

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

М 36

P17-87-295

**А.В.Маханьков, В.Г.Маханьков**

**СПИНОВЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ,  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХОЛШТЕЙНА-ПРИМАКОВА  
ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА  
И СТАТУС УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА**

Направлено в журнал "physica status solidi"

**1987**

## Введение

В последние годы сформировалась концепция нового типа коллективных возбуждений в упорядоченных средах, так называемые частицеподобные или солитоноподобные возбуждения <sup>1-3</sup>. Обычно они появляются как локализованные решения классических полевых уравнений, таких как  $SG$ , НУШ, Ландау-Лифшица и т.д. С другой стороны, основой теоретического изучения большого класса магнетиков являются модели Гейзенберга, экситонов в кристаллах и другие. Естественно возникает вопрос об отношении коллективных нелинейных эффектов в классических и квантовых моделях, т.е. о формулировании достаточно последовательной "процедуры сведения" моделей квантовой статистической механики к классическим полевым моделям. Иногда такой переход осуществляется формальной заменой спинового оператора  $\hat{S}$  классическим вектором <sup>4</sup>. Ниже мы рассмотрим два варианта такой процедуры на примере модели Гейзенберга с одноосной анизотропией: широко известное и часто используемое преобразование Холштейна-Примакова (ХП), позволяющее "бозонизировать" исходный гамильтониан, и спиновые когерентные состояния (СКС) ( $SU(2)/U(1)$ -обобщенные когерентные состояния). Будут сформулированы условия применимости соответствующих процедур сведения.

Структура работы следующая. В § 1 мы обсудим симметричные свойства исходного гамильтониана и основного состояния, в § 2 - условия применимости ХП, а в § 3 - СКС для рассматриваемых моделей. В заключении представим полученные результаты.

### § 1. Модели Гейзенберга

Рассмотрим модель Гейзенберга вида

$$\hat{H} = -\frac{1}{4} \sum_j J(\hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- + \hat{S}_j^- \hat{S}_{j+1}^+) - \frac{1}{2} \sum_j \tilde{J} \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z, \quad (1)$$

где  $\hat{S}_j^{\pm}$ ,  $\hat{S}_j^z$  - спиновые операторы,  
 $J, \tilde{J}$  - обменные интегралы.

Будем, как обычно, называть (1) изотропной моделью Гейзенберга (ИМГ), если  $J = \tilde{J}$ ; легкоосной (ЛОМГ), если  $J < \tilde{J}$ ; и легкоплоскостной (ЛПМГ) при  $J > \tilde{J}$ .

Гамильтониан ИМГ, как нетрудно проверить, обладает  $SU(2)$ -симметрией. Симметрия гамильтонианов ЛОМГ и ЛПМГ есть  $Z_2 \otimes U(1)$ .

Основные состояния, соответствующие этим трем моделям, имеют существенно различную симметрию. Ферромагнитное состояние в первом случае выделяет ось спонтанного намагничивания (ОСН) (во всяком случае, при достаточно больших  $S$ ) и нарушает исходную симметрию до  $U(1)$ . Во втором случае ось спонтанного намагничивания совпадает с легкой осью, при этом нарушается  $Z_2$ -симметрия. В третьем случае ось спонтанного намагничивания лежит в легкой плоскости, а исходная симметрия нарушается до  $Z_2$ . Изобразим эти варианты на рис. 1.

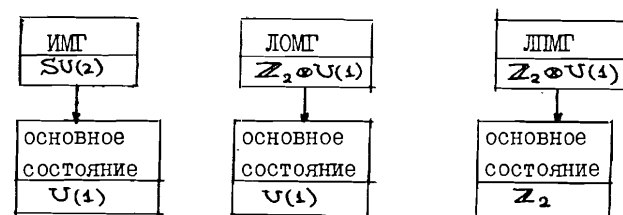


Рис. 1

### § 2. Преобразования Холштейна-Примакова и процедура сведения

Напомним, что базисным элементом этого преобразования является выбор оси квантования  $Oz$ :

$$\begin{aligned} \hat{S}_j^+ &= \sqrt{2s} \sqrt{1 - \frac{a_j^+ a_j}{2s}} a_j, \\ \hat{S}_j^- &= \sqrt{2s} a_j^+ \sqrt{1 - \frac{a_j^+ a_j}{2s}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\hat{S}_j^z = s - a_j^+ a_j, \quad \text{причем } [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}, [a_i, a_i] = [a_i^+, a_i^+] = 0.$$

С другой стороны, как мы видели в предыдущем параграфе, основное ферромагнитное состояние выделяет физическую ось - ось намагничивания. Как мы увидим ниже, преобразования ХП адекватно описывают малые колебания вектора спина вблизи оси квантования, если она совпадает с физически выделенной осью.

