объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-87-338

М.Ю.Ковалевский[1], С.В.Пелетминский[1],
Ю.В.Слюсаренко[2]

ТЕРМОДИНАМИКА И КИНЕТИКА СПИРАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ СТРУКТУР И МЕТОД КВАЗИСРЕДНИХ

Направлено в журнал "Теоретическая и
математическая физика"

[1] Харьковский физико-технический
институт АН УССР

[2] Харьковский государственный университет

1987

I. Введение

Современные эксперименты привели к открытию большого числа спиральных структур в магнитных веществах. Существует несколько физических механизмов, объясняющих их образование. Теоретическое исследование таких объектов было впервые проведено в работах [1–4], где показано, что спиральное магнитное упорядочение может быть обусловлено различием знака обменного взаимодействия между ближайшими атомными соседями и следующими за ними. Спектр элементарных возбуждений в этом подходе получен на основе анизотропного гамильтониана Гейзенберга, причем для описания ситуации ферромагнитной спирали (в отличие от случая простой спирали), в гамильтониан включались слагаемые, связанные с учетом четверных по спину S^4 взаимодействий.

В другом подходе [5–6] спиральная структура была связана с релятивистским взаимодействием, содержащим линейный по производным инвариант $\vec{S}\,\mathrm{rot}\,\vec{S}$, или с неоднородным обменным взаимодействием [7,8] в выражении для функционала магнитной энергии. Спектр спиновых волн находился в терминах феноменологических параметров этого функционала.

Спиральный магнетик является системой со спонтанно нарушенной симметрией. Это значит, что симметрия состояния равновесия ниже симметрии гамильтониана. Наличие спиральной магнитной структуры приводит к тому, что это состояние не является трансляционно-инвариантным и не обладает инвариантностью по отношению к поворотам спина вокруг оси спирали. Удобным математическим аппаратом для изучения систем со спонтанно нарушенной симметрией является метод квазисредних [9,10]. В настоящей работе проведено исследование магнитных систем со спиральной структурой на основе методов квазисредних и сокращенного описания [11]. Изучено равновесное состояние: построена термодинамика; плотности и плотности потоков аддитивных интегралов движения выражены в терминах термодинамического потенциала. Новые термодинамические параметры – вектор спирали $\vec{p}$ и фаза параметра порядка φ введены на основе метода квазисредних. Исследованы вопросы описания неравновесных процессов: дан вывод макроскопических уравнений движения с учетом процессов диссипации. Показано, что система характеризуется 10 кинетическими коэффициентами, которые представлены в терминах двухвременных корреляционных функций и удовлетворяют принципу Онзагера.

При исследовании указанных вопросов мы существенно использовали подход, развитый в работах [12–17] для систем со спонтанно нарушенной симметрией.

В описании сверхтекучей жидкости и магнитных структур имеется большая аналогия, которая впервые отмечена в [18] для магнетика типа

"Легкая плоскость"(в этом случае вектор спирали $\vec{p} = 0$ находится в состоянии статистического равновесия). Эту аналогию можно распространять дальше, а именно, как показано в [16], спиральные магнитные системы ($\vec{p} \neq 0$) аналогичны в определенном смысле сверхтекучим жидкостям с отличным от нуля сверхтекучим импульсом $\vec{p}$ в состоянии равновесия.

2. Термодинамика спирального магнетика

Для систем со спонтанно нарушенной симметрией состояние статистического равновесия обладает более низкой симметрией, чем симметрия гамильтониана. Удобной концепцией, позволяющей описывать системы со спонтанно нарушенной симметрией, является концепция квазисредних.

Согласно Н.Н.Боголюбову, средние значения в состоянии статистического равновесия (с нарушенной симметрией) определяются формулой

$$\langle \ldots \rangle = \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} Sp\, w_V \ldots \qquad , w_V = \exp\{\Omega_V - Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha - \nu Y_0 \hat{f}\} \qquad (2.1)$$

Здесь V – объём системы; $\hat{\gamma}_\alpha$ – операторы аддитивных интегралов движения по отношению к гамильтониану $\mathcal{H} \equiv \hat{\gamma}_0$; Y_α – сопряженные им термодинамические силы; Ω_V – термодинамический потенциал, определяемый из условия $Sp\, w_V = 1$. Оператор $\hat{f}$ обладает симметрией исследуемой среды и снимает вырождение состояния статистического равновесия. Предел

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} \frac{\Omega_V}{V} = \omega \qquad (2.2)$$

определяет плотность термодинамического потенциала.

Мы будем предполагать, что динамика системы определяется гамильтонианом $\mathcal{H}$, зависящим от узельных спиновых операторов $\vec{s}_\ell$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{s}_\ell)$, причем кроме самого оператора $\mathcal{H}$ существует еще один аддитивный интеграл движения $S^z \equiv \sum_\ell s_\ell^z$, так что $[\mathcal{H}, S^z] = 0$. В качестве примера такого гамильтониана можно иметь в виду гамильтониан анизотропного гейзенберговского магнетика

$$\mathcal{H}(\vec{s}_\ell) = -\sum_{\ell, m} \left\{ J_{\ell m}\, s_\ell^z s_m^z + J'_{\ell m}\, s_\ell^+ \cdot s_m^- \right\}, \qquad (2.3)$$

где $s_\ell^\pm = s_\ell^x \pm i s_\ell^y$ ($J_{\ell m}$, $J'_{\ell m}$ – "обменные" интегралы). При сдвиге спинов $\vec{s}_\ell \to \vec{s}_{\ell+m}$ гамильтониан $\mathcal{H}(\vec{s}_\ell)$ не должен изменяться, $\mathcal{H}(\vec{s}_{\ell+m}) = \mathcal{H}(\vec{s}_\ell)$.

Введём операторы плотностей аддитивных интегралов движения $\hat{\zeta}_\alpha(x)$, $\alpha = 0, z$; $\hat{\gamma}_\alpha = \int d^3x\, \hat{\zeta}_\alpha(x)$, ($\hat{\zeta}_0(x) \equiv \hat{\varepsilon}(x)$ – плотность энергии, $\hat{\zeta}_z(x) = \hat{s}(x)$ – плотность z –составляющей спина). Например,

$$\hat{\varepsilon}(x) = -\sum_{\ell, m} \delta\left(x - \frac{R_\ell + R_m}{2}\right) \cdot \left\{ J_{\ell m}\, s_\ell^z s_m^z + J'_{\ell m} \cdot s_\ell^+ s_m^- \right\}, \quad \hat{s}(x) = \sum_\ell s_\ell^z \cdot \delta(x - R_\ell),$$

где R_ℓ – радиус-вектор ℓ узла. Операторы $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ удовлетворяют дифференциальным законам сохранения

$$i[\mathcal{H}, \hat{\zeta}_\alpha(x)] = -\frac{\partial \hat{\zeta}_{\alpha k}(x)}{\partial x_k} \quad , \qquad \alpha = 0, z \qquad (2.5)$$

где $\hat{\zeta}_{\alpha k} = \{\hat{q}_k, \hat{j}_k\}$ – операторы плотностей потоков энергии и z-й компоненты спина, которые, согласно [12–13], имеют вид

$$\hat{q}_k(x) = \frac{i}{2} \int d^3x'\, x'_k \int_0^1 d\lambda\, [\hat{\varepsilon}(x - (1-\lambda)x'), \hat{\varepsilon}(x + \lambda x')],$$

$$\hat{j}_k(x) = i \int d^3x'\, x'_k \int_0^1 d\lambda\, [\hat{\varepsilon}(x - (1-\lambda)x'), \hat{s}(x + \lambda x')]. \qquad (2.6)$$

Статистический оператор рассматриваемой системы $\hat{\rho}$ строится из узельных операторов спина, $\rho = \rho(\vec{s}_\ell)$. Пространственно-однородное состояние не должно изменяться при трансляции спинов $\vec{s}_\ell \to \vec{s}_{\ell+m}$, т.е. $\rho(\vec{s}_{\ell+m}) = \rho(\vec{s}_\ell)$. Однако равновесное состояние спирального магнетика не является пространственно-однородным. Для спиральных структур смещение спинов $\vec{s}_\ell \to \vec{s}_{\ell+m}$ эквивалентно повороту на угол $\varphi_m \equiv \vec{p} \cdot \vec{z}_m$ вокруг оси z ($\vec{p}$ – вектор спирали магнитной структуры, $\vec{z}_m \equiv \vec{R}_{\ell+m} - \vec{R}_\ell$). Подчеркнем, что мы не предполагаем, что вектор спирали $\vec{p}$ параллелен оси z (в дальнейшем мы увидим, что при определенных условиях $\vec{p} \parallel z$). Таким образом, статистический оператор состояния, обладающего спиральной симметрией, обладает свойством

$$\rho(\vec{s}_{\ell+m}) = e^{-i\varphi_m S^z} \rho(\vec{s}_\ell)\, e^{i\varphi_m S^z} \quad , \qquad \varphi_m = \vec{p}\, \vec{z}_m \qquad (2.7)$$

(m – произвольно). В частности, таким свойством должен обладать равновесный статистический оператор (2.1). Поэтому бесконечно малый источник $\nu \hat{f}(\vec{s}_\ell)$, снимающий вырождение, должен удовлетворять соотношению

$$\hat{f}(\vec{s}_{\ell+m}) = e^{-i\varphi_m S^z} \hat{f}(\vec{s}_\ell)\, e^{i\varphi_m S^z}.$$

Замечая, что

$$e^{-i\psi_m S^z} \mathfrak{I}_\ell^z e^{i\psi_m S^z} = \mathfrak{I}_\ell^z, \quad e^{-i\psi_m S^z} \mathfrak{I}_\ell^\pm e^{i\psi_m S^z} = e^{\mp i\psi_m} \cdot \mathfrak{I}_\ell^\pm, \qquad (2.8)$$

легко заключить, что в качестве источника, снимающего вырождение, можно взять

$$\hat{f}(\vec{\mathfrak{I}}_\ell) = \sum_\ell{}' \left(e^{i(\vec{p}\vec{R}_\ell + \varphi)} \mathfrak{I}_\ell^+ + э.с. \right), \qquad (2.9)$$

где φ – некоторая фаза. Таким образом, равновесный статистический оператор, соответствующий спиральной магнитной структуре, имеет вид (см. [I6]):

$$W_V(t) = \exp\left\{ \Omega_V - Y_0 \mathcal{H} - Y_z S^z - \nu Y_0 \sum_\ell{}' \left(e^{i(\vec{p}\vec{R}_\ell + \varphi(t))} \mathfrak{I}_\ell^+ + э.с. \right) \right\}. \qquad (2.10)$$

Мы видим, что наряду с термодинамическими силами Y_0, Y_z статистический оператор W является функцией вектора спирали $\vec{p}$ и фазы φ, причем нетривиальная зависимость от последних остаётся после термодинамического предельного перехода и стремления V к нулю, т.е.

