ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-87-256

Нгуен Суан Хан

САМОСОГЛАСОВАННОЕ КВАНТОВАНИЕ НЕАБЕЛЕВОЙ ТЕОРИИ В АКСИАЛЬНОЙ КАЛИБРОВКЕ

Направлено в журнал "Известия высших учебных заведений - Физика"

1987

Введение

Аксиальная калибровка $A_3 = 0$, предложенная впервые в работе /I/, является линейной калибровкой, где не возникают т.н. духи Фаддеева - Попова /2/. Поэтому она играет важную роль в пертурбативных вычислениях неабелевых теорий /3/.

Первая попытка получения гамильтоновой формулировки в аксиальной калибровке была выполнена Арновиттом и Фиклёром /I/. Однако Швингер впоследствии показал, что их результаты не согласованы с граничными условиями, которым подчиняются физические переменные поля, для того, чтобы гамильтониан был свободен от бесконечности /4/. Устранение этой сингулярности было выполнено Чодосом /5/, но коммутационные соотношения в /5/ ещё не согласуются с гипотезой об исчезающем поле в пространственной бесконечности.

Основная цель данной работы состоит в построении самосогласованной гамильтоновой формулировки калибровочной теории в аксиальной калибровке, свободной от указанных выше трудностей. Для этого мы используем минимальное каноническое квантование неабелевой теории, предложенной в работах /6-8/. В отличие от результата Чодоса, полученные коммутационные соотношения не только приводят к правильным уравнениям движения, к удовлетворению критерия лоренц-инвариантности Швингера /9/, но и согласуются с тем, что все компоненты электрического и магнитного полей исчезают на пространственной бесконечности. Вследствие этого гамильтониан, выраженный в терминах этих полей, конечен и хорошо определен. Это связано с использованием минимальной схемы квантования, которая позволяет выделить поперечные поля единственным образом и отделить их от нулевой моды, не исчезающей в пространственной бесконечности.

В первом разделе приведены основные моменты схемы минимального квантования и результаты последовательной гамильтоновой формулировки калибровочной теории в терминах калибровочно-инвариантных поперечных переменных /7,8/. Во втором разделе выводятся коммутационные соотношения с помощью точечного операторного калибровочного преобразования, проверяется лоренц-инвариантность схемы в аксиальной калибровке и строится соответствующий функциональный интеграл.

I. Выделение поперечных переменных

Рассмотрим теорию Янга – Миллса с лагранжианом.

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \nabla_\mu - m)\Psi , \quad S = \int d^4x\, \mathcal{L}(x),$$

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \hat{A}_\mu , \quad \hat{A}_\mu = g\frac{A^a_\mu \tau_a}{2i}, \qquad (1)$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu ,$$

который инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\hat{A}^g_\mu = g(\hat{A}_\mu + \partial_\mu)g^{-1}, \quad \psi^g = g\psi , \qquad (2)$$

где $g(\vec{x},t)$ есть матрица со значениями в группе $SU(2)$ (или $SU(N)$). Для построения гамильтониана теории необходимо явно выделить истинные динамические переменные /10/. С этой целью образуем уравнение связи – классическое уравнение на компоненты A^a_0, не имеющие канонического импульса

$$\frac{\delta S}{\delta A^a_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\nabla_i^2 A_0)^a - \nabla_i^{ab}\partial_0 A^b_i = j^a_0 ,$$

$$\left(\nabla_i^{ab}(A) = \delta^{ab}\partial_i + g\varepsilon_{abc}A^c_i , \; j^a_\mu = g\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}\psi\right). \qquad (3)$$

Формальное решение (3) можно представить в виде

$$A^a_0 = \partial_0 c(t)\Phi^a + \left[\frac{1}{\nabla_i^2}\right]^{ab}_{Reg}\left[(\nabla_i \partial_0 A_i)^b + j^b_0\right], \qquad (4)$$

где $\nabla_i^2 \Phi^a = 0$. Коэффициент $\dot{c}(t)$ играет роль нулевой моды, которая как было показано в работе /6/, описывает инфракрасные особенности неабелевой теории в пространственной бесконечности и может приводить:

1) к нарушению обычной релятивистской инвариантности теории,
2) к неисчезающим ваумным глюонным полям ($E \neq 0, B \neq 0$),
3) к добавлению бесконечной величины энергии вакуума в гамильтониан системы.