Рассмотрим все три варианта:

1. ИМГ.

Направление физической оси произвольно, выбираем его вдоль оси  $\hat{z}$ . Преобразования XII описывают прецессию вектора спина в конусе (см. рис. 2).

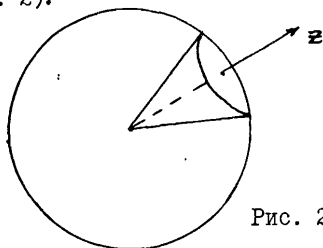


Рис. 2

2. ЛОМГ

Выбираем ось  $\hat{z}$  вдоль легкой оси (см. рис. 3).

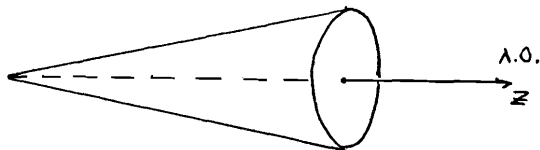


Рис. 3

3. ЛПМГ

Здесь физически выделены два направления:

а) ось, перпендикулярная легкой плоскости;

б) ось спонтанного намагничивания, лежащая в легкой плоскости.

Вообще говоря, можно использовать и ту и другую в качестве оси квантования  $\hat{z}$  (см. рис. 4 а, 4 б).

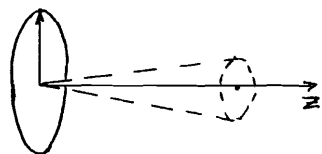


Рис. 4 а

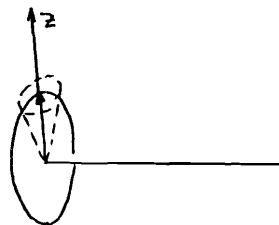


Рис. 4 б

Используем теперь преобразования XII (2) и глауберовские (гейзенберг-вейлевские) когерентные состояния. Как известно, для гейзенберг-вейлевских когерентных состояний

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (3)$$

определяемых точками комплексной плоскости  $\alpha$  (фазовой плоскости), справедливо следующее утверждение, что для оператора  $\hat{A}$ ,

$\hat{A} = \sum_{i,k} C_{ik} (\alpha^\dagger)^i (\alpha)^k$ , записанного в нормальной форме, имеет место равенство

$$\langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle = \sum_{i,k} C_{ik} (\bar{\alpha})^i (\alpha)^k. \quad (4)$$

С помощью преобразований XII в варианте ИМГ, ЛОМГ и ЛПМГ (а) получим гамильтониан  $\hat{H}$  в терминах бозе-операторов:

$$\hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_4 + \hat{H}_6, \quad (5)$$

$$\hat{H}_2 = -\frac{S}{2} \sum_j J (a_{j+1}^\dagger a_j + a_j^\dagger a_{j+1}) - \frac{S^2}{2} \sum_j \tilde{J} + \frac{S}{2} \sum_j \tilde{J} (a_j^\dagger a_j + a_{j+1}^\dagger a_{j+1}),$$

$$\hat{H}_4 = \frac{1}{8} \sum_j J [(a_j^\dagger)^2 a_j a_{j+1} + a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger (a_{j+1})^2 + a_{j+1}^\dagger a_j (a_j)^2 + (a_{j+1}^\dagger)^2 a_{j+1} a_j] - \frac{1}{2} \sum_j \tilde{J} (a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger a_j a_{j+1}),$$

$$\hat{H}_6 = -\frac{1}{128S} \sum_j J [2a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger a_j a_{j+1} a_j + 2(a_j^\dagger)^2 a_{j+1}^\dagger a_j (a_{j+1})^2 - a_{j+1}^\dagger (a_j^\dagger)^2 (a_j)^3 - (a_{j+1}^\dagger)^3 (a_{j+1})^2 a_j - (a_j^\dagger)^3 (a_j)^2 a_{j+1} - a_j^\dagger (a_{j+1}^\dagger)^2 (a_{j+1})^3].$$