$$W(Y_\alpha, \vec{p}, \varphi) = \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} W_V. \qquad (2.11)$$

Введение источника $\hat{f}$ (см. (2.9)) приводит к соотношениям

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} Sp[W_V, S^z] \hat{a}(x_\ell) \neq 0, \qquad [\mathcal{H}, S^z] = 0 \qquad (2.12)$$

где $\hat{a}(x_\ell)$ – произвольный квазилокальный оператор, относящийся к узлу ℓ. Эти соотношения означают уменьшение симметрии состояния равновесия по сравнению с симметрией гамильтониана. В соответствии с идеологией квазисредних средние

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} Sp\, W_V \hat{a}(x_\ell) < \infty \qquad (2.13)$$

существуют, и для них выполняется принцип пространственного ослабления корреляций

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} Sp W_V \hat{a}_1(x_1) \hat{a}_2(x_2) \xrightarrow[|x_1 - x_2| \to \infty]{} \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} Sp W_V \hat{a}_1(x_1) \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} Sp W_V \hat{a}_2(x_2) \qquad (2.14)$$

Обращаясь к явному виду статистического оператора W_V, заметим, что фаза $\varphi(t)$, вообще говоря, зависит от времени, причем эту зависимость легко определить, заметив, что равновесный статистический оператор $W(t)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля, из которого следует, что

$$e^{-i\mathcal{H}\tau} W(t) e^{i\mathcal{H}\tau} = W(t+\tau). \qquad (2.15)$$

Покажем, что

$$\left[W(t),\ \mathcal{H} + \frac{Y_z}{Y_0} S^z \right] = 0. \qquad (2.16)$$

С этой целью заметим, что

$$\lim \lim Sp\left[W_V,\ Y_0 \mathcal{H} + Y_z S^z + \nu Y_0 \hat{f} \right] \hat{a}(x) = 0$$

для произвольного квазилокального оператора $\hat{a}(x)$. На основе формулы (2.13) отсюда и следует (2.16) (подчеркнем, что $[W(t), \mathcal{H}] \neq 0$, $[W(t), S^z] \neq 0$). Из (2.15), (2.8) немедленно получим

$$\varphi(t) = -ht + \varphi(0), \qquad h \equiv -Y_z \cdot Y_0^{-1}.$$

Введем статистический оператор W_V'

$$W_V' = U_p W_V(t) U_p^+,$$

где

$$U_p \equiv \exp\left\{ -i \sum_\ell \varphi_\ell(t) \mathfrak{I}_\ell^z \right\}, \quad \varphi_\ell(t) = \vec{R}_\ell \vec{p} - ht + \varphi(0). \qquad (2.17)$$

Покажем, что

$$W_V'(\hat{\vec{\mathfrak{I}}}_{\ell+m}) = W_V'(\vec{\mathfrak{I}}_\ell). \qquad (2.18)$$

Действительно,

$$W_V' = \exp\left\{ \Omega_V - Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha^P - \nu Y_0 \sum_\ell (\mathfrak{I}_\ell^+ + э.с.) \right\}, \quad \hat{\gamma}_\alpha^P \equiv U_p \hat{\gamma}_\alpha U_p^+. \qquad (2.19)$$

Замечая далее, что $[\hat{\gamma}_\alpha, S^z] = 0$ и

$$U_p(\hat{\vec{\mathfrak{I}}}_{\ell+m}) = U_p(\vec{\mathfrak{I}}_\ell) \cdot e^{i\psi_m S^z},$$

имеем $\hat{\gamma}^p_\alpha(\vec{\hat{S}}_{\ell+m}) = \hat{\gamma}^p_\alpha(\vec{\hat{S}}_\ell)$. Отсюда и из (2.19) мы и получаем соотношение (2.18).

Таким образом, учитывая (2.18), найдём

$$Sp\,w(t)\,S^+_\ell = S_\perp e^{-i\varphi_\ell(t)}, \quad Sp\,w(t)\,S^z_\ell = S_\parallel \equiv S, \qquad (2.20)$$

где $S_\perp$, $S_\parallel$ – модули поперечной и продольной составляющих спина ($S_\perp$, $S_\parallel$ – не зависят от ℓ). Чтобы определить пространственную структуру спинового момента в состоянии статистического равновесия, введем систему координат (ξ, η, ζ), для которой оси y и η совпадают, ось ξ лежит в плоскости (x, z), а ось ζ направлена вдоль вектора спирали $\vec{p}$ и образует угол ψ с осью анизотропии z. В этой системе координат компоненты спина S^ξ_ℓ, S^η_ℓ, S^ζ_ℓ имеют вид

$$S^\xi_\ell = S_\perp\cdot\cos\varphi_\ell\cdot\cos\psi - S_\parallel\cdot\sin\psi,$$

$$S^\eta_\ell = S_\perp\cdot\sin p\zeta, \quad S^\zeta_\ell = -S_\perp\cdot\cos\vec{p}\vec{x}\cdot\sin p\psi + S_\parallel\cdot\cos\psi, \qquad (2.21)$$

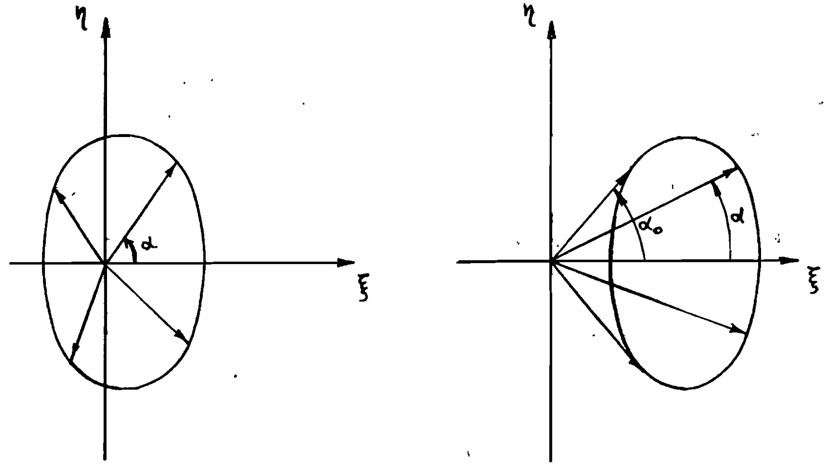
где $\varphi_\ell = p\zeta_\ell$ (ζ_ℓ – проекция R_ℓ на ось ζ). Мы видим, что в плоскости (ξ, η) компоненты S^ξ_ℓ, S^η_ℓ образуют эллипс

$$\left(\frac{S^\xi_\ell - S_\parallel\cdot\sin\psi}{S_\perp\cdot\cos\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^\eta_\ell}{\partial S_\perp}\right)^2 = 1,$$

а проекция S^ζ_ℓ при фиксированном угле ψ является периодической функцией ζ. Если $S_\parallel\sin\psi < S_\perp\cos\psi$, то в плоскости ($\xi$, η) угол α проекции вектора спина на ось ξ изменяется между 0 и 2π, $0\leq\alpha\leq 2\pi$ (см.рис.1а). Если $S_\parallel\sin\psi > S_\perp\cos\psi$, то угол α изменяется в пределах $-\alpha_0\leq\alpha\leq\alpha_0$, $\alpha_0<\frac{\pi}{2}$ (см. рис.1б). Угол α_0 определяется из условия касания проекции спина в плоскости (ξ, η) с линией эллипса.

Если ось спирали $\vec{p}$ и ось анизотропии совпадают, то этот случай соответствует ферромагнитной спирали: ($\vec{p}\parallel z$, $S_\perp\neq 0$, $S_\parallel\neq 0$). При $\vec{p}\parallel z$ и $S_\parallel = 0$ имеет место упорядочение типа простой спирали.

Квазилокальные операторы $\hat{a}(x)$ (например, операторы $\hat{S}_\alpha(x)$, $\hat{\zeta}_{\alpha k}(x)$) имеют структуру типа $\hat{a}(x) = \sum_\ell \hat{a}_\ell\cdot\delta(x-R_\ell)$. По-



а) $S_\parallel\sin\psi < S_\perp\cos\psi$ в) $S_\parallel\sin\psi > S_\perp\cos\psi$

Рис.1. а),в). Пространственное распределение спинового момента в плоскости (η, ξ).

этому средние имеют такую же структуру $Sp\,w\hat{a}(x) = \sum_\ell \delta(x-R_\ell)\,Sp\,w\hat{a}_\ell$.
Из соотношений (2.17), (2.18), (2.19) следует, что если $[\hat{a}_\ell, S^z]=0$, то $Sp\,w\hat{a}_\ell$ не зависит от ℓ и, следовательно,

$$Sp\,w\,\hat{a}(x) = Sp\,w\hat{a}_0\cdot\sum_\ell\delta(x-R_\ell), \qquad [\hat{a}_\ell, S^z]=0$$

Усредняя эту функцию по элементарной ячейке, получим

$$\frac{1}{v_a}\int_{v_a} d^3y\, Sp\,w\,\hat{a}(x+y) = \frac{1}{v_a}\cdot Sp\,w\hat{a}_0. \qquad (2.22)$$

Это среднее мы обозначим через $\bar{a}$,

$$\bar{a} = \frac{1}{v_0}\,Sp\,w\hat{a}_0 \equiv \overline{Sp}\,w\,\hat{a}(x) \qquad (2.23)$$

(v_a – объём элементарной ячейки: результат усреднения не зависит от того, около какой точки происходит усреднение; черта над шпуром означает дополнительное усреднение по элементарной ячейке).

Учитывая определение термодинамического потенциала (см.2.2), имеем

$$\overline{S}_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial Y_\alpha} = \overline{Sp}\, W\, \hat{S}_\alpha(x). \tag{2.24}$$

Перейдём теперь к нахождению средних значений $\overline{S}_{\alpha K}$ операторов плотностей потоков (очевидно, $[\ \hat{S}_{\alpha K}(x), S^z\,] = 0$, см. (2.6)). Замечая, что

$$\overline{Sp}\, W\, \hat{a}(x)\hat{b}(y) = \overline{Sp}\, W\, \hat{a}(x-y)\hat{b}(0),$$

имеем, согласно (2.6), (2.16),

$$\overline{q}_K = \frac{i}{2}\int d^3x\, x_K\, \overline{Sp}\, W[\,\hat{\varepsilon}(0), \hat{\varepsilon}(x)],$$

$$\overline{j}_K = i\int d^3x\, x_K\, \overline{Sp}\, W[\,\hat{\varepsilon}(0), \hat{s}(x)].$$

С другой стороны, используя (2.18), (2.19), найдём

$$\overline{j}_K = i\int d^3x\, x_K\, \overline{Sp}\, W'[\,\hat{\varepsilon}_p(0), \hat{s}(x)] = \overline{Sp}\, W'\frac{\partial\hat{\varepsilon}_p}{\partial p_K}, \quad \hat{\varepsilon}_p \equiv U_p\hat{\varepsilon}U_p^+;$$

так как $Sp\,W' = 1$, то

$$\overline{j}_K = \frac{1}{Y_0}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p_K}. \tag{2.25}$$

Из формул (2.24), (2.25) вытекает соотношение

$$d\omega = \overline{S}_\alpha\cdot dY_\alpha + Y_0\overline{j}_K\cdot dp_K, \tag{2.26}$$

выражающее II закон термодинамики для обратимых процессов. Введём в рассмотрение плотность энтропии в состоянии статистического равновесия

$$\sigma = -\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\overline{Sp}\, W\ln W = -\omega + Y_\alpha\overline{S}_\alpha. \tag{2.27}$$

Тогда соотношение (2.26) можно переписать в эквивалентном виде

$$d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{Y_0}d\sigma + h\,d s + \overline{j}_K\, dp_K. \tag{2.28}$$

Перейдём к нахождению $\overline{q}_K$. Введем с этой целью величину $\overline{q}'_K$

$$\overline{q}'_K = \frac{i}{2}\int d^3x\, x_K\, \overline{Sp}\, W'_\nu[\,\hat{\varepsilon}'_p(0), \hat{\varepsilon}'_p(x)],$$

где

$$\hat{\varepsilon}'_p(x) = \hat{\varepsilon}_p(x) - h\hat{s}(x) + \nu(\,s^-(x) + s^+(x)).$$

Эта величина связана с плотностью потока энергии $\overline{q}_K$

$$\overline{q}_K = \frac{i}{2}\int d^3x\, x_K\, \overline{Sp}\, W'_\nu[\,\hat{\varepsilon}_p(0), \hat{\varepsilon}_p(x)]$$

формулой

$$\overline{q}'_K = \overline{q}_{\nu K} - h\overline{j}_K.$$

Замечая, что $[\,W'_\nu, \int d^3x\, \hat{\varepsilon}'_p(x)] = 0$, можно показать, что $\overline{q}'_K = 0$ (см. [15, 17]). Поэтому

$$\overline{q}_K = h\overline{j}_K. \tag{2.29}$$

Таким образом, учитывая (2.25), (2.29), имеем

$$\overline{S}_{\alpha K} = \frac{\partial\omega}{\partial p_K}\cdot\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{Y_z}{Y_0}. \tag{2.30}$$

Обратим внимание на то, что величина $\partial\omega/\partial p_K$ определяет поток спина (см. (2.25)). Поэтому, если физические условия на поверхности тела, определяющие состояние равновесия, таковы, что поток спина обращается в нуль, то вектор спирали $\vec{p}$ может быть найден из условия минимума термодинамического потенциала ω

$$\frac{\partial\omega}{\partial p_K} = 0. \tag{2.31}$$

Это уравнение определяет вектор спирали как функцию термодинамических параметров $\vec{p} = \vec{p}(\,Y_\alpha)$, а его направление определяется осью анизотропии, задаваемой гамильтонианом $\mathcal{H}$. В рассматриваемом случае $\vec{p} \parallel z$.

Рассмотрим теперь средние $Sp\,W\,s^\pm(x)$, в которых оператор $s^\pm(x) = \sum_\ell s^\pm_\ell\cdot\delta(x - x_\ell)$ не коммутирует с оператором S^z: $[\,s^\pm(x), S^z\,] \neq 0$. Согласно (2.20),

$$Sp\,W\,s^\pm(x) = s_\perp\cdot e^{\mp i\vec{p}\vec{x}}\cdot\sum_\ell\delta(x - x_\ell). \tag{2.32}$$

Так как вектор $\vec{p}$ является, вообще говоря, произвольным параметром, то эти средние уже не инвариантны по отношению к группам симметрии, связанным с кристаллической решеткой. Для длинно периодических структур $|\vec{p}|\cdot a \ll 1$ средние по элементарной кристаллографической ячейке от величин (2.32) определяются формулой

$$\overline{Sp}\, W \overset{\pm}{s}(x) = e^{\mp i\varphi(x)} \cdot s_\perp .$$

3. Метод сокращенного описания

При изучении необратимых процессов будем для простоты строить теорию, предполагая, что магнетик является сплошной средой, в которой, однако, нет интеграла движения, связанного с законом сохранения импульса. Изменения, которые необходимо ввести при переходе от непрерывной среды к решетке, будут отмечены при получении окончательных результатов.

Для описания кинетических процессов в системе будем использовать метод сокращенного описания. Согласно этому методу, при $t \gg \tau_0$ (τ_0 – время релаксации) статистический оператор $\rho(t)$ зависит от времени и начального статистического оператора $\rho(0) \equiv \rho$ только через посредство некоторого набора параметров. В случае спиральных магнетиков в качестве таких параметров следует взять плотности аддитивных интегралов движения $\zeta_\alpha(x,t)$, $\varphi(x,t)$ (угол закручивания в плоскости, перпендикулярной к оси анизотропии (см. (2.7)). Таким образом, согласно сказанному,

$$\rho(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \rho\, e^{i\mathcal{H}t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \rho\{\zeta(x,t,\rho), \varphi(x,t,\rho)\}, \qquad (3.1)$$

причем

$$\zeta_\alpha(x) = Sp\, \rho\{\zeta(x'), \varphi(x')\} \hat{\zeta}_\alpha(x), \qquad (3.2)$$

$$\varphi(x) = \operatorname{Im} \ln Sp\, \rho\{\zeta(x'), \varphi(x')\} s^-(x).$$

Параметры $\zeta_\alpha(x,t)$, $\varphi(x,t)$, как следует из (2.5), (3.2), удовлетворяют макроскопическим уравнениям движения

$$\dot{\zeta}_\alpha(x,t) = L_\alpha(x,t), \qquad \dot{\varphi}(x,t) = L_\varphi(x,t), \qquad (3.3)$$

где

$$L_\alpha(x) = -\frac{\partial}{\partial x_k} Sp\, \rho\{\zeta,\varphi\} \hat{\zeta}_{\alpha k}(x), \quad L_\varphi(x) = \operatorname{Re} \frac{Sp\, \rho\{\zeta,\varphi\}[\mathcal{H}, s^-(x)]}{Sp\, \rho\{\zeta,\varphi\} s^-(x)}. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим локально равновесный статистический оператор

$$W_\nu(Y,\chi) \equiv \exp\{\Omega_\nu - \int d^3x\, Y_\alpha(x) \hat{\zeta}_\alpha(x) - \nu \int d^3x\, Y_0(x) \cdot (s^+(x) e^{i\chi(x)} + \text{э.с.})\}, \qquad (3.5)$$

зависящий от такого же числа произвольных функций $Y_\alpha(x)$, $\chi(x)$, что и статистический оператор $\rho\{\zeta,\varphi\}$.

Согласно (3.1), имеет место асимптотическое соотношение

$$e^{-i\mathcal{H}\tau} W(Y,\chi) e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow[\tau \gg \tau_0]{} \rho\{\zeta(\tau,W), \varphi(\tau,W)\}.$$

Поэтому функции Y, χ можно подобрать таким образом, чтобы

$$e^{-i\mathcal{H}\tau}\big(\rho - W(Y(\rho), \chi(\rho))\big) e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 0,$$

где $Y_\alpha(x,\rho)$, $\chi(x,\rho)$ – некоторые функции x, зависящие от начального статистического оператора ρ.

Если в качестве ρ взять асимптотический статистический оператор $\rho(\zeta,\varphi)$, то это соотношение можно переписать в виде

$$e^{-i\mathcal{H}\tau}\Big(\rho(\zeta,\varphi) - W\big(Y(\zeta,\varphi), \chi(\zeta,\varphi)\big)\Big) e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 0, \qquad (3.6)$$

где Y_α, χ – неизвестные функционалы ζ, φ:

$$Y_\alpha(x,\zeta,\varphi) = Y_\alpha(x, \rho(\zeta,\varphi)), \quad \chi(x,\zeta,\varphi) = \chi(x, \rho(\zeta,\varphi)). \qquad (3.7)$$

Статистический оператор $\rho(\zeta,\varphi)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$i[\mathcal{H}, \rho] = \frac{\delta\rho}{\delta\zeta_\alpha} \cdot L_\alpha + \frac{\delta\rho}{\delta\varphi} \cdot L_\varphi, \qquad (3.8)$$

где

$$\frac{\delta\rho}{\delta\zeta_\alpha} \cdot L_\alpha \equiv \int d^3x\, \frac{\delta\rho(\zeta,\varphi)}{\delta\zeta_\alpha(x)} \cdot L_\alpha(x), \quad \frac{\delta\rho}{\delta\varphi} \cdot L_\varphi \equiv \int d^3x\, \frac{\delta\rho(\zeta,\varphi)}{\delta\varphi(x)} \cdot L_\varphi(x).$$

Заметим, что, согласно (3.4), разложение величины L_α по градиентам параметров сокращенного описания начинается с членов I-го порядка (пропорциональных градиентам), а разложение величины L_φ – с членов нулевого порядка, т.е. $L_\varphi = L_\varphi^{(0)} + L_\varphi^{(1)} + \ldots$ ($L_\varphi^{(0)}$ соответствует нулевому приближению по градиентам). Так как, согласно (3.2)

$$e^{i\psi S^z} \rho(\zeta,\varphi) e^{-i\psi S^z} = \rho(\zeta, \varphi + \psi), \qquad \psi - const,$$

то

$$i[S^z, \rho(\varsigma,\varphi)] = \int d^3x \, \frac{\delta\rho(\varsigma,\varphi)}{\delta\varphi(x)}.$$

Поэтому уравнение (3.8) можно переписать в виде

$$i[H,\rho] = \frac{\partial\rho}{\partial\varsigma_\alpha}\cdot L_\alpha + \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\cdot(L_\varphi - L_\varphi^{(0)}), \qquad H = \mathcal{H} - L_\varphi^{(0)}\cdot S^z,$$

где

$$\frac{\delta\rho}{\delta\varphi}(L_\varphi - L_\varphi^{(0)}) = \int d^3x \, \frac{\delta\rho(\varsigma,\varphi)}{\delta\varphi(x)}\cdot(L_\varphi(x) - L_\varphi^{(0)}(x)).$$

Отсюда следует, что разложение правой части уравнения (3.9) в ряд по градиентам около точки X начинается с членов первого порядка (в отличие от уравнения (3.8)).

Так как

$$e^{-iH\tau}(\rho - W)e^{iH\tau} = \rho - W + \int_0^\tau d\tau' e^{-iH\tau'}(-i)[H,\rho - W]e^{iH\tau'},$$

то, используя асимптотическое соотношение (3.6) и уравнение (3.9), получим

$$\rho = W + \int_0^\infty d\tau \, e^{-iH\tau}\left\{i[H,W] - \frac{\partial\rho}{\partial\varsigma_\alpha}\cdot L_\alpha - \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}(L_\varphi - L_\varphi^{(0)})\right\}e^{iH\tau}, \tag{3.10}$$

где величины L_α, L_φ (определяющие макроскопические уравнения движения) находятся с помощью (3.4), а неизвестные функционалы $Y(\varsigma,\varphi)$, $\chi(\varsigma,\varphi)$, входящие в оператор W, определяются из уравнений (3.7).

В пространственно-неоднородном случае вектор спирали связан с фазой φ параметра порядка формулой

$$\vec{p}(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\vec{x}}. \tag{3.11}$$

Выражения (3.3), (3.4), (3.7), (3.10), (3.11) представляют собой полную систему макроскопических уравнений движения спирального магнетика, решение которых будет проводиться в рамках теории возмущений по градиентам $\partial\varsigma_\alpha/\partial x_k$, $\partial p_i/\partial x_k$, которые предполагаем малыми.

Мы будем интересоваться средними $Sp\rho(\varsigma(x'),\varphi(x'))\hat{a}(x)$ квазилокальных операторов $\hat{a}(x)$, относящихся к точке x. В силу

трансляционной инвариантности гамильтониана имеет место очевидное соотношение $Sp\rho(\varsigma(x'),\varphi(x'))\hat{a}(x) = Sp\rho(\varsigma(x+x'),\varphi(x+x'))\hat{a}(0)$. В силу принципа ослабления корреляций основной вклад в эти средние будут давать те значения параметров $\varsigma_\alpha(x+x')$ и $\varphi(x+x')$, значения аргумента x' которых близки к нулю. Разложения

$$\varsigma_\alpha(x+x') = \varsigma_\alpha(x) + x'_k\frac{\partial\varsigma_\alpha(x)}{\partial x_k} + \dots,$$

$$\varphi(x+x') = \varphi(x) + x'_k\cdot\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k} + \frac{1}{2}x'_i x'_k\cdot\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\partial x_k} + \dots \tag{3.12}$$

приводят к разложению статистического оператора $\rho(\varsigma(x+x'),\varphi(x+x'))$:

$$\rho(\varsigma(x+x'),\varphi(x+x')) \equiv \rho(x) = \sum_{n=0}^\infty \rho^{(n)}(x), \tag{3.13}$$

где $\rho^{(n)}(x) \sim \lambda^n$, $\lambda \sim L^{-1}$, L – характерные размеры неоднородности. Далее, согласно (3.7), имеет место разложение функций $Y_\alpha(x+x',\rho(x))$ и $\chi(x+x',\rho(x))$ по градиентам гидродинамических параметров, связанным с точкой X :

$$Y_\alpha(x+x',\rho) = Y_\alpha(x,\rho) + x'_k\frac{\partial Y_\alpha(x,\rho)}{\partial x_k} + \dots,$$

$$\chi(x+x',\rho) = \chi(x,\rho) + x'_k\cdot\frac{\partial\chi(x,\rho)}{\partial x_k} + \dots,$$

а также разложение величин $Y_\alpha(x,\rho(x))$ и $\chi(x,\rho(x))$, связанное с разложением статистического оператора $\rho(x)$:

$$Y_\alpha(x,\rho(x)) = Y_\alpha(x,\sum_{n=0}^\infty\rho^{(n)}(x)) = \sum_{n=0}^\infty Y_\alpha^{(n)}(x),$$

$$\chi(x,\rho(x)) = \chi(x,\sum_{n=0}^\infty\rho^{(n)}(x)) = \sum_{n=0}^\infty\chi^{(n)}(x). \tag{3.14}$$

Слагаемые $Y_\alpha^{(n)}(x)$ и $\chi^{(n)}(x)$ определяются из условий

$$\varphi(x) = Jm\ln Sp\rho(\varsigma,\varphi)\,s^-(x) = Jm\ln Sp\rho^{(0)}(x)\,s^-(0),$$

$$\varsigma_\alpha(x) = Sp\rho(\varsigma,\varphi)\hat{\varsigma}_\alpha(x) = Sp\rho^{(0)}(x)\cdot\hat{\varsigma}_\alpha(0), \tag{3.15}$$

соответствующих тому факту, что параметры сокращенного описания определяются главным приближением статистического оператора $\rho^{(0)}(x)$.

Разложение (3.12) индуцирует разложение других величин по градиентам, причем для членов соответствующих рядов используем аналогичные обозначения.

Так как разложение $L_\alpha(x, \zeta_\alpha(x'), \varphi(x'))$ и $L_\varphi(x, \zeta(x'), \varphi(x')) - L^{(0)}_\varphi(x)$:

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L^{(n)}_\alpha(x), \qquad L_\varphi(x) - L^{(0)}_\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L^{(n)}_\varphi(x)$$

начинается с членов, линейных по градиентам, то уравнение (3.10) позволяет развить простую теорию возмущений по градиентам параметров сокращенного описания.

Приведем разложение статистического оператора $W_\nu(x)$

$$W_\nu(x) = \exp\Big\{\Omega_\nu(x) - \int d^3x' Y_\alpha(x+x')\hat\zeta_\alpha(x') - \nu\int d^3x' Y_0(x+x')\big(\hat\psi^+(x')e^{i\chi(x+x')} + э.с.\big)\Big\} \qquad (3.16)$$

в ряд по градиентам величин $Y_\alpha(x)$, $\chi(x)$, предполагая при этом, что мы интересуемся средними $Sp\, W_\nu \hat a(x) = Sp\, W(x)\hat a(0)$ квазилокальных операторов $\hat a(x)$, относящихся к точке x. Мы будем удерживать при этом члены $\partial Y_\alpha(x)/\partial x_k$ и $\partial^2\chi(x)/\partial x_i\partial x_k$, так как необходимо считать, что величины $\partial\chi(x)/\partial x_k$ нулевого порядка по градиентам (см. выражение (2.17) для фазы φ). Локально равновесный статистический оператор можно представить в виде $W_\nu(x) = U(x)\underset{\sim}{W}_\nu(x)U^+(x)$, где

$$\underset{\sim}{W}_\nu(x) = \exp\Big\{\Omega_\nu(x) - \int d^3x'\big[Y_\alpha(x+x')\hat\zeta_\alpha(x',x) + \nu Y_0(x+x')\cdot(\bar\psi(x) + э.с.)\big]\Big\},$$

$$\hat\zeta_\alpha(x',x) \equiv U^+(x)\hat\zeta_\alpha(x')U(x),$$

и унитарный оператор $U(x)$ определяется формулой

$$U(x) = \exp i\int d^3x' \chi(x+x')\hat\rho(x').$$

Замечая, что в рассматриваемом приближении

$$U(x) = U_0(x)\cdot\Big(1 + \frac{i}{2}\cdot\frac{\partial^2\chi(x)}{\partial x_i\partial x_k}\cdot\int d^3x' x'_i x'_k \hat\rho(x')\Big),$$

$$U_0(x) = \exp\Big\{i\chi(x)S^z + i\frac{\partial\chi(x)}{\partial x_k}\int d^3x' x'_k \hat\rho(x')\Big\},$$

имеем

$$W_\nu(x) = -\frac{i}{2}U_0(x)\cdot\frac{\partial^2\chi(x)}{\partial x_i\partial x_k}\cdot\int d^3x' x'_i x'_k\big[\hat\rho(x'), \underset{\sim}{W}_\nu(x)\big]U_0^+(x) + U_0(x)\underset{\sim}{W}_\nu(x)U_0^+(x).$$

С другой стороны,

$$\int d^3x' Y_\alpha(x+x')\hat\zeta_\alpha(x',x) = U_0^+(x)\cdot\Big\{Y_\alpha(x)\hat\gamma_\alpha + \frac{\partial Y_\alpha(x)}{\partial x_k}\int d^3x' x'_k \check\zeta_\alpha(x') +$$

$$+ Y_0(x)\cdot\frac{\partial^2\chi(x)}{\partial x_i\partial x_k}\int d^3x' x'_i \hat j_k(x')\Big\}U_0(x)$$

(мы учли при этом, что $i[\mathcal{H}, \hat\rho(x)] = -\dfrac{\partial \hat j_k(x)}{\partial x_k}$). Поэтому

$$W_\nu(x) = W^{(0)}_\nu(x) + W^{(1)}_\nu(x) + \ldots,$$

$$W^{(0)}_\nu(x) = \exp\Big\{\Omega^{(0)}_\nu(x) - Y_\alpha(x)\hat\gamma_\alpha - \nu Y_0(x)\cdot\int d^3x'\Big(\hat\psi^+(x')e^{i(\chi(x) + x'_k\frac{\partial\chi(x)}{\partial x_k})} + э.с.\Big)\Big\}, \qquad (3.17)$$

$$W^{(1)}_\nu(x) = \frac{\partial Y_\alpha(x)}{\partial x_k}\cdot\hat\omega_{\alpha k}(x) + \frac{\partial^2\chi(x)}{\partial x_i\partial x_k}\cdot\hat\omega_{ik}(x).$$

Операторы $\hat\omega_{ik}(x)$ и $\hat\omega_{\alpha k}(x)$, зависящие от x только через посредство $W^{(0)}_\nu(x)$, определяются формулами

$$\hat\omega_{\alpha k}(x) = -W^{(0)}_\nu(x)\cdot\int d^3x' x'_k\int_0^1 d\lambda\,\big(\check\zeta_\alpha(x',\lambda) - \langle\check\zeta_\alpha\rangle\big),$$

$$\hat\omega_{ik}(x) = -\frac{i}{2}\int d^3x' x'_i x'_k\big[\hat\rho(x'), W^{(0)}_\nu(x)\big] - \qquad (3.18)$$

$$-Y_0(x)\cdot W^{(0)}_\nu(x)\cdot\int d^3x' x'_k\cdot\int_0^1 d\lambda\,\big(\hat j_i(x',\lambda) - \langle\hat j_i\rangle\big),$$

где

$$\check\zeta_\alpha(x') = \hat\zeta_\alpha(x') + \nu\delta_{\alpha 0}\cdot\Big(\hat\psi^+(x')e^{i(\chi(x) + x'_k\frac{\partial\chi(x)}{\partial x_k})} + э.с.\Big),$$

$$\hat a(x,\lambda) = W^{(0)-\lambda}_\nu\cdot\hat a(x)\cdot W^{(0)\lambda}_\nu.$$

Распределение Гиббса $W^{(0)}_\nu(x)$ зависит от координаты x только через посредство параметров $Y_\alpha(x)$, $\chi(x)$ (для упрощения записи эту зависимость далее будем опускать).

В заключение раздела отметим некоторые особенности использования принципа ослабления корреляций в методе квазисредних. Для систем со спонтанно нарушенной симметрией характерным является медленное убывание пространственных корреляций, которое связано с теоремой Боголюбова об особенности типа $1/q^2$ [9]. Это приводит к тому, что средние

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \nu\int d^3x\int_0^1 d\lambda\, Sp W_\nu\, x_{i_1}..x_{i_n}(\hat a(x,\lambda)-\langle a\rangle)\hat b(0),$$

вообще говоря, не стремятся к нулю при $\nu\to 0$. Для того, чтобы лучше пояснить сказанное, обратимся к конкретной структуре оператора W_ν (3.17). В соответствии с определением (3.17) имеем

$$\frac{\partial W_\nu}{\partial\varphi}=i[S^z, W_\nu]=-i\nu Y_0 W_\nu\int d^3x\int_0^1 d\lambda\,(s^+_\varphi(x,\lambda)-э.с.),$$
$$s^+_\varphi(x)\equiv s^+(x)e^{i(\varphi+\vec p\vec x)}, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial W_\nu}{\partial p_k}=-i\nu Y_0 W_\nu\int d^3x\int_0^1 d\lambda\, x_k(s^+_\varphi(x,\lambda)-э.с.)=$$
$$=i\int d^3x\, x_k[\hat s(x), W_\nu]-Y_0W_\nu\int d^3x\int_0^1 d\lambda\,(\hat j_k(x,\lambda)-\langle\hat j_k\rangle). \tag{3.20}$$

Отсюда следует, что среднее

$$Sp W_\nu\int_0^1 d\lambda\int d^3x(s_\varphi(x,\lambda)-э.с.)\hat a(0)=\frac{1}{\nu Y_0}Sp[S^z, W_\nu]\hat a(0)=\frac{1}{i\nu Y_0}Sp\frac{\partial W_\nu}{\partial\varphi}\hat a(0)$$

может иметь расходимость $1/\nu$, если $[S^z, \hat a(0)]\neq 0$. Аналогично из (3.20) найдём, что

$$Sp W_\nu\int_0^1 d\lambda\int d^3x\, x_k(s_\varphi(x,\lambda)-э.с.)=\frac{1}{i\nu Y_0}Sp\frac{\partial W_\nu}{\partial p_k}\hat a(0), \tag{3.21}$$

т.е. расходимость имеется при всех $\hat a$, для которых $Sp\frac{\partial W_\nu}{\partial p_k}\hat a(0)\neq 0$. Структура локально равновесного статистического оператора W_ν (3.16) такова, что типичными членами ряда теории возмущений являются операторы типа

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} W_\nu\int d^3x\int_0^1 d\lambda\, x_{i_1}..x_{i_n}(\hat a(x,\lambda)-\langle a\rangle) \tag{3.22}$$

или

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} i[W_\nu, \int d^3x\, x_{i_1}..x_{i_n}\hat a(x)]. \tag{3.23}$$

В силу (2.13) средние

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} Sp W_\nu\int d^3x\, x_{i_1}..x_{i_n}[\hat a(x), \hat b(0)]$$

не имеют особенности по ν и стремятся к конечному значению при $\nu\to 0$ (так как усредняемый оператор в силу канонических перестановочных соотношений является квазилокальным оператором). Средние произвольных квазилокальных операторов $\hat a(x)$, вычисляемые с помощью статистического оператора (3.22), как мы видели, вообще говоря, имеют особенности вида $1/\nu$, $1/\nu^2$. Эти особенности связаны с медленным убыванием корреляций в системе со спонтанно нарушенной симметрией.

В выражение для локально равновесного статистического оператора W_ν входят величины $Y_\alpha(x, \rho_\nu(x))$ и $\chi(x, \rho_\nu(x))$, которые в соответствии с (3.7), (3.13) также зависят от параметра ν. Мы считаем, что их выбор, осуществляемый из требований (3.7), приводит к регулярному поведению каждого члена ряда $\rho_\nu^{(n)}(x)$ при $\nu\to 0$.

4. Кинетика идеального спирального магнетика

В этом разделе мы найдём макроскопические уравнения движения (3.4) в линейном приближении по градиентам $\partial\zeta_\alpha/\partial x_k$ и $\partial p_i/\partial x_k$. Так как

$$L^{(1)}_\alpha(x)=-\frac{\partial}{\partial x_k}Sp\rho^{(0)}(x)\hat\zeta_{\alpha k}(0), \tag{4.1}$$

$$L^{(1)}_k(x)=\frac{\partial}{\partial x_k}Re\frac{Sp\rho^{(0)}(x)[\mathcal{H}, \bar s(0)]}{Sp\rho^{(0)}(x)\bar s(0)},$$

то для определения операторов эволюции $L^{(1)}_\alpha$ и $L^{(1)}_k$ достаточно знать статистический оператор $\rho(x)$ в главном приближении. В соответствии с (3.10), (3.16) имеем $\rho^{(0)}(x)=W^{(0)}(Y^{(0)}_\alpha(x), \chi^{(0)}(x))$. Исходя из определений параметров сокращенного описания (3.7), получим

$$\chi^{(0)}(x)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial\chi^{(0)}(x)}{\partial x_k}=p_k(x), \tag{4.2}$$

причем термодинамические силы $Y^{(0)}_\alpha$ связаны с параметрами ζ_α соотношениями

$$\zeta_\alpha(x)=Sp\rho^{(0)}(Y^{(0)}_\alpha(x), \chi^{(0)}(x))\hat\zeta_\alpha(0). \tag{4.3}$$

Всюду далее для сокращения записи полагаем $Y^{(0)}_\alpha\equiv Y_\alpha$. Для средних

$\zeta^{(0)}_{\alpha k}(x) = Sp\,\rho^{(0)}(x)\hat{\zeta}_{\alpha k}(0) = Sp\,W^{(0)}(x)\hat{\zeta}_{\alpha k}(0)$ справедливы формулы (2.30), причем теперь следует иметь в виду, что величины $\zeta_\alpha(x) = Sp\,W^{(0)}(x)\hat{\zeta}_\alpha(0)$, $Y_\alpha(x)$, $\vec{p}(x)$ являются медленно меняющимися функциями координат x и времени t. Оператор эволюции $L^{(1)}_\alpha$ в соответствии с (4.I), (2.30) имеет вид

$$L^{(1)}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{Y_z}{Y_0}\right). \tag{4.4}$$

Замечая, что $\left[W^{(0)}, \mathcal{H} + \frac{Y_z}{Y_0}S^z\right] = 0$, легко найти, учитывая (4.I), оператор эволюции

$$L^{(1)}_k = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{Y_z}{Y_0}. \tag{4.5}$$

Определим плотность энтропии в неравновесном и пространственно-неоднородном состоянии равенством

$$\sigma(x) \equiv -\lim_{v\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}Sp\,\rho^{(0)}(x)\ln\rho^{(0)}(x) = -\omega(x) + Y_\alpha(x)\zeta_\alpha(x). \tag{4.6}$$

Уравнение движения для этой величины в соответствии с (3.3) имеет вид

$$\dot{\sigma} = Y_\alpha L_\alpha - \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot L_k. \tag{4.7}$$

В рассматриваемом приближении

$$\dot{\sigma} \approx Y_\alpha L^{(1)}_\alpha - \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot L^{(1)}_k,$$

отсюда, учитывая (4.4), (4.5) и замечая, что $Y_\alpha\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{Y_z}{Y_0} = 0$, получим

$$\dot{\sigma} = 0 \tag{4.8}$$

(это уравнение выражает принцип адиабатичности движения идеальной системы). Таким образом, выбирая в качестве независимых переменных величины σ, s, $\vec{p}$, нелинейные уравнения движения спирального магнетика в рассматриваемом приближении определим формулами (см. (2.28)):

$$\dot{\sigma} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_k\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\right)p_e + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial x_e} = 0, \tag{4.9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_k\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\right)s + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_i\partial p_k}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = 0.$$

Эту систему можно представить в гамильтоновой форме

$$\dot{s} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi}, \qquad \dot{\varphi} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta s}, \tag{4.10}$$

если определить "гамильтониан" $\mathcal{H}$ в виде $\mathcal{H} = \int d^3\varepsilon(x)$ и учесть, что функциональные производные $\mathcal{H}$ по φ и s равны

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}, \qquad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta s} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}.$$

Уравнения движения Ландау-Лифшица для магнитного момента в пренебрежении диссипативными процессами также приводятся к гамильтоновой форме (см. [I9]).

Из системы уравнений (4.9) легко найти спектр спиновых волн в "гидродинамической" области. С этой целью линеаризуем уравнение (4.9) около состояния равновесия, выбирая в качестве параметров, описывающих отклонение от равновесия величины $\delta s(x,t) = s(x,t) - s$, $\delta\sigma(x,t) = \sigma(x,t) - \sigma$ и $\delta p_i(x,t) = p_i(x,t) - p_i$ (σ, s, $\vec{p}$ - равновесные значения величин). Учитывая, что $\delta p_i(x,t) = \nabla_i\,\delta\varphi(x,t)$, получим, исключая из системы уравнений переменную $\delta s(x,t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_e\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_e}\right)^2\cdot\delta\varphi(x,t) = \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_i\partial p_k}\cdot\frac{\partial^2\delta\varphi(x,t)}{\partial x_i\partial x_k}. \tag{4.11}$$

Переходя к фурье-компоненте

$$\delta\varphi(\vec{x},t) = \int d^3k\int d\omega\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}\,\delta\varphi(\vec{k},\omega),$$

видим, что уравнение (4.II) имеет нетривиальное решение, если

$$\omega(\vec{k}) = k_i\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_i\partial s} \pm\sqrt{k_i k_e\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_i\partial p_e}\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s^2}}. \tag{4.12}$$

Плотность энергии ε см. (2.24) является функцией параметров Y_α,

$\vec{p}$, $\vec{p}\vec{n}$ ($\vec{n}$ - направление оси анизотропии), $\mathcal{E}=\mathcal{E}(Y_0, Y_z, \vec{n}\vec{p}, \vec{p}^2)$. Спектр спиновых волн в случае коллинеарного магнетика ($\vec{p}=0$) имеет вид

$$\omega(\vec{k}) = \vec{k}\vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial(\vec{n}\vec{p})\partial\vartheta}\Bigg|_{\vec{p}=0} \pm \sqrt{\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\vartheta^2}\cdot\left((\vec{n}\vec{k})^2 \cdot \frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial(\vec{n}\vec{p})^2}\Bigg|_{\vec{p}=0} + 2k^2 \cdot \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{p}^2}\Bigg|_{\vec{p}=0}\right)} .$$

Если пренебречь анизотропией, т.е. считать, что $\mathcal{E}$ не зависит от $\vec{n}\vec{p}$, то

$$\omega^2 = \frac{\rho_s}{\chi_s} \cdot k^2 , \tag{4.13}$$

где $\chi_s^{-1} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \vartheta^2}$ - статическая адиабатическая восприимчивость, $\rho_s \equiv 2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p^2}\Big|_{p=0}$ - константа жесткости. Это выражение совпадает с результатом работы [18] , полученным в феноменологической теории.

