-(\chi')\, d\chi' \right\} = 0,$$

из которого вытекает условие квантования

$$\int_0^{\infty} \left\{ \sqrt{a^2 - g^2 G_i(E_n^{(i)}, m\,\mathrm{ch}\,\chi)} - a \right\} m\, d\chi = \pi(n - 1/2). \qquad /4.16/$$

Волновая функция /4.15/ при $i = 1,3$ выражается через эллиптические интегралы:

$$\mathcal{F}_-(\chi) = \frac{C_-}{\sqrt{\kappa_-(\chi)}} \sin\{ gA[F(\phi_-^{(i)}, k_-^{(i)}) +$$
$$+ (\eta^{(i)} - 1)\,\Pi(\phi_-^{(i)}, \lambda_-^{(i)}, k_-^{(i)})]\}. \qquad /4.17/$$

Здесь

$$\sin^2\phi_-^{(i)} = \frac{1}{\lambda_-^{(i)}} \frac{G_i(E, m\,\mathrm{ch}\,\chi)}{G_i(m, m\,\mathrm{ch}\,\chi)}; \quad \eta^i = 1 - \frac{a^2}{g^2} G_i^{-1}(E, m),$$

остальные параметры принимают следующие значения:

а/ при $|k_0^{(i)}| < g/am$

$$k_-^{(i)} = (k_0^{(i)}\sqrt{\eta^{(i)}})^{-1}; \quad \lambda_-^{(i)} = \eta^i; \quad A = 1;$$

б/ при $|k_0^{(i)}| > g/am$

$$k_-^{(i)} = k_0^{(i)}\sqrt{\eta^{(i)}}; \quad \lambda_-^{(i)} = (k_-^{(i)})^{-1}; \quad A = k_0^{(i)}(\eta^{(i)})^{-1/2}.$$

Условие квантования в соответствии с /4.16/, /4.17/ может быть представлено в виде

$$\lim_{\chi\to\infty} \{ gA[F(\phi_-^{(i)}, k_-^{(i)}) + (\eta^{(i)} - 1)\,\Pi(\phi_-^{(i)}, \lambda_-^{(i)}, k^{(i)})] - am\chi \} =$$
$$= \pi(n - 1/2).$$

Можно показать, что в киральном пределе $(E = 0)$ краевая задача /2.21/-/2.23/ для $i = 1,2$ и потенциала V_- имеет следующее точное решение:

$$\mathcal{F}_-(\chi) = \Gamma(1 - iam)\, P_{\nu}^{iam}(\mathrm{th}\,\chi) + \Gamma(1 + iam)\, P_{\nu}^{-iam}(\mathrm{th}\,\chi), \qquad /4.18/$$

$$\mathrm{Re}\{\Gamma(1 + iam)\,\Gamma(-\nu + iam)\sin[\tfrac{\pi}{2}(\nu - iam)]\} = 0. \qquad /4.19/$$

Соответствующее ВКБ-решение при $E = 0$ запишется согласно /4.15/-/4.16/ в виде

$$\mathcal{F}_-(\chi) = C_-\left(\frac{\mathrm{ch}^2\chi}{a^2m^2\mathrm{ch}^2\chi + g^2} \right)^{1/4},$$
$$\qquad /4.20/$$
$$\sin\left\{ am\,\mathrm{Arth}\frac{am\,\mathrm{sh}\,\chi}{\sqrt{a^2m^2\mathrm{ch}^2\chi + g^2}} + g\arcsin\frac{g\,\mathrm{sh}\,\chi}{\sqrt{g^2 + a^2m^2}} \right\},$$

$$g\arcsin\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2m^2}} + am\ln\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2m^2}} = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right). \qquad /4.21/$$

Если выполняется условие применимости, ВКБ-выражения /4.20/, /4.21/ приближенно совпадают с точными выражениями /4.18/, /4.19/.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе нами рассмотрен класс квазипотенциалов, для которых интегральные уравнения в импульсном пространстве сводятся к дифференциальной задаче Штурма-Лиувилля. Краевые условия этой задачи оказываются зависящими от выбора квазипотенциала. Полученная задача Штурма-Лиувилля решена методом ВКБ. В киральном пределе найденные решения сравниваются с точными, известными ранее.

Следует подчеркнуть, что исследование квазипотенциала V_0 имеет, по существу, отношение к релятивистской кулоновской проблеме, поскольку поведение кулоновского квазипотенциала и V_0 в релятивистском конфигурационном представлении при малых r совпадают.

В заключение авторы выражают благодарность за обсуждения А.А.Афонину, Е.А.Дею, С.П.Кулешову, Н.В.Максименко, В.И.Саврину, Г.Ю.Тюменкову, Ю.Д.Черниченко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. - Nuovo Cim., 1963, 29, No.2, p.380.
2. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. - В кн.: Проблемы теоретической физики /Сб., посвященный Н.Н.Боголюбову в связи с его 60-летием/. - М.: Наука, 1969, с.261.
3. Kadyshevsky V.G. - Nucl.Phys., 1968, v.86, No.1, p.125.
4. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. - ЯФ, 1979, 30, № 4, с.1079.
5. Капшай В.Н., Линкевич А.Д., Саврин В.И., Скачков Н.Б. - ТМФ, 1982, 53, № 3, с.388.
6. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. - ЭЧАЯ, 1972, т.2, вып.3, с.635.
7. Filippov A.T. - Nuovo Cim., 1968, v.38, No.5, p.596.
8. Гогохия В.Ш., Филиппов А.Т. - ТМФ, 1974, т.21, № 1, с.37.
9. Капшай В.Н., Кулешов С.П., Скачков Н.Б. - ТМФ, 1983, т.55, № 3, с.348.
10. Фреман Н., Фреман П. ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967.
11. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.1,2. М.: Наука, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика