

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**P2-87-216**

**В.А.Бейлин\*, А.В.Радюшкин**

**ФОРМФАКТОРЫ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ СОСТОЯНИЙ  
ИЗ ПРАВИЛ СУММ КХД**

---

\* Ростовский государственный университет

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Современная теория сильновзаимодействующих частиц — квантовая хромодинамика (КХД) — представляет собой комплекс достаточно сложных вычислительных методов, идейной основой которого являются принципы квантовой теории поля в соединении с гипотезой конформности<sup>1/</sup>. Наличие асимптотической свободы<sup>2,3/</sup> обусловило возможность использования методов теории возмущений, а описание сложной природы вакуума КХД с помощью универсальных феноменологических параметров — вакуумных средних кварковых и глюонных полей — привело к разработке техники правил сумм<sup>4/</sup>. Эта техника имеет довольно общую природу — она применима, в частности, и к квантовомеханическим системам "с асимптотической свободой"<sup>5/</sup> (т.е. с потенциалом взаимодействия, обращающимся в нуль на малых расстояниях). Простые квантовомеханические системы, для которых известны точные значения характеристик уровней, могут, таким образом, служить своеобразным "полигоном", на котором можно апробировать новые расчетные приемы в рамках метода правил сумм.

В работе<sup>5/</sup> исходным объектом исследования является величина

$$M(n, E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\Psi_k(0)|^2}{[1 + E_k/E]^{n+1}}; \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где  $\Psi_k(x)$  — собственная функция,  $E_k$  — собственная энергия  $k$ -го уровня системы,  $E$  — внешний параметр, имеющий размерность энергии. Важно, что сумма (1) выражается через производные от функции Грина под порогом, т.е.

$$M(n, E) = \frac{(-E)^{n+1}}{n!} \left[ \frac{d}{dE} \right]^n G(\bar{x}, E) \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ E \rightarrow -E}}. \quad (2)$$

В пределе  $E \rightarrow \infty$  функция  $G(\bar{x}, E)$  близка к свободной функции Грина, и поэтому  $M(n, E)$  отличается от аналогичной функции  $M_0(n, E)$  для свободного движения на степенные  $O(1/E^k)$  поправки, которые естественно возникают для потенциалов, зависящих от  $r$  степенным образом<sup>5/</sup>. Это явление названо в<sup>5/</sup> "асимптотической свободой" по аналогии с КХД, где  $\pi(Q^2)$  для фотона под порогом определяется свободными функциями Грина. Кроме того, в<sup>5/</sup> было выяснено, что пара-

метры основного состояния системы надежно определяются только из борелевских правил сумм.

В настоящей работе мы хотим проанализировать правила сумм для формфактора низшего состояния системы в модели гармонического осциллятора и обсудить возможность извлечения информации о его "зарядовом радиусе". Такого типа ПС уже использовались при нахождении электромагнитного радиуса пиона<sup>/6/</sup> и К-мезонов<sup>/7/</sup>.

В разделе 2 мы обсудили ПС для "формфактора" осциллятора, в разделе 3 попробуем найти "радиус" основного уровня. В заключении дано резюме полученных результатов.

## 2. "ФОРМФАКТОР" ОСЦИЛЛЯТОРА ИЗ ПРАВИЛ СУММ

Рассмотрим по аналогии с (1) объект вида

$$F(q, E_1, E_2) = \int d^N x e^{iqx} \frac{\Psi_k(x) \Psi_k^*(0) \Psi_\ell(0) \Psi_\ell^*(x)}{(E_k + E_1)(E_\ell + E_2)} = \sum_{k, \ell=0}^{\infty} \frac{\Psi_k^*(0) F_{\ell k}(q) \Psi_\ell(0)}{(E_k + E_1)(E_\ell + E_2)}, \quad (3)$$

где  $\Psi_k(x)$  — нормированные волновые функции k-го состояния N-мерного гармонического осциллятора,  $E_1, E_2$  — внешние параметры.

Можно записать (3) также в виде

$$F(q, E_1, E_2) = \int d^N x e^{iqx} G(x, E_1) G^*(x, E_2). \quad (4)$$

Определение (3) приводит к появлению "формфактора"  $F_{\ell k}(q)$ , который при малых  $g^2$  характеризуется среднеквадратичным радиусом волновой функции системы<sup>/8/</sup>. Наша цель состоит в построении ПС, в которых основной вклад дает низший уровень осциллятора и из которых также можно определить "зарядовый радиус" этого уровня. Имея в виду опыт работы<sup>/5/</sup>, перейдем сразу к борелевским образам, используя определение

$$\hat{B}_\epsilon \frac{1}{E_k + E} = e^{-E_k/\epsilon}. \quad (5)$$

Дважды применяя (5), из (3) и (4) получим

$$F_B(q, \epsilon_1, \epsilon_2) = \int G_B(x, \epsilon_1) G_B^*(x, \epsilon_2) e^{iqx} d^N x =$$

$$= \sum_{k, \ell=0}^{\infty} \Psi_k^*(0) F_{\ell k}(q^2) \Psi_\ell(0) e^{-E_k/\epsilon_1} e^{-E_\ell/\epsilon_2}. \quad (6)$$

Полагая в (3) сразу  $E_1 = E_2$ , можно воспользоваться и методом однократного преобразования Бореля<sup>/6/</sup>. Переход между двумя типами получающихся выражений осуществляется с помощью формулы

$$\Phi_B(q, \epsilon) = \int_0^\infty d\nu_1 \int_0^\infty d\nu_2 F_B(q, 1/\nu_1, 1/\nu_2) \delta(\nu_1 + \nu_2 - 1/\epsilon). \quad (7)$$

Используем теперь точный вид  $G_B(x, \epsilon)$ :

$$G_B(x, \epsilon) = \left[ \frac{m\omega}{2\pi \operatorname{sh}(\omega/\epsilon)} \right]^{N/2} \exp \left\{ -\frac{m\omega x^2 \operatorname{ch}(\omega/\epsilon)}{2 \operatorname{sh}(\omega/\epsilon)} \right\}. \quad (8)$$

Подставляя в (6) и раскладывая по  $\omega/\epsilon$ , находим следующие ПС:

$$\left( \frac{m\omega}{\pi} \right)^{N/2} \left\{ F_{00}(q^2) e^{-\frac{N}{2} \left( \frac{\omega}{\epsilon_1} + \frac{\omega}{\epsilon_2} \right)} + F_{01}(q^2) e^{-\frac{N}{2} \left( \frac{\omega}{\epsilon_1} + \frac{\omega}{\epsilon_2} \right) - \frac{2\omega}{\epsilon_1}} + F_{11}(q^2) e^{-\left( \frac{N}{2} + 2 \right) \left( \frac{\omega}{\epsilon_1} + \frac{\omega}{\epsilon_2} \right)} + \dots \right\} = \left[ \frac{m\omega}{2\pi(1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2)} \right]^{N/2} \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{\omega^2}{6} \left( \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right)^2 + \frac{\omega^4}{180} \left( \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right)^4 + \dots \right]^{N/2} \exp \left\{ -\frac{q^2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left( 1 - \frac{\omega^2}{3\epsilon_1\epsilon_2} + \dots \right) \right\}.$$

Здесь при  $N=2$

$$F_{00} = e^{-q^2/4m\omega}, \quad F_{11} = \left( 1 - \frac{q^2}{4m\omega} \right)^2 e^{-q^2/4m\omega}, \quad F_{01} = F_{10} = \frac{q^2}{4m\omega} e^{-q^2/4m\omega}. \quad (10)$$

"Тождества Уорда" проверяются сразу же: полагая в (9)  $N=3, q^2=0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2\epsilon$ , приходим к ПС для "2-точки" из<sup>/5/</sup>. При этом, согласно (10),  $F_{00} = F_{11} = 1$ ,  $F_{01} = F_{10} = 0$ . Отметим, что для "борновского члена" можно записать двойное спектральное представление, найдя спектральную плотность известным методом<sup>/9/</sup>. Тогда для двухточечной функции получаем (для простоты будем рассматривать 2-мерный осциллятор):

$$\frac{m}{2\pi} \left[ 1 - e^{-s_0/\epsilon} - \frac{1}{6} \left( \frac{\omega}{\epsilon} \right)^2 + \dots \right] = \frac{\omega}{\pi \epsilon} \left[ e^{-\omega/\epsilon} + e^{-3\omega/\epsilon} + \dots \right]. \quad (11)$$

Выбирая "точное" значение  $s_0 = 2\omega$  — между 1-м и 2-м резонансами и удерживая только первую степенную поправку, находим с точностью  $\leq 10\%$  хорошее выполнение ПС (11) при  $\epsilon/\omega = 0,8 \div 1,5$ . Здесь мы моделировали вклад высших уровней интегралом

$$\int_{s_0}^{\infty} \rho(s) e^{-s/\epsilon} ds,$$

однако для осциллятора нет континуума состояний, а имеется их бесконечный дискретный набор. Посмотрим теперь, что можно получить для  $F_{00}^*(q^2)$ .

Запишем спектральное представление:

$$\frac{m\omega}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \exp \left\{ - \frac{q^2}{2m(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right\} = \int ds_1 ds_2 \rho(s_1, s_2) e^{-\frac{s_1}{\epsilon_1} - \frac{s_2}{\epsilon_2}}. \quad (12)$$

Действуя по рецепту<sup>/9/</sup>, находим

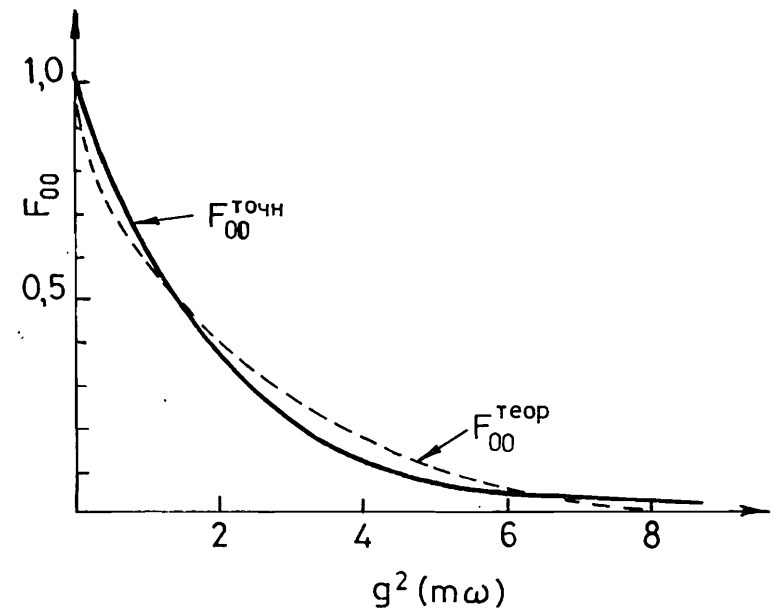
$$\rho(s_1, s_2) = \frac{m}{4\pi^2} \frac{\theta(4s_1 s_2 - (s_1 + s_2 - q^2)^2)}{[4s_1 s_2 - (s_1 + s_2 - q^2)^2]^{1/2}} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta \left( s_1 - \frac{(k+q)^2}{2m} \right) \delta \left( s_2 - \frac{k^2}{2m} \right).$$

Моделируя вклад низшего состояния интегралом по квадрату  $\theta(s_1 < s_0) \theta(s_2 < s_0)$ , в пределе локальной дуальности получаем при  $s_0 = 2\omega$ :

$$F_{00}^{\text{теор}}(q^2) = \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{q^2}{8m\omega}} - \sqrt{\frac{q^2}{8m\omega} \left( 1 - \frac{q^2}{8m\omega} \right)} \right\}. \quad (14)$$

Сравнение с точным значением (10) приводится на рисунке. Как видно, при  $q^2 \geq 8m\omega$   $F_{00}^{\text{теор}} = 0$ , тогда как точное значение  $F_{00}(q^2)$  отлично от нуля, но весьма мало. Заметим, однако, что ПС (9) можно использовать лишь при  $m\omega \leq q^2 \leq 3m\omega$ , чтобы при  $\epsilon/\omega \sim 1$  степенные вклады были  $\leq 30\%$ .

Можно найти также разложение спектральной плотности при малых  $q^2$ . Тогда вместо (13) получаем



$$\rho(s_1, s_2) = \frac{m}{2\pi} \delta(s_1 - s_2) - \frac{q^2}{4\pi} [s_1 \delta''_{s_1 s_2}(s_1 - s_2) - \delta'_{s_2}(s_1 - s_2)]. \quad (15)$$

Неплохое количественное описание поведения формфактора  $F_{00}(q^2)$  получается при использовании в ПС (9) формулы (13) для  $\rho(s_1, s_2)$ . При этом вновь можно обнаружить, что оптимальным значением параметра  $s_0$  является величина, близкая к  $2\omega$ .

### 3. ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ РАДИУСА ОСНОВНОГО УРОВНЯ ОСЦИЛЛЯТОРА

При попытке непосредственно вычислить из ПС (9) зарядовый радиус  $\langle r_{00}^2 \rangle$ , где

$$\langle r_{00}^2 \rangle = - \frac{dF_{00}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} = 1/4m\omega \text{ (точное значение)}, \quad (16)$$

мы сталкиваемся с определенными трудностями. Во-первых, из соотношения локальной дуальности (14) получается  $\langle r_{00}^2 \rangle_{\text{пок}} = \infty$ . Во-вторых, дифференцируя (9) по  $q^2$ , мы находим правила сумм для  $\langle r_{00}^2 \rangle$ , точность которых  $\sim 40 \div 50\%$ , вследствие роста степенных поправок

и заметно большего вклада высших состояний. Для повышения точности воспользуемся приемом, который применялся для определения радиусов  $\pi^-$  и К-мезонов <sup>6,7/</sup>. Поскольку выполняются "тождества Уорда", т.е., ПС (9)  $\rightarrow$  ПС (22) при  $q^2 \rightarrow 0$ , можно вычесть ПС (11) из ПС (9) без снижения точности; деля затем результат на  $q^2$ , получаем правила сумм для величины  $(F_{00}(q^2) - 1)/q^2$ , совпадающей при  $q^2 = 0$  с  $\langle r_{00}^2 \rangle$ ; вклады высших уровней при этом мы будем моделировать эффективными формфакторами — диагональным  $F'_{11}$  и недиагональными  $F'_{01}$  и  $F'_{10}$ . Таким образом, находим ПС в виде

$$\begin{aligned} & \left( \frac{F_{00} - 1}{q^2} \right) e^{-\omega/\epsilon} + \left( \frac{F'_{01} + F'_{10}}{q^2} \right) e^{-2\omega/\epsilon} + \left( \frac{F'_{11} - 1}{q^2} \right) e^{-3\omega/\epsilon} = (17) \\ & = - \frac{1}{16m\omega} \left[ 1 - \frac{q^2}{2m\omega} + \dots \right] \left[ 1 - \frac{\omega^2}{6\epsilon^2} + \frac{\omega^4}{180\epsilon^4} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Для масс эффективных состояний мы возьмем также значения масс ближайших возбужденных уровней. Это на самом деле слабо влияет на окончательные результаты.

Исключая вклады недиагональных формфакторов из (17) с помощью дифференцирования по  $\epsilon$  (после умножения обеих сторон (17) на  $e^{2\omega/\epsilon}$ ), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{F_{00} - 1}{q^2} - \left( \frac{F'_{11} - 1}{q^2} \right) e^{-2\omega/\epsilon} = \frac{e^{\omega/\epsilon}}{16m\omega^2} \left\{ (t/2m - 2\omega) + \right. \\ & \left. + \frac{\omega^2}{3\epsilon} + \frac{\omega^3}{3\epsilon^2} + t \left( \frac{\omega}{m\epsilon} - \frac{\omega^2}{4m\epsilon^2} - \frac{\omega^3}{6m\epsilon^3} \right) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Дифференцируя теперь ПС (18) по  $\epsilon$ , находим правила сумм, обработка которых в области  $\epsilon = (2 \div 4)\omega$  дает

$$\frac{F'_{11} - 1}{q^2} \approx -0,13/m\omega, \quad (19)$$

при  $q^2 = 0,01m\omega$ . Используя далее это значение в ПС (18), находим в области стабильности кривых  $\epsilon = (1 \div 4)\omega$  с точностью 10%:

$$\langle r_{00}^2 \rangle_{\text{теор}} = (0,23 \pm 0,02) \frac{1}{m\omega}. \quad (20)$$

Найденная величина хорошо согласуется с точным значением (16).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных результатов можно сделать несколько выводов. Во-первых, использование локальной дуальности для описания поведения  $F_{00}(q^2)$  вполне пригодно в области промежуточных ( $1 \leq q^2 \leq 3 \div 4m\omega$ ). При этом порог "континуума" практически точно находится между значениями "масс" уровней. (Однако все же для обоснования такого выбора  $s_0$  необходимо рассмотрение ПС с учетом степенных поправок). Локальная дуальность, однако, не позволяет определить величину среднеквадратичного радиуса основного уровня системы.

Во-вторых, для извлечения значения радиуса основного состояния из ПС (9) требуется некоторая модификация стандартной процедуры обработки ПС (см. раздел 3). Причина этого заключается в том, что, как видно из (5), в спектральную плотность вносят большой вклад высшие уровни, не лежащие на диагонали  $s_1 = s_2$ . Количественно этот эффект можно оценить, сравнивая эффективное значение (19) с соответствующей величиной для точного  $F'_{11}$ :

$$\frac{F'_{11} - 1}{q^2} \Big|_{q^2=0} = -0,75/m\omega.$$

Введение эффективного формфактора позволяет с точностью 10% зафиксировать величину радиуса  $\langle r_{00}^2 \rangle$  в простой модели двумерного гармонического осциллятора. Отметим, что число измерений осциллятора  $N$  не принципиально — аналогичные выводы следуют и из анализа ПС для 3,4-мерного осциллятора, однако выкладки при этом значительно более громоздки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. — *Phys. Lett.*, 1973, 44B, p.365.
2. Gross B.J., Wilczek F. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v.30, No.26, p.1343.
3. Politzer H.D. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v.30, No.26, p.1346.
4. Shifman M.A., Vainshtein A.I. — *Nucl. Phys.*, 1979, 147B, p.385.
5. Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. — *ЯФ*, 1980, т.32, в.6(12), с.1622.
6. Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. — *Письма в ЖЭТФ*, 1984, т.39, с.576.
7. Бейлин В.А., Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. *Препринт ОИЯИ Р2-87-134*, Дубна, 1987.
8. Липкин Г. *Квантовая механика*. М.: Мир, 1972.
9. Beilin V.A., Radyushkin A.V. — *Nucl. Phys.*, 1985, 260B, p.61.

Рукопись поступила в издательский отдел  
3 апреля 1987 года