Мы до сих пор предполагали, что гамильтониан является инвариантным по отношению к поворотам вокруг оси z . В действительности, вследствие наличия слабых релятивистских взаимодействий V , эта инвариантность нарушается. Влияние этого взаимодействия на уравнения движения мы учтем в линейном приближении по V и в нулевом приближении по градиентам. Статистический оператор системы в указанном приближении можно представить в виде $\rho = w + \rho_V$, где $\rho_V \sim V$. Тогда уравнения движения для параметров ϑ , $\mathcal{E}$, φ запишутся в форме

$$\dot{\vartheta} = -\frac{\partial j_k}{\partial x_k} - i\,Sp\,\rho_V[S^z, \mathcal{E}] - i\,Sp\,w[S^z, \hat{v}] ,$$

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} - i\,Sp\,\rho_V[\mathcal{E}, \mathcal{H}] - i\,Sp\,w[\mathcal{H}, \hat{v}] , \tag{4.14}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{Y_z}{Y_0} , \qquad \hat{V} \equiv \int d^3x\ \hat{v}(x)$$

(в последнем уравнении не нужно учитывать слагаемых $\sim \hat{V}$, так же как и членов, пропорциональных градиентам). Заметим теперь, что $[S^z, \hat{\mathcal{E}}] = 0$, и так как $i[\mathcal{H}, \hat{\mathcal{E}}(x)] = -\frac{\partial}{\partial x_k}\hat{q}_k(x)$, то $Sp\,\rho_V[\mathcal{E},\mathcal{H}]=0$. Учитывая далее, что согласно (3.19), (2.16)

$$[w, S^z] = i\frac{\partial w}{\partial\varphi} , \qquad [w, \mathcal{H}] = ih\frac{\partial w}{\partial \varphi} ,$$

представим уравнения (4.14) в виде

$$\dot{\vartheta} = -\frac{\partial j_k}{\partial x_k} + \frac{\partial\langle v\rangle}{\partial\varphi} , \quad \dot{\mathcal{E}} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} - h\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial\varphi} , \quad \dot{\varphi} = -h . \tag{4.15}$$

Покажем, что энтропия $\sigma = -\omega + Y_z\vartheta + Y_0\mathcal{E}$ по-прежнему сохраняется, несмотря на то, что эти уравнения содержат релятивистские взаимодействия. Действительно, легко видеть, что

$$\dot{\sigma} = Y_0 \cdot \dot{\mathcal{E}} + Y_z \cdot \dot{\vartheta} - \frac{\partial\omega}{\partial p_k} \cdot \dot{p}_k .$$

Отсюда в силу уравнений (4.15) следует, что $\dot{\sigma} = 0$. Поэтому, выбирая в качестве независимых переменных ϑ , σ , $\vec{p}$, имеем окончательно

$$\dot{\sigma} = 0 , \qquad \dot{\varphi} = -\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta} ,$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)} + \frac{\partial\langle v\rangle}{\partial\varphi} . \tag{4.16}$$

Если в этих уравнениях учесть диссипативные члены, то релаксация магнитного момента в базисной плоскости будет приводить к некоторому значению угла $\varphi = \varphi_0$ определяемому из уравнения $\partial\langle v\rangle/\partial\varphi|_{\varphi=\varphi_0} = 0$. При этом в силу уравнения $\dot{\varphi} = -h = Y_z \cdot Y_0^{-1}$ величина Y_z будет релаксировать к нулю, что соответствует тому факту, что при наличии релятивистских взаимодействий S^z перестает быть интегралом движения. Легко проверить, что спектр спиновых волн в спиральных структурах при наличии релятивистских взаимодействий, нарушающих инвариантность относительно вращений спина вокруг оси z , будет приобретать энергию активации. Считая, что $\partial\langle v\rangle/\partial\varphi = a^2(\varphi - \varphi_0)$, выражение для спектра спиновых волн можно привести к виду

$$\omega(\vec{k}) = k_i\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial p_i\partial\vartheta} \pm \sqrt{\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\vartheta^2}\cdot\left(a^2 + k_i k_e \cdot \frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial p_i \partial p_e}\right)} .$$

5. Релаксационные процессы в спиральных магнитных структурах

Для учета диссипативных процессов в спиральных магнитных структурах необходимо найти величины $L_\alpha(x)$ и $L_k(x) = \nabla_k L_\varphi(x)$, определяющие макроскопические уравнения движения для $\zeta_\alpha(x)$ и $\vec{p}(x)$ в приближении, квадратичном по градиентам этих параметров. Из формул

(3.4), (3.II) следует

$$L^{(2)}_\alpha(x) = -\nabla_k\, Sp\,\rho^{(1)}(x)\hat{\varsigma}_{\alpha k}(0);$$

$$L^{(2)}_k(x) = \nabla_k L^{(1)}_\varphi(x) = \nabla_k\, Sp\,\rho^{(1)}(x)\cdot\hat{h}(0), \tag{5.I}$$

$$\hat{h}(0) = (2 s^{(0)}_\perp)^{-1}\cdot[\hat{H}, \bar{s}_\varphi(0) - \overset{+}{s}_\varphi(0)], \qquad s^{(0)}_\perp = Re\, Sp\,\rho^{(0)} s^{-}(0),$$

где $\rho^{(1)}(x)$ – статистический оператор в линейном приближении по градиентам. Легко видеть, исходя из уравнения (3.I0), что оператор $\rho^{(1)} \equiv \rho^{(1)}(x)$ имеет следующую общую структуру:

$$\rho^{(1)} = W^{(1)} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial Y_\alpha}\cdot Y^{(1)}_\alpha + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \varphi}\cdot \chi^{(1)} + \rho', \tag{5.2}$$

где, согласно (3.I7), $W^{(1)}$ – локально равновесный статистический оператор в линейном приближении, и оператор ρ' имеет вид

$$\rho' = \int_{-\infty}^{0} d\tau\; e^{iH\tau}\Big\{ i\Big[W^{(1)} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial Y_\alpha}\cdot Y^{(1)}_\alpha + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \varphi}\cdot\chi^{(1)}, H\Big] - \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \varsigma_\alpha} L^{(1)}_\alpha - \frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\Big|_{\varsigma}\cdot\nabla_k L^{(0)}_\varphi - \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \varphi}\cdot L^{(1)}_\varphi \Big\} e^{-iH\tau}. \tag{5.3}$$

Величины $Y^{(1)}_\alpha$ и $\chi^{(1)}$ в соответствии с (3.7) определяются из условий

$$Sp\,(W^{(1)} + \rho')\,\hat{\varsigma}_\alpha(0) + \frac{\partial \varsigma_\alpha}{\partial Y_\beta}\cdot Y^{(1)}_\beta = 0,$$

$$Sp\Big(W^{(1)} + \rho' + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial Y_\alpha}\cdot Y^{(1)}_\alpha + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \varphi}\cdot\chi^{(1)}\Big)\big(\bar{s}_\varphi(0) - \overset{+}{s}_\varphi(0)\big) = 0. \tag{5.4}$$

Для нахождения средних, входящих в (5.4), используем некоторые следствия, связанные со свойствами инвариантности при обращении времени, отражении координат и вращении в спиновом пространстве. Если T – оператор обращения времени $(t \to -t)$, то

$$T\,\overset{*}{\varsigma}_\alpha(x)\,T^+ = \varepsilon_\alpha\,\hat{\varsigma}_\alpha(x), \qquad \alpha = 0, z \tag{5.5}$$

$$T\,\overset{\pm *}{s}(x)\,T^+ = -\overset{\pm}{s}(x),$$

где $*$ – операция комплексного сопряжения и $\varepsilon = 1$ при $\alpha = 0$, $\varepsilon = -1$ при $\alpha = z$. Следствием формул (5.5), (2.6) являются равенства

$$T\,\overset{*}{\hat{\varsigma}}_{\alpha k}(x)\,T^+ = -\varepsilon_\alpha\,\hat{\varsigma}_{\alpha k}(x). \tag{5.6}$$

Если $\hat{P}$ – оператор отражения координат $(\vec{x} \to -\vec{x})$, то

$$P\,\hat{\varsigma}_\alpha(x)\,P^+ = \hat{\varsigma}_\alpha(-x), \qquad P\,\hat{\varsigma}_{\alpha k}(x)\,P^+ = -\hat{\varsigma}_{\alpha k}(-x),$$

$$P\,\overset{\pm}{s}(x)\,P^+ = \overset{\pm}{s}(-x). \tag{5.7}$$

Если $U(y,\pi)$ – унитарный оператор, соответствующий повороту в спиновом пространстве на угол π вокруг оси y, то

$$U(y,\pi)\,\hat{\varsigma}_\alpha(x)\,U^+(y,\pi) = \varepsilon_\alpha\,\hat{\varsigma}_\alpha(x),$$

$$U(y,\pi)\,\hat{\varsigma}_{\alpha k}(x)\,U^+(y,\pi) = \varepsilon_\alpha\cdot\hat{\varsigma}_{\alpha k}(x), \tag{5.8}$$

$$U(y,\pi)\,\overset{\pm}{s}(x)\,U^+(y,\pi) = \mp\,\overset{\pm}{s}(x).$$

Следствием (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) являются равенства

$$\hat{E}\,\overset{*}{\varsigma}_\alpha(x)\,E^+ = \hat{\varsigma}_\alpha(-x),$$

$$\hat{E}\,\overset{*}{\varsigma}_{\alpha k}(x)\,E^+ = \hat{\varsigma}_{\alpha k}(-x); \qquad E\,\overset{\pm *}{s}(x)\,E^+ = \overset{\pm}{s}(-x), \tag{5.9}$$

где $E \equiv U(y,\pi)\cdot P\cdot T$. Из формул (5.9) легко видеть, что в соответствии с явным видом операторов $W^{(0)}(x)$, $W^{(1)}(x)$ (см. (3.I7), (3.I8)) имеют место соотношения

$$E\,\overset{*}{W}{}^{(0)}\,E^+ = W^{(0)}\Big|_{\varphi\to-\varphi}, \qquad E\,\overset{*}{W}{}^{(1)}\,E^+ = -W^{(1)}\Big|_{\varphi\to-\varphi}. \tag{5.I0}$$

Замечая, что в выражении для операторов эволюции $L_\alpha^{(2)}$ и $L_k^{(2)}$ фаза φ входит только в виде $\nabla\varphi$ и учитывая, что средние $Sp\, w^{(1)}(x)\hat{\zeta}_\alpha(0)$, $Sp\, w^{(1)}(x)\hat{\zeta}_{\alpha k}(0)$ и $Sp\, w^{(1)}(x)\hat{h}(0)$ – действительные величины, из (5.9), (5.I0) получим

$$Sp\, w^{(1)}(x)\hat{\zeta}_\alpha(0) = Sp\, w^{(1)}(x)\hat{\zeta}_{\alpha k}(0) = Sp\, w^{(1)}(x)\cdot \hat{h}(0) = 0 . \tag{5.II}$$

Найдём среднее $Sp\, w^{(1)}(x)\cdot(\bar{\sigma}(0)-\overset{+}{\sigma}(0))$. Используя соотношения (3.20), (3.I9), а также формулу (3.I8), легко видеть, что среднее $Sp\, w^{(1)}(x)(\bar{\sigma}(0)-\overset{+}{\sigma}(0))$ имеет вид

$$Sp\, w_\nu^{(1)}\cdot(\bar{\sigma}_\varphi(0)-\overset{+}{\sigma}_\varphi(0)) = \frac{1}{i\nu Y_0}\left(\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial p_k}\Big|_Y + \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial p_i\,\partial p_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{i\nu Y_0}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{\partial\omega}{\partial p_k} .$$

Отсюда следует, что функция $\chi^{(1)} = \chi_\nu^{(1)}$ в соответствии с (5.4) определяется формулой

$$\chi_\nu^{(1)} = (2\sigma_\perp^{(0)}\cdot\nu Y_0)^{-1}\cdot\nabla_k\frac{\partial\omega}{\partial p_k} + \chi' , \quad \chi' \equiv Sp\,\rho'(\bar{\sigma}_\varphi(0)-\overset{+}{\sigma}_\varphi(0)). \tag{5.I2}$$

Таким образом, величина $\chi^{(1)}$ должна быть сингулярной по ν для того, чтобы среднее от $(\bar{\sigma}_\varphi-\overset{+}{\sigma}_\varphi)$ в состоянии $\rho^{(1)}(x)$ обращалось в нуль (см. (5.4)) (в соответствии со сказанным в конце раздела 3 величина $\chi' = Sp\,\rho'(\bar{\sigma}_\varphi-\overset{+}{\sigma}_\varphi)$ должна быть регулярной по ν).

Упростим теперь выражение для ρ' . Для этого найдем в явном виде оператор

$$i[W^{(1)}, H] = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k}\cdot\dot{\omega}_{\alpha k} + \frac{\partial p_i}{\partial x_k}\cdot\dot{\omega}_{ik} , \tag{5.I3}$$

$$\dot{\omega}_{\alpha k} = \lim_{\nu\to 0} i[\hat{\omega}_{\alpha k}, H_\nu] , \qquad \dot{\omega}_{ik} = \lim_{\nu\to 0} i[\hat{\omega}_{ik}, H_\nu],$$

где $H_\nu = H + \nu\int d^3x(\bar{\sigma}_\varphi(x) + э.с.)$. Преобразование этих величин будем делать при конечном ν . Рассмотрим выражение $\dot{\omega}_{zk}$. В соответствии с определением (5.I3) и формулой (3.2I) получим

$$\dot{\omega}_{zk} = W^{(0)}\cdot\int d^3x\int_0^1 d\lambda\,(\hat{j}_k(x,\lambda) - \langle j_k\rangle) + \frac{1}{Y_0}\cdot\frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\Big|_Y . \tag{5.I4}$$

Перейдём к нахождению оператора $\dot{\omega}_{0k}$. Пусть $\hat{e}_\nu(x) \equiv \hat{\varepsilon}(x) - h\hat{\sigma}(x) + \nu(\bar{\sigma}_\varphi(x) + \overset{+}{\sigma}_\varphi(x))$ – оператор плотности энергии, соответствующий гамильтониану H_ν . Тогда согласно (5.I3), (5.I4) имеем

$$\dot{\omega}_{0k} = W^{(0)}\int d^3x\int_0^1 d\lambda\,(Q_k^\nu(x,\lambda) - \langle Q_k^\nu\rangle) + h\cdot\dot{\omega}_{zk} , \tag{5.I5}$$

где $\hat{Q}_k^\nu(x)$ – оператор плотности потока энергии, соответствующий гамильтониану H_ν , который определяется формулой, аналогичной формуле (2.6):

$$\hat{Q}_k^\nu(x) = \frac{i}{2}\int d^3x'\,x_k'\int_0^1 d\lambda\,[\hat{e}^\nu(x-(1-\lambda)x'), e^\nu(x+\lambda x')] .$$

Этот оператор связан с оператором $\hat{q}_k(x)$ (2.6) формулой

$$\hat{Q}_k^\nu(x) = \hat{q}_k^\nu(x) - h\cdot\hat{j}_k(x) , \tag{5.I6}$$

$$\hat{q}_k^\nu(x) = \hat{q}_k(x) + i\nu\int d^3x'\,x_k'\int_0^1 d\lambda\,[\hat{\varepsilon}(x-(1-\lambda)x'), \bar{\sigma}_\varphi(x+\lambda x') + э.с.] .$$

Подставляя (5.I6) в (5.I5) и учитывая (5.I4), получим

$$\dot{\omega}_{0k} = W^{(0)}\cdot\int d^3x\int_0^1 d\lambda\,(\hat{q}_k^\nu(x,\lambda) - \langle\hat{q}_k^\nu\rangle) + h\,\frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k} . \tag{5.I7}$$

Объединяя формулы (5.I4), (5.I7), найдём

$$\dot{\omega}_{\alpha k} = W^{(0)}\cdot\int d^3x\int_0^1 d\lambda\,(\zeta_{\alpha k}^\nu(x,\lambda) - \langle\zeta_{\alpha k}^\nu\rangle) - \frac{\partial h}{\partial Y_\alpha}\cdot\frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\Big|_Y ,$$

$$\zeta_{\alpha k}^\nu \equiv (\hat{q}_k^\nu, \hat{j}_k). \tag{5.I8}$$

Перейдём теперь к нахождению величин $\dot{\omega}_{ik}$. Согласно (3.I8), имеем

$$i\int d^3x\,x_i\,[\hat{j}_k(x), W^{(0)}] = iY_0 W^{(0)}\int d^3x\,x_i\int_0^1 d\lambda\,[H^\nu, \hat{j}_k(x,\lambda)].$$

Поэтому

$$\dot{\omega}_{ik} = \frac{\nu}{2}\int d^3x\,x_i x_k\,[\bar{\sigma}_\varphi(x) - \overset{+}{\sigma}_\varphi(x), W^{(0)}],$$

следовательно, $\dot{\omega}_{ik} \xrightarrow[\nu\to 0]{} 0$ (см. раздел 3). Таким образом,

$$i[W^{(1)}, H] = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k}W^{(0)}\int_0^1 d\lambda\int d^3x\,(\zeta_{\alpha k}^\nu(x,\lambda) - \langle\zeta_{\alpha k}^\nu\rangle) - \frac{\partial h}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\Big|_Y . \tag{5.I9}$$

Покажем теперь, что $Y_\alpha^{(1)} = 0$. Вычислим с этой целью $Sp\rho' \hat{\zeta}_\alpha(0)$. В соответствии с (5.19) справедливо равенство

$$i\,Sp[W^{(1)}, H]e^{-iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha e^{iH\tau} = -\frac{\partial h}{\partial x_k}\cdot Sp\frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\Big|_Y\cdot e^{-iH\tau}\hat{\zeta}_{\alpha k}e^{iH\tau} +$$

$$+\frac{\partial Y_\beta}{\partial x_k}\cdot Sp W^{(0)}\int d^3x'\int_0^1 d\lambda\,(\overset{\vee}{\zeta}_\alpha(x',\lambda) - \langle\overset{\vee}{\zeta}_\alpha\rangle)\cdot e^{iH\tau}\hat{\zeta}_{\beta k}e^{-iH\tau}.$$

Далее, так как

$$e^{iH\tau}\frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\Big|_Y e^{-iH\tau} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}, \quad e^{iH\tau}\frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\Big|_\zeta e^{-iH\tau} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\Big|_\zeta + i\frac{\partial h}{\partial p_k}\Big|_\zeta\cdot[S^z, W^{(0)}],$$

$$e^{iH\tau}\frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha}\Big|_p e^{-iH\tau} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha}\Big|_p + i\tau[S^z, W^{(0)}]\cdot\frac{\partial h}{\partial \zeta_\alpha},$$

то, учитывая равенство $\frac{\partial W^{(0)}}{\partial Y_\alpha} = -W^{(0)}\int d^3x\int_0^1 d\lambda(\overset{\vee}{\zeta}_\alpha(x,\lambda) - \langle\overset{\vee}{\zeta}_\alpha\rangle)$ и соотношение (2.16), получим

$$i\,Sp\,e^{iH\tau}[W^{(1)}, H]e^{-iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha(0) = -\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial p_k}\Big|_Y\cdot\frac{\partial h}{\partial x_k} - \frac{\partial Y_\beta}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial \zeta_{\beta k}}{\partial Y_\alpha}.$$

$$Sp\,e^{iH\tau}\frac{\partial W^{(0)}}{\partial \zeta_\beta}\,e^{-iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha(0)\cdot L_\beta^{(1)} = L_\alpha^{(1)},$$

$$Sp\,e^{iH\tau}\frac{\partial W^{(0)}}{\partial p_k}\cdot e^{-iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha(0) = 0. \tag{5.20}$$

В соответствии с (5.12), (3.19), учитывая регулярность величины χ'_ν при $\nu\to 0$, видим, что

$$\lim i\left[\frac{\partial W_\nu^{(0)}}{\partial\varphi}\cdot\chi^{(1)}, H^\nu\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot W^{(0)}\int_0^1 d\lambda\int d^3x'\,\hat{h}(x',\lambda).$$

Поэтому

$$i\,Sp\,e^{iH\tau}\left[\frac{\partial W^{(0)}}{\partial\varphi}\cdot\chi_\nu^{(1)}, H\right]e^{-iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha(0) = \frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial h}{\partial Y_\alpha}. \tag{5.21}$$

Имеем далее

$$iY_\alpha^{(1)}\cdot Sp\,e^{iH\tau}\left[\frac{\partial W^{(0)}}{\partial Y_\alpha}, H\right]e^{-iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha(0) = 0,$$

$$L_\varphi^{(1)}\cdot Sp\,e^{iH\tau}\cdot\frac{\partial W^{(0)}}{\partial\varphi}\cdot e^{-iH\tau}\hat{\zeta}_\alpha(0) = 0. \tag{5.22}$$

Следствием формул (5.20), (5.21), (5.22) является равенство

$$Sp\rho'(x)\hat{\zeta}_\alpha(0) = 0. \tag{5.23}$$

Из (5.4), (5.23) вытекает, что $Y_\alpha^{(1)} = 0$.