Гамильтониан (5) записан в нормальной (виковской) форме, поэтому можно использовать усреднение его по состояниям (3) с учетом (4). В результате получим классическую модель гамильтониана (5) на решетке. Перейдем к континуальному пределу обычным способом, предполагая  $a_0$  (расстояние между узлами решетки) достаточно малым (см. ниже). Оставляя члены порядка  $O(a_0^2)$ , получим

$$a_0 \mathcal{H}_m = \int [-2S J (1-g) |\alpha|^2 + A |\alpha|^4 + \frac{J}{16S^2} |\alpha|^6 + S a_0^2 J |\alpha_x|^2 - \frac{a_0^2}{2} A (|\alpha_x|^2)^2 + \frac{a_0^2}{4} J (\bar{\alpha}_x^2 \alpha_x^2 + \bar{\alpha}_x \alpha_x^2 \alpha_x^2) + \frac{a_0^2}{16S} J |\alpha|^2 (|\alpha_x|^2)^2] dx,$$

где  $\alpha = \alpha(x, t)$ ,

$$A = J(1-g + \frac{1}{8s} + \frac{1}{32s^2}), \quad J(1-g) = J - \tilde{J} = -\alpha_0^2 \frac{\Delta}{2} J. \quad (6)$$

Опуская члены  $\frac{\alpha_0^2}{2} A(|\alpha_x|^2)^2$  и  $\frac{\alpha_0^2}{16s} J|\alpha|^2(|\alpha_x|^2)^2$ , малые по сравнению с  $A|\alpha|^4$ , имеем

$$H_{кл} = s\alpha_0 J \int \left\{ \Delta|\alpha|^2 + |\alpha_x|^2 + G|\alpha|^4 + K|\alpha|^6 + B(\bar{\alpha}^2 \alpha_x^2 + \bar{\alpha}_x^2 \alpha^2) \right\} dx, \quad (7)$$

где

$$G = -\frac{\Delta}{2s} + \frac{1}{8s^2 \alpha_0^2} + \frac{1}{32s^3 \alpha_0^2}, \quad (8)$$

$$K = \frac{1}{16s^3 \alpha_0^2},$$

$$B = \frac{1}{4s}.$$

Проварьировав гамильтониан (7), мы получим уравнение

$$\frac{i\dot{\alpha}}{J s \alpha_0} = \alpha_{xx} - \Delta\alpha - |\alpha|^2 \alpha (2G + 3K|\alpha|^2) + 2B(\bar{\alpha}_{xx} \alpha^2 - \bar{\alpha} \alpha_x^2 + 2\alpha|\alpha_x|^2). \quad (9)$$

Рассмотрим вариант ЛПМГ (б), то есть когда ось квантования совпадает с осью спонтанного намагничивания, лежащей в легкой плоскости. В этом случае гамильтониан есть

$$\hat{H} = \sum_n \hat{H}_n \equiv -J \sum_n \left[ \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z + \hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^x + g \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^y \right]. \quad (10)$$

Перепишем его в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_+ + \hat{H}_-, \quad \text{где}$$

$$\hat{H}_+ = -\frac{1+g}{2} \sum_n \left[ \frac{1}{2} (\hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^- + \hat{S}_{n+1}^+ \hat{S}_n^-) + \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right], \quad (11)$$

$$\hat{H}_- = -\frac{1-g}{2} \sum_n \left[ \frac{1}{2} (\hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^+ + \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+1}^-) + \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right],$$

далее, используя процедуру, описанную выше, получим классическую модель:

$$H = H_+ + H_-, \quad (12)$$

$$H_+ = \frac{1+g}{2} s \alpha_0^2 \int |\alpha_x|^2 dx, \quad (12a)$$

$$H_- = -\frac{1-g}{2} \cdot 2s \int \left[ |\alpha|^2 - \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{2} \right] \left( 1 - \frac{|\alpha|^2}{2s} \right) dx. \quad (12b)$$

В (12b) выброшены члены порядка  $O(\alpha_0^2)$ , что справедливо при малой анизотропии, см. (6). Итак, имеем гамильтониан

$$H = s\alpha_0 J \int \left[ |\alpha_x|^2 + \frac{\Delta}{2} (|\alpha|^2 - \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{2}) \left( 1 - \frac{|\alpha|^2}{2s} \right) \right] dx, \quad (13)$$

уравнение движения

$$i\dot{\alpha} = \alpha_{xx} + \frac{\Delta}{2} (\alpha - \bar{\alpha}) + \frac{\Delta}{2s} |\alpha|^2 \alpha + \frac{\Delta}{8s} \alpha^3 + \frac{3\Delta}{8s} |\alpha|^2 \bar{\alpha}. \quad (14)$$

Как и следовало ожидать (см. рис. 4 б), в уравнении (14) нарушена  $U(1)$ -симметрия.

Рассмотрим малые колебания вблизи основного классического состояния для ЛПМГ,  $\Delta < 0$ .

**Вариант 3 (а).** Основное состояние определяется уравнением (9):

$$\alpha \left[ -|\Delta| \left( 1 - \frac{|\alpha|^2}{s} \right) + \frac{1}{4s} \frac{|\alpha|^2}{s} \left( 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{|\alpha|^2}{s} \right) \right] = 0.$$

Это уравнение имеет решения:

1.  $\alpha = 0$  соответствует классическому вакууму легкой оси,  $S^z = s - |\alpha|^2 = s$  при  $\Delta > 0$ .

$$2. -|\Delta| \left( 1 - \frac{|\alpha|^2}{s} \right) + \frac{1}{4s} \frac{|\alpha|^2}{s} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{|\alpha|^2}{s} \right) = 0. \quad (15)$$

Это уравнение имеет в виде приближенного решения легкоплоскостной вакуум  $S^z = s - |\alpha|^2 = 0$ , т.е.  $|\alpha|^2 = s$ , лишь при

$$S \cdot \Delta \gg 1. \quad (16)$$

Пусть (16) выполнено, тогда для малых колебаний вблизи  $|\alpha|^2 = s$ :  $\alpha = 1 + \eta$ ,  $\eta = \eta_0 e^{ikx - i\omega t}$ , имеем бogoлюбовскую дисперсию:

$$\omega = \pm |k| \sqrt{k^2 + 2|\Delta|}. \quad (17)$$

Вариант 3 (б). Рассмотрим уравнение (I4), легкоплоскостному вакууму в рамках этого подхода соответствует решение (I4)  $\alpha = 0$ . Дисперсия вблизи этого состояния описывается уравнением

$$i\dot{\alpha} = \alpha_{xx} + \frac{\Delta}{2}(\alpha - \bar{\alpha}), \quad \text{что дает} \quad (I8)$$

$$\omega = \pm |k| \sqrt{k^2 + |\Delta|}.$$

Таким образом, два варианта 3 (а) и 3 (б) (два различных способа использования преобразований XII) приводят к различным результатам уже в линейном приближении. Из этого анализа следует, что возможность применения преобразования XII принципиально зависит от знания основного квантового состояния (точнее, в данном случае от направления оси намагничивания). Действительно, в варианте 3 (а) не восстанавливается правильно даже основное классическое состояние, если не выполнено (I6).

### § 3. Процедура сведения на базе спиновых когерентных состояний (СКС)

Здесь для перехода от квантовой системы к классической мы используем усреднение исходного гамильтониана по обобщенным когерентным состояниям (ОКС) группы  $SU(2)$ :

$$|\Psi_j\rangle = (1 + |\Psi_j|^2)^{-s} e^{\Psi_j \hat{S}_j^+} |s, -s\rangle_j. \quad (I9)$$

Очень важно отметить, что это оправдано, когда исходный гамильтониан имеет приближенную симметрию  $SU(2)$ . Обсуждение свойств этих состояний можно найти в обзоре Переломова /7/; мы напомним лишь те из них, которые потребуются нам в дальнейшем.

I. Поскольку спиновые операторы коммутируют в соседних узлах, ОКС всей решетки есть прямое произведение систем ОКС в отдельных узлах:

$$|\Psi\rangle = \prod_j |\Psi_j\rangle, \quad j = \overline{1, N}.$$

Поэтому среднее от произведения операторов  $\hat{S}$  в соседних узлах можно представить в виде

$$\langle \Psi | \hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- | \Psi \rangle = \langle \Psi_j | \hat{S}_j^+ | \Psi_j \rangle \langle \Psi_{j+1} | \hat{S}_{j+1}^- | \Psi_{j+1} \rangle \quad (20)$$

произведения средних.

2. Нормировка:  $\langle \Psi_j | \Psi_j \rangle = 1$ .

3. В пределе больших значений  $S$  ОКС переходят в обычные. Сделаем подстановку

$$\hat{S}_j^+ \longrightarrow \sqrt{2s} a_j^+, \quad \Psi_j \longrightarrow \frac{\alpha_j}{\sqrt{2s}} \quad (21)$$

и положим  $s \rightarrow \infty$ , имеем из (I9)

$$|\Psi_j\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|\alpha_j|^2}{2s}\right)^{-s} e^{\alpha_j a_j^+} |0\rangle_j$$

(ясно, что полное соответствие имеет место лишь в пределе).

Усредняя один член в сумме (I), имеем

$$\langle \Psi | \hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- | \Psi \rangle = 4s^2 \frac{\bar{\Psi}_j \Psi_{j+1}}{(1 + |\Psi_j|^2)(1 + |\Psi_{j+1}|^2)}, \quad (22a)$$

$$\langle \Psi | \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z | \Psi \rangle = s^2 \frac{(1 - |\Psi_j|^2)(1 - |\Psi_{j+1}|^2)}{(1 + |\Psi_j|^2)(1 + |\Psi_{j+1}|^2)}. \quad (22b)$$

Подставляя формулы (22) в (I), получим

$$H_{кл} = -J \sum_j \langle \Psi | \left[ \frac{1}{2} (\hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- + h.c.) + \rho \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z \right] | \Psi \rangle =$$

$$= -s^2 J \sum_j \frac{2(\bar{\Psi}_j \Psi_{j+1} + \bar{\Psi}_{j+1} \Psi_j) + \rho(1 - |\Psi_j|^2)(1 - |\Psi_{j+1}|^2)}{(1 + |\Psi_j|^2)(1 + |\Psi_{j+1}|^2)}. \quad (23)$$

Его континуальный аналог с точностью  $O(a^2)$  есть

$$\tilde{H}_{кл}(\Psi) = 2s^2 \alpha_0 J \int \frac{|\Psi_x|^2 + \Delta |\Psi|^2}{(1 + |\Psi|^2)} dx + \text{const}. \quad (24)$$

Гамильтониан (24) порождает уравнение движения\*

$$i\dot{\Psi}_x = \Psi_{xx} - 2\bar{\Psi} \frac{\Psi_x^2}{1 + |\Psi|^2} + \Delta \frac{|\Psi|^2 - 1}{|\Psi|^2 + 1} \Psi, \quad (25)$$

эквивалентное уравнению Ландау-Лифшица /6/, с точностью до перехода к стереографической проекции

\* Такое же уравнение порождается классическим лагранжианом, полученным методом работ /5/.

$$S^+ \equiv S^x + iS^y = \frac{2\psi}{1+|\psi|^2}, \quad S^- = \frac{2\bar{\psi}}{1+|\psi|^2}, \quad S^z = \frac{1-|\psi|^2}{1+|\psi|^2}, \quad (26)$$

где  $\vec{S} = \{S^x, S^y, S^z\}$  - классический вектор, пропорциональный магнитному моменту.

Подчеркнем здесь, что

1) метод усреднения по СКС индифферентен по отношению к выбору оси квантования  $OZ$ , в отличие от метода ПХП. Это, в частности, следует из их геометрических образов: образ ПХП и гейзенберг-вейлевских КС есть комплексная плоскость с перпендикулярной к ней осью квантования, образ СКС есть сфера с осью квантования, проходящей через ее центр;

2) гамильтониан (24) получен из модели Гейзенберга при малой анизотропии  $\delta \equiv \frac{J-J'}{J} \sim a_0^2$ ;

3) в случае большой анизотропии  $\delta \sim 1$  симметрии гамильтониана и СКС различны, и использование  $SU(2)/U(1)$  СКС вряд ли является оправданным.

Пусть теперь  $\delta \ll 1$  (например,  $\delta \sim a_0$ ), тогда лидирующий член в классическом гамильтониане

$$H = \frac{1}{a_0^2} \delta J \int \left( \frac{|\psi|^2 - 1}{|\psi|^2 + 1} \right)^2 dx$$

будет порождать уравнение движения

$$i\dot{\psi} = 4\delta^2 \frac{|\psi|^2 - 1}{(1+|\psi|^2)^3} \psi,$$

описывающее прецессию спина

$$\psi = \psi_0 e^{-i\omega t}$$

с частотой

$$\omega = 4J\delta^2 \frac{|\psi|^2 - 1}{(1+|\psi|^2)^3},$$

причем  $\psi_0$  и  $\omega$  могут зависеть параметрически от  $X$ .

Вернемся к модели с малой анизотропией. Минимизация функционала (24) приводит к уравнениям

$$\psi_x = 0, \quad \psi(|\psi|^2 - 1) = 0.$$

Последнее уравнение имеет два решения:

$$|\psi|^2 = 1 \quad \text{или} \quad \psi = e^{i\theta_0} \quad (27a)$$

и

$$\psi = 0. \quad (27b)$$

Реализация минимума на (27a) или (27b) зависит от знака  $\Delta$ .

1. ДП,  $\Delta > 0$ , основным состоянием является  $\psi = 0$  или в терминах СКС:

$$|\psi_0\rangle = \prod_j (1+|\psi_j|^2)^{-\frac{S}{2}} e^{\psi_j \hat{S}_j^+} |S, -S\rangle_j = \prod_j |S, -S\rangle_j. \quad (28)$$

Это означает, что классическое вакуумное состояние (конденсат) точно соответствует квантовому ферромагнитному упорядочению вдоль легкой оси (квантовый вакуум) при любых  $S$ .

#### Особенности этой модели:

обе процедуры сведения: и ПХП, и СКС, являются адекватными, а полученные с помощью этих процедур классические модели  $H_{KL}(\alpha)$  (7) и  $H_{KL}(\psi)$  (24) с определенной точностью могут быть сведены друг к другу на анзаце  $\psi = \psi(x,t) e^{ik_0 x}$ . Их существенное различие возникает при  $|\psi|^2 \approx 1$ .

2. ДП,  $\Delta < 0$ , минимум гамильтониана достигается при  $|\psi|^2 = 1$ .

Соответствующее ему СКС есть

$$|\psi_0\rangle = \prod_j 2^{-\frac{S}{2}} e^{\hat{S}_j^+} |S, -S\rangle_j. \quad (29)$$

Структура состояния (29) зависит от представления (т.е. от  $S$ ).

\* Детали этих исследований предполагается опубликовать отдельно.

\*\* В силу  $U(1)$ -симметрии (24) полагаем фазу классического вакуума  $\psi = \exp(i\theta_0)$  равной нулю.

Разлагая (29) по спиновым состояниям с заданной проекцией, получим

$$|\psi_0\rangle_j = \frac{1}{2^S} \sum_{l=0}^{2S} \sqrt{C_l^{2S}} |S, -S+l\rangle, \quad (30)$$

где  $C_l^{2S}$  - биномиальные коэффициенты и  $|\psi_0\rangle = \prod_j |\psi_0\rangle_j$ .

В когерентном состоянии  $|\psi_0\rangle_j$  присутствуют все  $2S+1$  спиновые состояния с вероятностью

$$w = \frac{1}{2^{2S}} C_l^{2S}, \quad (31)$$

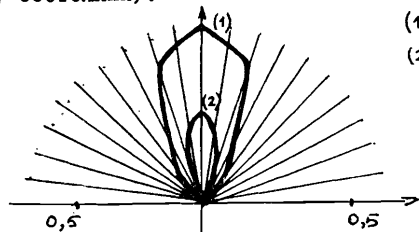
например, при  $S = \frac{1}{2}$  имеем

$$|\psi_0\rangle_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right); \quad (32)$$

при  $S = 5$

$$|\psi_0\rangle_j = \frac{1}{2^5} \left( |5, -5\rangle + \sqrt{10} |5, -4\rangle + \sqrt{45} |5, -3\rangle + \dots \right).$$

Представим вероятности этих состояний на диаграмме направленности. (Вероятность состояния откладывается вдоль направления, соответствующего этому состоянию).



- (1)  $S = 5$   
(2)  $S = \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}$ . Хотя (32) не является собственным вектором квантового гамильтониана при произвольном  $N$ , оно указывает на то, что основное состояние ЛММГ в этом случае должно быть антиферромагнитным. Последнее утверждение совпадает с точным результатом, полученным Ягами в<sup>8/</sup> для  $S = \frac{1}{2}$  одномерной ферромагнитной цепочки. Из диаграммы направленности также следует, что вектор  $|\psi_0\rangle$  хорошо восстанавливает легкоплоскостное состояние, и тем лучше, чем больше  $S$ .

Получим спектр малых колебаний вблизи состояния  $|\psi|^2 = 1$ : из уравнения (25)

$$\psi = 1 + \eta; \quad i\dot{\eta} = \eta_{xx} - \frac{141}{2}(\eta + \bar{\eta}),$$

откуда  $\omega = 1 + \sqrt{k^2 + 141}$ , что совпадает с дисперсией, полученной по методу ПХП в варианте 3 (б).

Это свидетельствует в пользу варианта 3 (б), во всяком случае для описания малых колебаний.

#### § 4. Заключение

Сформулируем основные результаты работы (часть из них уже обсуждалась выше).

##### 1. Статус преобразований ПХП

Использование ПХП должно обосновываться исследованием свойств симметрии гамильтониана и основного состояния исходной квантовой системы. В противном случае классические модели, полученные с помощью ПХП, должны рассматриваться только как феноменологические.

##### 2. Метод спиновых когерентных состояний

Усреднение по СКС МГ дает уравнение Ландау-Лифшица с точностью до стереографической проекции при малой анизотропии  $\Delta \sim \alpha_0^2$ , справедливое при достаточно больших  $S$ . Это означает, что уравнение Ландау-Лифшица описывает классическое поведение квантовых моделей в узкой области величины анизотропии, вблизи  $\delta = 0$ .

В заключение отметим, что использование когерентных состояний для усреднения квантовых моделей и получения классических может быть оправдано результатом работы<sup>15/</sup>, где классическое действие получено исходя из квантовой амплитуды перехода.

#### Литература

1. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983, с.190.
2. Bishop A. Solitons in condensed matter physics. Physica Scripta, 1979, 20, p.409-423.
3. Makhankov V., Fedyanin V. Non-linear effects in quasi-1D models of condensed matter theory. Phys.Rep., 1984, 104, p.1-86.
4. Pushkarov K., Primatorova M. Solitary clusters of spin deviations and lattice deformation in an anharmonic ferromagnetic chain. Phys.Stat.Sol., 1984, 123b, p.573-584 (and references cited therein).
5. Karatsuji H., Suzuki T. Path integral in the representation of SU(2) coherent state and classical dynamics in a generalized phase space. J.Math.Phys., 1980, 21, p.472.

6. Makhankov V., Myrzakulov R. and Makhankov A. Generalized coherent states and the continuous Heisenberg XYZ model with one - ion anisotropy. *Physica Scripta*, 1987, 35, p.233-237.
7. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и некоторые их применения. *УФН*, 1977, 123, с.23-55.
8. Yang C.N., Yang C.P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interaction. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system. *Phys. Rev.*, 1966, 150, p.321-327.

Рукопись поступила в издательский отдел  
27 апреля 1987 года.

Маханьков А.В., Маханьков В.Г. P17-87-295  
Спиновые когерентные состояния, преобразования Холштейна-Примакова для моделей Гейзенберга и статус уравнения Ландау-Лифшица

Рассмотрена ХХЗ модель Гейзенберга. Полученные результаты позволяют сделать заключение: часто используемые для бозонизации спиновых гамильтонианов преобразования Холштейна-Примакова весьма чувствительны к нарушению исходной пространственной симметрии системы основным состоянием. Лишь в случае легкой оси этими преобразованиями можно пользоваться без предварительного анализа /во всяком случае, в отсутствие внешнего магнитного поля/, в остальных случаях требуется соответствующий симметричный анализ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.  
Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Makhankov A.V., Makhankov V.G. P17-87-295  
Spin Coherent States, Holstein-Primakoff Transformations for the Heisenberg Spin Models and Landau-Lifshitz Equation Status

The ХХЗ Heisenberg spin chain is considered. The following results are obtained from the consideration: widely used for bosonization of spin Hamiltonians Holstein-Primakoff transformations are very sensitive to the way of breaking an initial system symmetry with the ground state. In the case of easy-axis models only such transformations may be applied without previous analysis (at any rate when an external magnetic field vanishes). Others are subject to the corresponding symmetry analysis.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987