Поэтому в данной работе первое слагаемое в (4) не рассматриваем. Это означает, что мы используем класс основных функций квантовой теории поля, убывающих на пространственной бесконечности. При этом оператор $[\nabla_i]^{-2}$ будет хорошо определен. Лагранжиан (I) с учетом решения (4) в терминах калибровочно-инвариантных поперечных переменных A_i^T, ψ^T имеет вид /7,8/

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}[F_{0i}(A^T)]^2 - \frac{1}{4}[F_{ij}(A^T)]^2 - j^T_i A^T_i + \frac{1}{2} j^T_0 \frac{1}{\nabla^2} j^T_0 + \bar{\psi}^T(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi^T , \qquad (5)$$

где

$$F_{0i}(A^T) = \left(\delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\nabla\partial}\nabla_j\right)F^T_{0j} - \partial_i \frac{1}{\nabla\partial} j^T_0 ,$$

$$F^T_{0i} = \partial_0 A^T_i , \quad \nabla\partial = \nabla_i \partial_i . \qquad (6)$$

Этот лагранжиан точно совпадает с лагранжианом в кулоновской калибровке. Здесь и в дальнейшем, где нет необходимости явно выписать цветовые индексы, мы их опускаем.

Физические наблюдаемые (гамильтониан, импульс, и т.д.) можно выразить только в терминах калибровочно-инвариантных переменных A^T_i, ψ^T, если использовать для их построения калибровочно – инвариантный тензор энергии – импульса Белинфанте.

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \nabla_\nu)\Psi - g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{i}{2}\partial_\lambda(\bar{\Psi}\Gamma_{\lambda\mu\nu}\Psi), \qquad (7)$$

где

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\lambda, \gamma_\mu]\gamma_\nu + g_{\mu\nu}\gamma_\lambda - g_{\nu\lambda}\gamma_\mu .$$

Гамильтониан, импульс и тензор Лоренца имеют следующий вид :

$$H = \int d^3x\, T_{00} = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}F^2_{0i} + \frac{1}{4}F^2_{ij} + \bar{\Psi}^T(i\gamma_k \nabla_k + m)\Psi^T\right\},$$

$$P_k = \int d^3x\, T_{0k} = \int d^3x \left\{F_{0i}F_{ki} + \psi^{+T} i\nabla_k \psi^T + \frac{i}{4}\partial_i(\psi^{+T}[\gamma_k, \gamma_i]\psi^T)\right\}, \qquad (8)$$

$$M_{0k} = x_k H - tP_k + \int d^3x\,(y_k - x_k)T_{00} .$$

В соответствии с предписаниями канонического квантования, поля A^T_i и $F_{0i}(A^T)$ считаются независимыми переменными. Поскольку они тождественно удовлетворяют условию поперечности $\partial_i A^T_i = 0$ и уравнению Гаусса $\nabla_i F_{0i} = j^T_0$, то мы должны выбрать коммутационные соотношения, тождественно удовлетворяющие обоим условиям

$$i[F^a_{0i}(\vec{x},t), A^{Tb}_j(\vec{y},t)] = \left(\delta_{ij}\delta^{ab} - \partial_i\left(\frac{1}{\nabla\partial}\nabla_j\right)^{ab}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}),$$

$$\{\psi^T_\alpha(\vec{x},t), \psi^{+T}_\beta(\vec{y},t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \qquad (9)$$

В этом случае квантование поперечных калибровочно-инвариантных переменных A^T_i, ψ^T полностью совпадает со схемой операторного квантования Швингера, изложенной в /9/, где рассмотрены все вопросы доказательства релятивистской ковариантности теории, трансформационные свойства полей A^T_i, ψ^T и выбор контрчленов, связанных с упорядочиванием операторов в нелинейном гамильтониане.

2. Аксиальная калибровка

Для перехода от кулоновской калибровки совершим точечное операторное преобразование /II/

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}\hat{A}_i &= v_3(A^T)\,(\hat{A}_i^T + \partial_i)\,v_3(A^T)^{-1}, \\
{}^{(3)}\psi &= v_3(A^T)\,\psi^T, \\
{}^{(3)}F_{0i} &= v_3(A^T)\,F_{0i}(A^T)\,v_3(A^T),
\end{aligned} \tag{I0}
$$

которое эффективно ведет к выбору другой калибровки. В частности, в аксиальной калибровке ${}^{(3)}A_3 = 0$ находим

$$
\begin{aligned}
&\partial_3\, v_3(A^T) = v_3(A^T)\,\vec{A}_3^{\,T}, \\
&v_3(A^T) = T_z \exp\Big\{\frac{1}{\partial_3}\vec{A}_3^{\,T}\Big\} = T_z \exp\Big\{-\frac{1}{\partial_3^2}\,\partial_I \vec{A}_I^{\,T}\Big\},
\end{aligned} \tag{II}
$$

$I = 1,2.$

Переменные ${}^{(3)}A_I$, ${}^{(3)}\psi$ также инвариантны относительно калибровочных преобразований исходных полей A_i, ψ, так как они выражаются через инвариантные переменные A_i^T, ψ^T.

С учетом (I0,II) "аксиальные поля" ${}^{(3)}A_I$ определяются в явном виде формулой

$$
{}^{(3)}A_I = \Big(\delta_{Ii} - \partial_I \frac{1}{\partial_3}\delta_{3i}\Big) A_i^T. \tag{I2}
$$

В аксиальной калибровке имеем

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}F_{0I} &= v_3(A^T)\,F_{0I}(A^T)\,v_3(A^T)^{-1}, \\
{}^{(3)}F_{03} &= -\frac{1}{\partial_3}\big(\nabla_I {}^{(3)}F_{0I} - j_0^3\big), \quad j_0^3 = v_3 J_0^T v_3^{-1}.
\end{aligned} \tag{I3}
$$

Используя (9,I2,I3), найдем следующие коммутационные соотношения :

$$
\begin{aligned}
& i\big[{}^{(3)}F_{0I}(\vec{x},t), {}^{(3)}A_K^b(\vec{y},t)\big] = \delta^{ab}\,\delta_{IK}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\
& \big\{{}^{(3)}\psi_\alpha(\vec{x},t), {}^{(3)}\psi^+_\beta(\vec{y},t)\big\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\
& i\big[{}^{(3)}F_{03}^a(\vec{x},t), {}^{(3)}A_K^b(\vec{y},t)\big] = \theta(y_3 - x_3)\,\nabla_K^{ab}\,\delta^2(x_\perp - y_\perp),
\end{aligned} \tag{I4}
$$

$$
\big[{}^{(3)}F_{IK}^a(\vec{x},t), {}^{(3)}F_0^b(\vec{y},t)\big] = \delta(x_3 - y_3)\big[\delta_{IL}\nabla_K^{ab}(x) - \delta_{KL}\nabla_I^{ab}(x)\big]\delta^2(x_\perp - y_\perp),
$$

которые индуцированы аналогичными коммутационными соотношениями, записанными в кулоновской калибровке; заметим, что в аксиальной калибровке

$$
\big[{}^{(3)}F_{0I}(\vec{x},t), {}^{(3)}F_{0K}(\vec{y},t)\big] = 0 \;; \quad \big[{}^{(3)}F_{KI}(\vec{x},t), {}^{(3)}F_{0I}(\vec{y},t)\big] = 0 .
$$

Поэтому в отличие от кулоновской калибровки здесь не возникает проблемы упорядочивания бозе-операторов.

В терминах калибровочно-инвариантных переменных ${}^{(3)}A_I$, ${}^{(3)}\psi$ гамильтониан, импульс и тензор Лоренца имеют следующие формы :

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3x\, T_{00} = \int d^3x \Big\{\frac{1}{2}{}^{(3)}F_{0I}^2 + \frac{1}{2}{}^{(3)}F_{03}^2 + \frac{1}{4}F_{IK}^2 + \frac{1}{2}(\partial_3 {}^{(3)}A_I)^2 + \\
&\quad + {}^{(3)}\bar{\psi}(i\gamma_I \nabla_I + m){}^{(3)}\psi + {}^{(3)}\bar{\psi}\, i\gamma_3 \partial_3 {}^{(3)}\psi\Big\}, \\
P_I &= \int d^3x \Big\{{}^{(3)}F_{0K} F_{IK} - {}^{(3)}F_{03}\,\partial_3 {}^{(3)}A_I + {}^{(3)}\psi^+ i\partial_I {}^{(3)}\psi + \frac{i}{4}\partial_i\big({}^{(3)}\psi^+[\gamma_i,\gamma_I]{}^{(3)}\psi\big)\Big\}, \\
P_3 &= \int d^3x \Big\{{}^{(3)}F_{0K}\,\partial_3 {}^{(3)}A_K + {}^{(3)}\psi^+ i\partial_3 {}^{(3)}\psi + \frac{i}{4}\partial_I\big({}^{(3)}\psi^+[\gamma_I,\gamma_3]{}^{(3)}\psi\big)\Big\}, \\
M_{0i} &= x_i H - t P_i + \int d^3x\,(y_i - x_i)\,T_{00},
\end{aligned} \tag{I5}
$$

где $i = 1,2,3;\ I, K = 1,2.$

Используя полученные коммутационные соотношения (I9-22), легко показать, что операторы (I5) удовлетворяют алгебре полной группы преобразований Пуанкаре.

В такой теории выполняются соотношения Гейзенберга

$$
i\big[P_\mu, {}^{(3)}\psi(x)\big] = \frac{\partial\, {}^{(3)}\psi(x)}{\partial x^\mu}, \quad i\big[P_\mu, {}^{(3)}A_I\big] = \frac{\partial\, {}^{(3)}A_I}{\partial x^\mu}
$$

и критерий лоренц-инвариантности Швингера

$$
\frac{1}{i}\big[T_{00}(x), T_{00}(y)\big] = -\big(T_{0i}(x) + T_{0i}(y)\big)\,\partial_i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}),
$$

что также доказывается непосредственным вычислением. Совершая бесконечный малый лоренц-поворот (генерируемый бустом M_{0i}), можно увидеть, что операторы ${}^{(3)}A_I$, ${}^{(3)}\psi$ не приобретают никакой дополнительной калибровочной функции по сравнению с кулоновской калибровкой

$$
\begin{aligned}
i\big[M_{0i}, {}^{(3)}A_I(y)\big] &= y_0\,\partial_i {}^{(3)}A_I - y_i\,\partial_0 {}^{(3)}A_i, \\
i\big[M_{0i}, {}^{(3)}\psi(y)\big] &= y_0\,\partial_i {}^{(3)}\psi - y_i\,\partial_0 {}^{(3)}\psi.
\end{aligned}
$$

Таким образом, построенная нами теория лоренц-инвариантна. Коммутационные соотношения, полученные в формулировке Чодоса, не согласуются с гипотезой об исчезающем поле в пространственной бесконечности [12], поэтому алгебра полной группы преобразований Пуанкаре в [5] является небоснованной. В нашем случае гамильтониан, выраженный формулой (15), приводит к правильным уравнениям движения, не содержит бесконечную величину энергии вауума, поэтому он хорошо определен.

В заключение этого раздела по методу, предложенному в работе [13], можно написать функциональный интеграл в аксиальной калибровке

$$Z_3[\eta, \bar{\eta}, J] = \int d\bar{\Psi} d\Psi \prod_a d^4 A_\mu^a \, \delta[A_3] \times$$
$$\times \exp\{ i S[A] + i \int d^4x [\bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi + J_\mu A_\mu] \}.$$

Заключение

В работе предложена самосогласованная гамильтоновая формулировка калибровочной теории в аксиальной калибровке путем использования минимального канонического квантования [7,8]. В этом методе удается выделить истинные поперечные переменные, которые удовлетворяют требованиям класса основных функций квантовой теории поля и имеют хорошее асимптотическое поведение в пространственной бесконечности. В терминах этих переменных гамильтониан, приводящий к правильным уравнениям движения, конечен и определен.

Автор благодарит Б.М. Барбашова, А.В. Ефремова, В.Н. Первушина, Ю.Л. Калиновского за обсуждение результатов настоящей работы.

Литература

1. Arnowitt R.L., Fickler S.I. Phys. Rev., 1962, 127, p. 1821.
2. Kummer W. Acta Phys. Austrica 1975, 41, p. 315.
3. Dokshizer Yu.L., Dyakonov D.I., Troyan S.I. Phys. Rep., 1980, 58, p.270.
4. Schwinger J. Phys. Rev., 1962, 130, p. 402.
5. Alan Chodos. Phys. Rev., 1978, D17, p. 2624.
6. Pervushin V.N. Riv. Nuov. Cim., 1985, c.8, No 10, p. 1.
7. Илиева Н.П., Нгуен Суан Хан, Первушин В.Н. Ядерная физика, 1987, т.45, с.1169.
   Preprint JINR, E2-86-283, Dubna, 1986.
8. Нгуен Суан Хан, Первушин В.Н. Препринт ОИЯИ Р2-86-645, Дубна, 1986 г.
9. Schwinger J. Phys. Rev., 1962, 127, p. 324.

10. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей - М: Наука, 1978, с. 77.
11. Girotti H.O., Rothe H.J. Phys. Lett., 1982, 118B, p. 257.
12. Simoes J.M., Girotti H.O. Ann. Phys., N.Y. 1986, 169, p. 1.
13. Fradkin E.S., Vilkovisky G.A. CERN preprint TH 2332, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 апреля 1987 года.