Таким образом, найдем следующее окончательное выражение для статистического оператора

$$\rho' = \int_{-\infty}^0 d\tau\left\{e^{iH\tau}\cdot\left(W_\nu^{(0)}\cdot\int_0^1 d\lambda\int d^3x'\left[\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k}(\overset{\vee}{\zeta}{}'_{\alpha k}(x',\lambda) - \langle\overset{\vee}{\zeta}{}'_{\alpha k}\rangle) +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot\hat{h}'(x',\lambda)\right] - i[S^z, W^{(0)}]\cdot L_\varphi^{(1)}\right)e^{-iH\tau}\right\}_{\nu\to 0}. \tag{5.24}$$

Здесь

$$\hat{\zeta}'_{\alpha k}(x) = \overset{\vee}{\zeta}_{\alpha k}(x) - \frac{\partial\zeta_{\alpha k}}{\partial\zeta_\beta}\cdot\hat{\zeta}_\beta(x),$$

$$\hat{h}'(x) = \hat{h}(x) + \frac{\partial h}{\partial\zeta_\alpha}\cdot\hat{\zeta}_\alpha(x). \tag{5.25}$$

Отметим, что в формуле (5.24) необходимо переходить к пределу $\nu\to 0$ (после термодинамического предельного перехода) под знаком интегрирования по τ. В противном случае эволюция с гамильтонианом H^ν при конечных ν приводит к отсутствию закона сохранения z - компоненты спина, что, в свою очередь, ведет к тому, что подынтегральное выражение не стремится к нулю в области больших τ.

Величины $L_\alpha^{(2)}$ и $L_k^{(2)}$, согласно (5.1), определяются формулами

$$L_\alpha^{(2)}(x) = -\nabla_k\cdot Sp\rho'(x)\cdot\hat{\zeta}_{\alpha k}(0) = -\nabla_k\cdot\zeta_{\alpha k}^{(1)}(x),$$

$$L_k^{(2)}(x) = \nabla_k Sp\rho'(x)\cdot\hat{h}(0) = \nabla_k\cdot L_\varphi^{(1)}(x). \tag{5.25'}$$

Легко видеть, что слагаемое $i[S^z, W^{(0)}]L_\varphi^{(1)}$ не дает вклада в средние $Sp\rho'(x)\hat{\zeta}_{\alpha k}(0)$ и $L_\varphi^{(1)}(x) = Sp\rho'(x)\hat{h}(0)$, которые с учетом трансформационных свойств (5.10) можно представить в виде

$$\overset{(1)}{\varsigma}_{\alpha k}(x) = \frac{\partial Y_\beta}{\partial x_\ell}\cdot I(\hat{\varsigma}'_{\beta\ell}, \hat{\varsigma}'_{\alpha k}) + \frac{\partial}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p_\ell}\cdot I(\hat{h}', \hat{\varsigma}'_{\beta\ell}),$$

$$\overset{(1)}{L}_\varphi(x) = \frac{\partial Y_\beta}{\partial x_k}\cdot I(\hat{\varsigma}'_{\beta k}, \hat{h}') + \frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot I(\hat{h}', \hat{h}'). \tag{5.26}$$

Величины

$$I(\hat{a}, \hat{b}) \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \, Sp\, w^{(0)} e^{iH\tau}\left(\hat{a}(x) - \langle a\rangle\right) e^{-iH\tau}\, \hat{b}(0), \tag{5.27}$$

входящие в (5.26), являются обобщенными кинетическими коэффициентами и удовлетворяют принципу Онзагера:

$$I(\hat{a}, \hat{b}) = I(\hat{b}, \hat{a}). \tag{5.28}$$

Кроме того, эти величины удовлетворяют неравенствам

$$I(\hat{a}, \hat{a}) \geqslant 0, \qquad I(\hat{a}, \hat{a})\cdot I(\hat{b}, \hat{b}) \geqslant I^2(\hat{a}, \hat{b}).$$

Из уравнений (4.7) и формул (5.25) следует уравнение

$$\dot{\sigma} + \nabla_k \dot{j}^{(1)}_{\sigma k} = I^{(2)}, \tag{5.29}$$

где плотность потока энтропии $\dot{j}^{(1)}_{\sigma k}$ с учетом процессов диссипации определяется формулой

$$\dot{j}^{(1)}_{\sigma k} = \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot \overset{(1)}{L}_\varphi + Y_\alpha\cdot \overset{(1)}{\varsigma}_{\alpha k}, \tag{5.30}$$

а источник энтропии $I^{(2)}$ имеет вид

$$I^{(2)} = \overset{(1)}{L}_\varphi\cdot\nabla_k\frac{\partial\omega}{\partial p_k} + \overset{(1)}{\varsigma}_{\alpha k}\cdot\nabla_k Y_\alpha =$$

$$= I\left\{\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k}\cdot\hat{\varsigma}'_{\alpha k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\cdot\hat{h}', \ \frac{\partial Y_\beta}{\partial x_\ell}\cdot\hat{\varsigma}'_{\beta\ell} + \frac{\partial}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p_\ell}\cdot\hat{h}'\right\} \geqslant 0$$

и обеспечивает возрастание энтропии. В определение кинетических коэффициентов (5.27) входит статистический оператор $w^{(0)}$, являющийся функцией векторных величин – вектора спирали $\vec{p}$ и единичного век-

тора $\vec{n}$ оси анизотропии, что приводит к тензорной структуре этих коэффициентов. В общем случае рассматриваемая система характеризуется 28 кинетическими коэффициентами. Мы, однако, их выписывать не будем, а приведем подробнее случай, когда $\vec{p} \parallel \vec{n}$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемой ситуации диссипативные процессы описываются 10 кинетическими коэффициентами

$$\varkappa_{k\ell} \equiv \frac{1}{T^2}\cdot I(\hat{q}'_\ell - h\hat{j}'_\ell + j_\ell\hat{h}', \ \hat{q}'_k - h\hat{j}'_k + j_k\cdot\hat{h}') = \delta_{k\ell}\cdot\varkappa + n_k\cdot n_\ell\cdot\varkappa',$$

$$\mathcal{D}_{k\ell} \equiv \frac{1}{T^2} I(\hat{q}'_\ell - h\hat{j}'_\ell + j_\ell\cdot\hat{h}', \ \hat{j}'_k) = \delta_{k\ell}\mathcal{D} + n_k n_\ell\cdot\mathcal{D}' + \varepsilon_{ik\ell}\cdot n_i\,\mathcal{D}'', \tag{5.31}$$

$$\sigma_{k\ell} \equiv \frac{1}{T} I(\hat{j}'_\ell, \hat{j}'_k) = \delta_{k\ell}\cdot\sigma + n_k\cdot n_\ell\cdot\sigma',$$

$$n_k\cdot A \equiv \frac{1}{T^2} I(\hat{q}'_k - h\hat{j}'_k + j_k\hat{h}', \hat{h}'), \quad n_k B \equiv \frac{1}{T} I(\hat{j}'_k, \hat{h}'), \quad C \equiv \frac{1}{T} I(\hat{h}', \hat{h}').$$

Здесь $\varkappa_{k\ell}$ – коэффициент теплопроводности, $\sigma_{k\ell}$, $\mathcal{D}_{k\ell}$ – коэффициенты спиновой диффузии, A, B, C – коэффициенты спиновой вязкости. Выражения для потоков $\dot{j}^{(1)}_{\sigma k}$, $\dot{j}^{(1)}_k$, $\overset{(1)}{L}_\varphi$, если принимать во внимание (5.31), имеют вид

$$\dot{j}^{(1)}_{\sigma k} = -\frac{1}{T}\varkappa_{k\ell}\cdot\nabla_\ell T - \mathcal{D}_{k\ell}\cdot\nabla_\ell h + n_k A\cdot\nabla_\ell j_\ell,$$

$$\dot{j}^{(1)}_k = -\mathcal{D}_{k\ell}\cdot\nabla_\ell T - \sigma_{k\ell}\cdot\nabla_\ell h + B n_k \nabla_\ell j_\ell, \tag{5.32}$$

$$\overset{(1)}{L}_\varphi = -n_k\cdot A\nabla_k T - n_k B\nabla_k h + C\nabla_k j_k.$$

В изотропном случае при $\vec{p} = 0$ из (5.32) следует

$$\dot{j}^{(1)}_{\sigma k} = -\frac{1}{T}\varkappa\nabla_k T - \mathcal{D}\cdot\nabla h, \tag{5.33}$$

$$\dot{j}^{(1)}_k = -\mathcal{D}\nabla_k T - \sigma\nabla_k h, \qquad \overset{(1)}{L}_\varphi = C\nabla_k j_k.$$

этот случай соответствует коллинеарному магнетику ($\vec{\rho}=0$) и характеризуется 4 кинетическими коэффициентами. Структура потоков (5.33) совпадает с результатами работы [18], полученными из феноменологических принципов.

Отметим в заключение, что если вместо непрерывной среды имеется решетка, то формулы (4.4), (4.5), (5.25) остаются по-прежнему справедливыми, однако в выражениях для кинетических коэффициентов (5.27) под операцией Sp следует понимать операцию $\overline{Sp}$, включающую в себя дополнительное усреднение по ячейке решетки (см. раздел 2).

Литература

1. Kaplan T.A. Phys. Rev. 1961, v.124, p.329.
2. Cooper B.R.,Elliot R.J. Phys. Rev. 1962, v.127, p.57.
3. Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. Наука,М.,1975.
4. Барьяхтар В.Г., Савченко М.А., Шишкин Л.А. ФТТ, 1964 г.,т.6,с.1435.
5. Дзялошинский И.Е.ЖЭТФ, 1964 г., 46, с.1420.
6. Барьяхтар В.Г., Стефановский Е.П. ФТТ, 1969, т.11, с.1946.
7. Изюмов Ю.А. УФН, 1984, т.144, с.439.
8. Изюмов Ю.А., Лаптев В.М. ЖЭТФ, 1985, т.88, с.165.
9. Боголюбов Н.Н. Избр.труды. Киев, Наукова думка, 1971, т.3, с.174.
10. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
11. Боголюбов Н.Н. Избранные труды. Киев, Наукова думка, 1970, т.2.
12. Пелетминский С.В., Соколовский А.И. ТМФ, 1974, т.18, с.121.
13. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. М., Наука, 1977.
14. Ковалевский М.Ю., Лавриненко Н.М., Пелетминский С.В., Соколовский А.И. ТМФ, 1982, т.50, с.450.
15. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., Тарасов А.Н. В сб.:Исследования по физике кинетических явлений. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984, с.102.
16. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., Слюсаренко Ю.В. Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, ОИЯИ, Д-17-84-850, т.1, с.365.
17. Боголюбов Н.Н. (мл.), Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., Тарасов А.Н., Курбатов А.М. ЭЧАЯ, 1985, т.16, с.875.
18. Halperin B.J., Hohenberg P.C. Phys. Rev. 1969, v.188, p.898.
19. Барьяхтар В.Г., Криворучко В.Н., Яблонский Д.Я. Функции Грина в теории магнетизма. - Наукова думка, - Киев, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 мая 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика