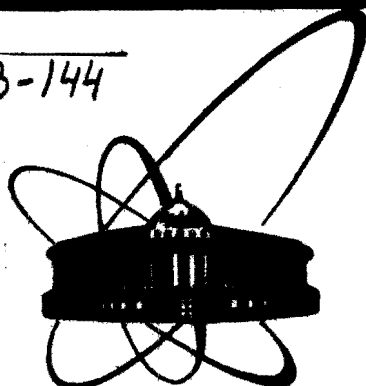


3-144



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

С 326.2

P17-87-286

В.А.Загребнов, Ф. де Смедт*

**ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВСКИЙ ПРЕДЕЛ
ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА
В СЛАБОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ**

*Институт теоретической физики,
Католический университет Левен /Хаверле/,
Бельгия

1987

I. Введение

Известно, что свойства идеального бозе-газа могут существенно измениться, если его поместить во внешнее поле, см., например, ^{1/}. В этой работе было показано, что конденсацию в одно- и двумерном идеальном бозе-газе можно вызвать путём включения специального (инфинитезимального) внешнего поля. Кроме того, авторы привели пример, когда эта конденсация приводит к микроскопическому заполнению бесконечного числа низколежащих уровней (так называемая обобщенная бозе-конденсация ^{2/}). При этом конденсат или сверхтекучая фаза занимает только микроскопическую часть объёма: отношение объёма, занятого конденсатом, к объёму всего сосуда стремится к нулю в термодинамическом пределе. В то же время появление конденсации соответствует неаналитическому поведению термодинамических потенциалов (давления и плотности свободной энергии) как функций плотности и температуры.

Трудной и до сих пор не решенной задачей является учет влияния на конденсат включения взаимодействия между частицами. Хорошо известно, что при отсутствии внешнего поля конденсация в одно- и двумерном бозе-газе (идеальном и неидеальном) невозможна ^{3-4/}. В то же время было установлено, что в ван-дер-ваальсовском пределе (этот предел соответствует пределу сил взаимодействия бесконечного радиуса, который, однако, остается малым по сравнению с размерами сосуда) для размерностей не меньше трех явление бозе-конденсации сохраняется ^{5/}. В работе ^{6/} был рассмотрен случай обычного внешнего поля, которое достаточно сильно для того, чтобы появился по крайней мере один связанный уровень, для размерностей один и два в этом предположении необходимости нет. В этом случае бозе-конденсация сохраняется, если между частицами включается взаимодействие типа среднего поля. С другой стороны, простые аргументы, использующие свойство сверхустойчивости взаимодействия, показывают, что включение такого взаимодействия при наличии инфинитезимального внешнего поля приводит к тому, что конденсат теперь не может занимать микроскопическую часть сосуда (см., например ^{7/}). Сверхтекучая фаза могла бы, однако, занимать макроскопическую его часть. В качестве первого шага к пониманию того, что же происходит с конденсатом в этом случае, мы рассмотрим в настоящей работе неидеальный бозе-газ для взаимодействия в ван-дер-ваальсовском пределе и при наличии инфинитезимального внешнего поля. Оказывается, что теперь, в отличие от случая идеального газа, предельное термодинамическое давле-

ние становится C^∞ -функцией как химического потенциала μ (или плотности), так и температуры для размерностей $\nu = 1, 2$. Более того, оно допускает аналитическое продолжение в комплексные области в окрестности соответствующих реальных осей. Это очевидно образом свидетельствует в пользу того, что в системе не происходит фазового перехода. Для размерностей $\nu \geq 3$ оказывается, что существует много точек, где предельное термодинамическое давление, как функция μ , не является бесконечно дифференцируемым. В частности, существует целый интервал значений μ (плотностей), на котором множество локальных плотностей не являются C^∞ -функциями μ . Выражения для давления и локальных плотностей указывают на то, что при некоторой нижней критической плотности сверхтекучая фаза заполняет некоторую макроскопическую область сосуда, которая постепенно (с ростом плотности) увеличивается до тех пор, пока при некоторой плотности не займет весь сосуд. Таким образом, взаимодействие полностью меняет термодинамические свойства системы по сравнению со случаем идеального газа. В качестве примера читатель может представить себе сосуд, наполненный бозонами и помещенный в (слабое) гравитационное поле Земли. Если взаимодействие между частицами отсутствует, тогда сверхтекучая фаза (конденсат) будет концентрироваться на дне сосуда и образует микроскопическую плёнку. Учет взаимодействия в ван-дер-ваальсовском пределе меняет эту картину, а в пределе среднего поля оставляет её неизменной.

В следующем разделе обсуждается модель и вводятся основные понятия, которые потребуются в дальнейшем. В разделе 3 получено явное выражение для термодинамического давления неидеального бозе-газа в ван-дер-ваальсовском пределе. Наконец, в разделе 4 мы обсудим свойства этого давления, а также поведение локальной плотности. Мы также сравним эти результаты со свойствами системы, соответствующей приближению среднего поля для нашей модели. Показано, что между ними имеется существенное различие.

2. Описание модели

Рассмотрим ν -мерный сосуд Λ_L , который имеет форму куба: $\Lambda_L = [0, L]^\nu$ и обозначим через \mathcal{H}_L^n пространство симметричных комплексных, квадратично интегрируемых функций с носителями в $\Lambda_L^n = \prod_{i=1}^n \Lambda_L$. Определим, как обычно, соответствующее фоковское пространство симметричных функций:

$$\mathcal{F}_L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_L^n. \quad (I)$$

Мы будем предполагать, что на бозе-частицы в сосуде Λ_L действу-

ет инфинитезимальное внешнее поле $V(x/L)$, а между ними включен парный потенциал $\lambda^\nu U(\lambda x)$, $\lambda > 0$. Пусть V и U удовлетворяют следующим условиям:

$$1) V \in C^\infty(\Lambda_1); \quad (2)$$

$$2) \hat{U}(k) = \int d^\nu x U(x) \exp(ikx) \geq 0; \quad \forall k \in \mathbb{R}^\nu; \quad (3a)$$

$$U(0) < \infty; \quad (3б)$$

$$|U(x)| \leq D |x|^{-\nu-\varepsilon}; \quad \forall x \in \mathbb{R}^\nu; \quad D > 0, \varepsilon > 0; \quad (3в)$$

$$U(x) \geq 0; \quad x \in \mathbb{R}^\nu. \quad (3г)$$

Мы полагаем, что последнее условие (3г) не является существенным для исследования ван-дер-ваальсовского предела, хотя соответствующие рассуждения существенно усложняются без этого условия. Заметим, что класс парных потенциалов, удовлетворяющих условиям (3а-г) не пуст: например, он содержит потенциал $U(x) = a \exp(-b|x|^2)$; $a, b > 0$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $X^n = (x_1, \dots, x_n)$ и $dX^n = dx_1 \dots dx_n$. Определим на \mathcal{F}_L^n следующие квадратичные формы, определяемые своими сужениями на \mathcal{H}_L^n :

1) Кинетическая энергия

$$t_L^\infty(\psi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int dX^n |\nabla_k \psi(X^n)|^2. \quad (4)$$

Область определения этой формы $Q(t_L^\infty) = S(C_0^1(\Lambda_L^n))$, где S - оператор симметризации. Квадратичная форма $t_L^0(\psi)$ определяется аналогично, причем $Q(t_L^0) = S(C^1(\Lambda_L))$, см. /10/. Эти формы соответствуют двум типам граничных условий на $\partial\Lambda_L$: условию Дирихле и условию Неймана.

2) Потенциал внешнего поля

$$v_L(\psi) = \sum_{k=1}^n \int dX^n V(x_k/L) |\psi(X^n)|^2. \quad (5)$$

3) Энергия взаимодействия

$$u_{L,\lambda}(\psi) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int dX^n \lambda^\nu U(\lambda(x_i - x_j)) |\psi(X^n)|^2. \quad (6)$$

Мы обозначим $h_{L,\lambda}^0(\psi)$ (соответственно $h_{L,\lambda}^\infty(\psi)$) замыкание квадратичной формы $(t_L^0 + v_L + u_{L,\lambda})(\psi)$ (соответственно $(t_L^\infty + v_L + u_{L,\lambda})(\psi)$), а через $H_{L,\lambda}^0$ (соответственно $H_{L,\lambda}^\infty$) обозначим ассоциированные с этими формами самосопряженные операторы, которые соответствуют гамильтонианам нашей системы. Таким же образом опреде-

ляются гамильтонианы системы, соответствующие модели среднего поля, $\tilde{H}_{L,a}^{0(\infty)}$; они отвечают замыканию квадратичных форм $t_L^{0(\infty)}(\psi) + \frac{a}{2L^{\nu}}(\psi, N_L^2 \psi)$. Здесь N_L - обычный оператор числа частиц:

$$(N_L \psi)(X^n) = n \psi(X^n), \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_L^n.$$

Термодинамическое давление $P_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\mu)$ определяется стандартно:

$$P_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\mu) = \frac{1}{\beta L^{\nu}} \ln \text{Tr} \exp [-\beta (H_{L,\lambda}^{0(\infty)} - \mu N_L)]. \quad (7)$$

Термодинамическое давление $\tilde{P}_{L,a}^{0(\infty)}(\mu)$, соответствующее модели среднего поля, определяется аналогично. Мы также обычным образом определим гиббсовское состояние в конечном сосуде $\Lambda_L : \omega_{L,\lambda,\mu}^{0(\infty)}(\cdot)$.

Заметим, что сверхустойчивость взаимодействия гарантирует существование давления $P_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\mu)$ для $\forall \mu \in \mathbb{R}^1$. В следующем разделе мы получим для давления $P_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\mu)$ в ван-дер-ваальсовском пределе $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} (\cdot)$, явное выражение.

3. Давление в ван-дер-ваальсовском пределе

Прежде, чем приступить к доказательству основной теоремы, напомним вначале некоторые свойства системы, соответствующей модели среднего поля $\tilde{H}_{L,a}^{0(\infty)}$, когда $V=0$, см. /II/. Для давления в этой системе имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_a(\mu) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{P}_{L,a}^0(\mu) = \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{P}_{L,a}^{\infty}(\mu) = \\ &= \frac{(\mu - \bar{\alpha})^2}{2a} + p_0(\bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (8a)$$

где переменная $\bar{\alpha}$ определяется условиями: $\bar{\alpha} = \mu - a p_0(\bar{\alpha})$, если $\mu < a p_c$ и $\bar{\alpha} = 0$, если $\mu \geq a p_c$, а функции $p_0(\alpha), \rho_0(\alpha)$ соответствуют идеальному бозе-газу и имеют вид:

$$p_0(\alpha) = \beta^{-1} \int \frac{d^{\nu} k}{(2\pi)^{\nu}} \ln \{ 1 - \exp [-\beta (\frac{k^2}{2} - \alpha)] \}, \quad \alpha \leq 0; \quad (8б)$$

$$\rho_0(\alpha) = \int \frac{d^{\nu} k}{(2\pi)^{\nu}} \{ \exp [\beta (\frac{k^2}{2} - \alpha)] - 1 \}^{-1}, \quad \alpha \leq 0; \quad (8б)$$

$$\rho_c \equiv \rho_0(\alpha=0) < \infty, \quad (\rho_c < \infty, \nu \geq 3). \quad (8г)$$

Заметим, что в модели среднего поля имеет место фазовый переход третьего (соответственно второго) рода для размерностей $\nu = 3, 4$ (соответственно $\nu \geq 5$), когда $\mu = \mu_c = a p_c$. В этой точке плотность системы равна ρ_c , а при $\mu > \mu_c$ в системе появляется бозе-конденсат, плотность которого $\eta = \rho(\mu) - \rho_c$.

Остальная часть этого раздела посвящена доказательству следующей основной теоремы:

Теорема. С учетом обозначений и предположений, сделанных выше, для давления неидеального бозе-газа в ван-дер-ваальсовском пределе имеем:

$$P(\mu) \equiv P_{\text{v.der W.}}(\mu) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} P_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\mu) = \int_{\Lambda_1} d^{\nu} x \tilde{P}_a(\mu - V(x)),$$

где

$$a = \int_{\mathbb{R}^{\nu}} d^{\nu} x U(x).$$

Идея доказательства заключается в нахождении таких верхней и нижней границ для $P_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\mu)$, чтобы они совпадали в ван-дер-ваальсовском пределе. Например, для давлений, соответствующих условиям Дирихле и Неймана, на границах сосуда имеем (см., например /10/)

$$P_{L,\lambda}^{\infty}(\mu) \leq P_{L,\lambda}^0(\mu). \quad (9)$$

Поэтому достаточно найти соответствующую верхнюю границу для $P_{L,\lambda}^0(\mu)$ и нижнюю границу для $P_{L,\lambda}^{\infty}(\mu)$.

А. Верхняя граница для $P_{L,\lambda}^0(\mu)$

Для построения верхней границы мы разобьем куб Λ_L на кубики $\Lambda_k^{(m)} = \times_{i=1}^{\nu} [(k_i-1)\frac{L}{m}, k_i \frac{L}{m}]$, $1 \leq k_i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда очевидно, что

$$\bigcup_k \Lambda_k^{(m)} = \Lambda_L, \quad \mathcal{F}_L = \otimes_k \mathcal{F}_k, \quad (10)$$

где \mathcal{F}_k - фоксовское пространство в сосуде $\Lambda_k^{(m)}$.

В соответствии с описанным выше разбиением определим и следующие квадратичные формы ($\psi \in \mathcal{H}_L^n$):

$$t_k^0(\psi) = \sum_{j=1}^n \int dX^n x_k(x_j) |\nabla_j \psi(X^n)|^2, \quad (IIa)$$

$$Q(t_k^0) = S(C^1(\Lambda_k^n)),$$

где $x_k(x)$ - характеристическая функция области $\Lambda_k^{(m)}$;

$$n_k(\psi) = \int dX^n \left\{ \sum_{j=1}^n x_k(x_j) \right\} |\psi(X^n)|^2; \quad (IIб)$$

$$n_k^2(\psi) = \int dX^n \left\{ \sum_{j=1}^n x_k(x_j) \right\}^2 |\psi(X^n)|^2; \quad (IIв)$$

$$\underline{v}_k(\psi) = \underline{V}_k n_k(\psi), \quad \underline{V}_k = \min_{\alpha \in \Lambda_k^{(m)}} V(\alpha/L). \quad (IIг)$$

Предложение I. Для форм, определенных выше, имеем

$$(i) \quad t_L^0(\psi) = \sum_k t_k^0(\psi), \quad \forall \psi \in S(C^1(\Lambda_L^n)); \quad (I2a)$$

$$(ii) \quad v_L(\psi) \geq \sum_k v_k(\psi); \quad (I2б)$$

(iii) для $\forall \lambda > 0$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists L_0$, такое, что для

$$u_{L,\lambda}(\psi) \geq \frac{a(1-\varepsilon)}{2} \frac{m^v}{L^v} \sum_k n_k^2(\psi) - \lambda^v U(0) \sum_k n_k(\psi), \quad (I2в)$$

$$a = \int_{\mathbb{R}^v} dx U(x).$$

Доказательство. Соотношения (i) и (ii) тривиально следуют из определений. Для доказательства (iii) мы воспользуемся следующим результатом /I2/: для $\forall \lambda > 0$, $\forall \varepsilon > 0 \exists L_1$ такое, что для $\forall L > L_1$, $\forall N$ и $\forall x_i \in \Lambda_L$ имеем

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda^v U(\lambda(x_i - x_j)) \geq \frac{a(1-\varepsilon)}{2L^v} N^2 - \lambda^v U(0) N. \quad (I3)$$

Возьмем теперь произвольный вектор $\psi \in \mathcal{H}_L^n$ и положим $U_\lambda(x^n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda^v U(\lambda(x_i - x_j))$. Тогда получим:

$$u_{L,\lambda}(\psi) = \int dx^n U_\lambda(x^n) |\psi(x^n)|^2 = \sum_{i_1, \dots, i_n} \int_{\Lambda_{i_1}} dx_1 \dots \int_{\Lambda_{i_n}} dx_n U_\lambda(x^n) |\psi(x^n)|^2; \quad (I4)$$

$$u_{L,\lambda}(\psi) = \sum_{\{N_k\}} P_{\{N_k\}} \left(\prod_k \int dx^{N_k} \right) U_\lambda(x^n) |\psi(x^n)|^2, \quad (I5)$$

где $\sum_{\{N_k\}}$ соответствует суммированию по всем возможным наборам $\{N_k : N_k \geq 0\}_k$, таким, что $\sum_k N_k = n$, а $\int dx^{N_k} = \prod_{i=1}^{N_k} (\int_{\Lambda_{i_k}^{(m)}} dx_{i_k})$. Для того чтобы перейти от (I4) к (I5), мы упорядочили частицы таким образом, чтобы первые N_{k_1} частиц находились в кубике $\Lambda_{k_1}^{(m)}$, вторые N_{k_2} частиц в кубике $\Lambda_{k_2}^{(m)}$ и так далее. Множитель $P_{\{N_k\}}$ учитывает число членов в сумме (I4), которые дают один и тот же вклад в (I5). Теперь, используя неотрицательность парного потенциала (3г), получаем:

$$u_{L,\lambda}(\psi) \geq \sum_{\{N_k\}} P_{\{N_k\}} \left(\prod_k \int dx^{N_k} \right) \left\{ \sum_k U_\lambda(x^{N_k}) \right\} |\psi(x^n)|^2.$$

Наконец, используя (I3) и выбирая $L/m > L_1$, это неравенство можно преобразовать к виду

$$u_{L,\lambda}(\psi) \geq \sum_{\{N_k\}} P_{\{N_k\}} \left(\prod_k \int dx^{N_k} \right) \left\{ \frac{a(1-\varepsilon)}{2} \frac{m^v}{L^v} \sum_k N_k^2 - \lambda^v U(0) \sum_k N_k \right\} |\psi(x^n)|^2. \quad (I6)$$

Нетрудно проверить, что (I6) эквивалентно (I2в). \square

Используя (I0) и предложение I, с помощью стандартных рассуждений /I0/ получаем оценку:

$$P_{L,\lambda}^0(\mu) \leq \frac{1}{m^v} \sum_k \tilde{P}_{L,m,a(1-\varepsilon)}^0(\mu - V_k + \lambda^v U(0)).$$

Теперь, переходя к пределам $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} (\cdot)$, эту оценку можно преобразовать к виду

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup \lim_{L \rightarrow \infty} P_{L,\lambda}^0(\mu) \leq \int_{\Lambda_1} dx \tilde{p}_a(\mu - V(x)). \quad (I7)$$

(Существование предела $\lim_{L \rightarrow \infty} P_{L,\lambda}^0(\mu)$ и его равенство пределу $\lim_{L \rightarrow \infty} P_{L,\lambda}^\infty(\mu)$ доказываются так же, как это сделано в /I0/).

Б. Нижняя граница для $P_{L,\lambda}^\infty(\mu)$

Для этого поделим Λ_L на кубики $\Lambda_k^{(q,\tau)}$:

$$\Lambda_k^{(q,\tau)} = \times_{i=1}^v \left[k_i \left(\frac{L}{q} + \frac{L}{\tau} \right), k_i \left(\frac{L}{q} + \frac{L}{\tau} \right) + \frac{L}{q} \right], \quad 0 \leq k_i \leq \text{Int} \left(\frac{q\tau}{q+\tau} \right) - 1. \quad (I8)$$

Здесь $\text{Int}(x)$ соответствует целой части числа x и $q, \tau \in \mathbb{N}$. Объем кубиков $\Lambda_k^{(q,\tau)}$ равен $(L/q)^v$, а минимальное расстояние между ними не меньше, чем L/τ . Ясно, что

$$P_{L,\lambda}^\infty(\mu) \geq \overline{\tau}_M \exp[-\beta(H_{L,\lambda}^\infty - \mu N_L)], \quad (I9)$$

где $\overline{\tau}_M$ обозначает след по пространству \mathcal{G}_M состояний, которые соответствуют конфигурациям, когда вне кубов $\Lambda_k^{(q,\tau)}$ частицы отсутствуют, причем внутри каждого из кубов $\Lambda_k^{(q,\tau)}$ содержится не более $M L^v$ частиц. Здесь M - большое фиксированное число, которое будет определено ниже.

Определим квадратичную форму \overline{v}_k :

$$\overline{v}_k(\psi) = \overline{V}_k n_k(\psi), \quad \overline{V}_k = \max_{x \in \Lambda_k^{(q,\tau)}} V(x/L), \quad (20)$$

где $n_k(\psi)$ определяется так же, как и в (IIб), лишь с заменой $\Lambda_k^{(m)}$ на $\Lambda_k^{(q,r)}$. Аналогично изложенному выше определяются формы t_k^∞ и $u_{k,\lambda}$. Имеет место следующее предложение.

Предложение 2. Для $\forall \psi \in \mathfrak{S}_M$ имеем:

$$(i) \quad t_L^\infty(\psi) = \sum_k t_k^\infty(\psi); \quad (2Ia)$$

$$(ii) \quad v_L(\psi) \leq \sum_k \bar{v}_k(\psi); \quad (2Iб)$$

$$(iii) \quad u_{L,\lambda}(\psi) \leq \sum_k u_{k,\lambda}(\psi) + A(\lambda, q, r, M) L^{\nu-\varepsilon} \|\psi\|^2, \quad (2Iв)$$

где $A(\lambda, q, r, M)$ – конечное число, зависящее от параметров λ, q, r, M , а величина ε такая же, как и в выражении (3в).

Доказательство. Доказательство (i) и (ii), так же, как и в предложении I, тривиально. Остановимся на (iii). Ясно, что $u_{L,\lambda}(\psi)$ равно $\sum_k u_{k,\lambda}(\psi)$ плюс $u_{int}(\psi)$, соответствующее вкладу от взаимодействия между частицами, находящимися в разных кубах $\Lambda_k^{(q,r)}$. Получим для $|u_{int}(\psi)|$ оценку сверху. Ясно, что взаимодействие между кубами $\Lambda_k^{(q,r)}$ и $\Lambda_\ell^{(q,r)}$ ограничено величиной $(ML^\nu)^2 K(k, \ell)$, где

$$K(k, \ell) = \max_{x \in \Lambda_k^{(q,r)}, y \in \Lambda_\ell^{(q,r)}} \lambda^\nu U(\lambda(x-y)).$$

Тогда, используя оценку (3в) и суммируя по всем кубикам $\Lambda_k^{(q,r)}$, получаем:

$$|u_{int}(\psi)| \leq \|\psi\|^2 \left[\frac{q\tau}{q+\tau} \right]^\nu \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu \setminus \{0\}} \frac{\lambda^\nu D (ML^\nu)^2}{\lambda^{\nu+\varepsilon} L^{\nu+\varepsilon} (d(k))^{\nu+\varepsilon}}, \quad (22)$$

где $d(k) = L^{-1} \text{dist}(\Lambda_0^{(q,r)}, \Lambda_k^{(q,r)})$, и мы воспользовались естественным обобщением определения (I8) для $k \in \mathbb{Z}^\nu$. Формула (22) дает явное выражение $A(\lambda, q, r, M)$, что и завершает доказательство. \square

Определим теперь интерполирующее давление $f_{L,\lambda}^{(M)}(\mu)$ формулой

$$f_{L,\lambda}^{(M)}(\mu) = \frac{1}{\beta L^\nu} \ln Tz_M \exp[-\beta(\bar{H}_{L,\lambda}^\infty - \mu N_L)],$$

где $\bar{H}_{L,\lambda}^\infty$ – гамильтониан неидеального бозе-газа в отсутствие внешнего поля, а Tz_M обозначает след по состояниям, в которых число частиц в кубе Λ_L не превышает ML^ν . С помощью (I0) и предложения 2 получаем:

$$P_{L,\lambda}^\infty(\mu) \geq \frac{1}{q^\nu} \sum_k f_{\frac{L}{q}, \lambda}^{(Mq^\nu)}(\mu - \bar{v}_k) - \frac{1}{L^\varepsilon} A(\lambda, q, r, M). \quad (23)$$

Как показано в Приложении для $\forall \mu_0, \forall \lambda_0 > 0 \exists M$ такое, что для $\forall \mu < \mu_0$ и $\forall \lambda : 0 < \lambda < \lambda_0$ имеем

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f_{L,\lambda}^{(M)}(\mu) = \bar{p}_\lambda(\mu), \quad (24)$$

где

$$\bar{p}_\lambda(\mu) = \lim_{L \rightarrow \infty} (\beta L^\nu)^{-1} \ln Tz \exp[-\beta(\bar{H}_{L,\lambda}^\infty - \mu N_L)].$$

Таким образом, переходя к пределу $L \rightarrow \infty$ в оценке (23), получаем

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{L,\lambda}^\infty(\mu) \geq \frac{1}{q^\nu} \sum_k \bar{p}_\lambda(\mu - v_k). \quad (25)$$

Однако, как хорошо известно (см., например, [5]), для $\lambda \searrow 0$ имеем:

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \bar{p}_\lambda(\mu) = \tilde{p}_a(\mu).$$

Переходя в неравенстве (25) к пределам $\lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \searrow 0} (\cdot)$, получаем неравенство

$$\liminf_{\lambda \searrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} P_{L,\lambda}^\infty(\mu) \geq \int_{\Lambda_1} d^3x \tilde{p}_a(\mu - V(x)). \quad (26)$$

Утверждение теоремы следует теперь из комбинации соотношений (9), (I7) и (26).

4. Термодинамические свойства неидеального бозе-газа в ван-дер-ваальсовском пределе

Как было доказано выше (теорема), термодинамическое давление в такой системе имеет вид

$$p(\mu) = \lim_{\lambda \searrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} P_{L,\lambda}^{o(\infty)}(\mu) = \int_{\Lambda_1} d^3x \tilde{p}_a(\mu - V(x)) = \int d^3x \left\{ \frac{(\mu - \bar{\alpha}(x))^2}{2a} + p_0(\bar{\alpha}(x)) \right\}, \quad (27a)$$

где функция $\bar{\alpha}(x)$ определяется из условия (ср. (8)):

$$\alpha(x) = \begin{cases} \mu - V(x) - a\rho_0(\alpha(x)), & \mu - V(x) \leq a\rho_c \\ 0, & \mu - V(x) \geq a\rho_c. \end{cases} \quad (27б)$$

Здесь мы исследуем поведение давления $p(\mu)$ как функции химического потенциала μ , или, что эквивалентно, средней плотности числа частиц $\rho(\mu) = \partial_\mu p(\mu)$.

Для размерностей $\nu = 1, 2$ критическая плотность $\rho_c = \infty$, откуда следует, что $p(\mu)$ является C^∞ -функцией μ (а следовательно, и ρ). Более того, эта функция допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность вещественной оси.

Ситуация меняется для размерностей $\nu > 2$, когда $\rho_c < \infty$. Для того, чтобы представить, что происходит, рассмотрим случай $\nu = 3$ (исследование размерностей $\nu > 3$ аналогично). Рассмотрим для простоты центрально симметричный случай: Λ_1 вместо куба является шаром радиуса $R = 1$ с центром в начале координат, а функция, определяющая потенциал внешнего поля, имеет вид $V(x) = V_0(|x|)$, где $V_0 \in C^\infty(0, 1)$.

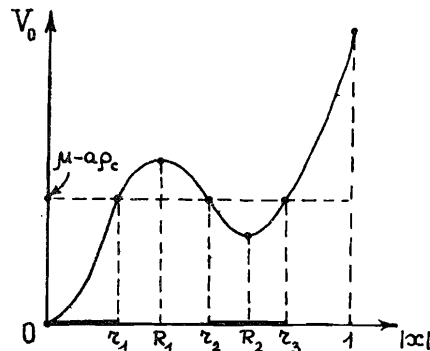


Рис. 1. Простейший ход функции V_0 , позволяющий проиллюстрировать типичные особенности термодинамического поведения системы. Области $[0, \tau_1]$ и $[\tau_2, \tau_3]$ заняты сверхтекучей фазой для модели с гамильтонианом $H_{L,\lambda}^{0(\infty)}$ ($\lambda \downarrow 0$). Для модели с гамильтонианом $\hat{H}_{L,\lambda}^{0(\infty)}$ сверхтекучая фаза сосредоточена в точке $|x| = 0$.

Выражение для давления принимает тогда следующий вид:

$$p(\mu) = 4\pi \int_0^1 dz z^2 \tilde{p}_a(\mu - V_0(z)).$$

Используя тот факт, что для малых $|\alpha|$ функция $\rho_0(\alpha)$ имеет вид $I_3/$

$$\rho_0(\alpha) = \rho_c + \Gamma(-\frac{1}{2})(-\beta\alpha)^{1/2} + o(\alpha),$$

и формулы (8), нетрудно проверить, что производные $\partial_\mu^n \tilde{p}_a(\mu)$ до четвертого порядка существуют и ограничены всюду, кроме точки $\mu = \rho_c$, где $\partial_\mu^3 \tilde{p}_a(\mu)$ является разрывной функцией μ . Обозначим теперь через $\{\tau_i\}_{i=1}^k$ множество таких точек, что (см. рис. 1)

$$V_0(\tau_i) = \mu - \rho_c.$$

Тогда из явного выражения для давления получаем

$$\partial_\mu^4 p(\mu) = 4\pi \int_0^1 dz z^2 \partial_\mu^4 \tilde{p}_a(\mu - V_0(z)) + 4\pi c \sum_{i=1}^k \tau_i^2 \partial_\mu^4 \tau_i,$$

где

$$c = \lim_{\mu \rightarrow \rho_c + 0} \partial_\mu^3 \tilde{p}_a(\mu) - \lim_{\mu \rightarrow \rho_c - 0} \partial_\mu^3 \tilde{p}_a(\mu).$$

Из этого непосредственно следует, что функция $\partial_\mu^4 p(\mu)$ является разрывной в точках $\mu = \rho_c + V_0(R_j)$, $j = 1, 2, \dots, M$ и $\mu = \rho_c + V_0(\tau = 1)$, где $\{R_j\}_{j=1}^M$ являются экстремумами функции $V_0(|x|)$, см. рис. 1. Точка $\mu = \rho_c + V_0(0)$ требует специального анализа, однако можно показать, что и в ней давление $p(\mu)$ неаналитично. Степень гладкости $p(\mu)$ в этой точке зависит от поведения $V_0(\tau)$ в окрестности $\tau = 0$.

Рассмотрим теперь поведение локальной плотности $\rho(\mu; x)$, которое оказывается более поучительным. Пусть $N_L^{x,A}$ - оператор числа частиц в области $\Lambda_L^{x,A} = \prod [L(x_i - A), L(x_i + A)]$, т.е. $N_L^{x,A} \psi(x^N) = \sum_{1 \leq i \leq N} \chi_A(x_i) \psi(x^N)$ для $\forall \psi \in \mathcal{E}_L^N$, где $\chi_A(x)$ - характеристическая функция множества $\Lambda_L^{x,A}$. Пусть функция $g_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\delta)$ имеет вид

$$g_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\delta) = (\beta L^\nu)^{-1} \ln \text{Tr} \exp [-\beta (H_{L,\lambda}^{0(\infty)} - \mu N_L - \delta N_L^{x,A})].$$

С помощью тех же рассуждений, что были использованы в разделе 2, можно показать следующее:

$$g(\delta) \equiv \lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} g_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\delta) = \int_{\Lambda_1 \setminus \Lambda_1^{x,A}} d^x \tilde{p}_a(\mu - V(x) + \delta) + \int_{\Lambda_1 \setminus \Lambda_1^{x,A}} d^x \tilde{p}_a(\mu - V(x)).$$

Поскольку функция $g_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\delta)$ является выпуклой по параметру δ , то имеем:

$$\int_{\Lambda_1 \setminus \Lambda_1^{x,A}} d^x \rho(\mu; x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-\nu} \omega_{L,\lambda}^{0(\infty)}(N_L^{x,A}) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \partial_\delta g_{L,\lambda}^{0(\infty)}(\delta) \Big|_{\delta=0} = \partial_\delta g(\delta) \Big|_{\delta=0} = \int_{\Lambda_1 \setminus \Lambda_1^{x,A}} d^x \left\{ \partial_\alpha \tilde{p}_a(\alpha) \Big|_{\alpha = \mu - V(x)} \right\}.$$

Следовательно, локальную плотность можно представить в виде $\rho(\mu; x) = \partial_\alpha \tilde{p}_a(\alpha) \Big|_{\alpha = \mu - V(x)}$. Заметим, что $\rho(\mu; x)$ является C^∞ -функцией аргумента μ всюду, за исключением точки $\mu_c(x)$: $\mu_c(x) = \rho_c + V(x)$.

Когда средняя плотность числа частиц в системе возрастает, ло-

кальная плотность $\rho(\mu; \alpha)$ также растет, причем все частицы в окрестности точки α вначале находятся в нормальной фазе. Однако, как только локальная плотность превысит ρ_c , все вновь добавленные частицы в окрестности α попадают в бозе-конденсат, т.е. в этой точке появляется сверхтекучая фаза. Из этого можно заключить, что для любого μ , удовлетворяющего неравенству (см. рис. I),

$$a\rho_c + \min_{y \in \Lambda_1} V(y) \leq \mu \leq a\rho_c + \max_{y \in \Lambda_1} V(y)$$

существует некоторая точка $\alpha^* \in \Lambda_1$, где локальная плотность $\rho(\mu; \alpha^*)$ является неаналитической функцией μ . Такое же утверждение справедливо по отношению к локальной плотности как функции средней плотности ρ .

В заключение этого раздела мы хотим подчеркнуть разницу между неидеальным бозе-газом в ван-дер-ваальсовском пределе и моделью неидеального бозе-газа, соответствующей среднему полю. Последняя модель описывается гамильтонианом $\hat{H}_{L,a}^{(0(\infty))}$, которому соответствует квадратичная форма, учитывающая внешнее поле (ср. с гамильтонианом $\hat{H}_{L,a}^{(0(\infty))}$),

$$t_L^{(0(\infty))}(\psi) + v_L(\psi) + \frac{a}{2L^d} (\psi, N_L^2 \psi).$$

Тогда предельное термодинамическое давление $P_{mf}(\mu)$ для этой системы имеет вид

$$P_{mf}(\mu) = \int_{\Lambda_1} d^d x \left\{ \frac{(\mu - \bar{\alpha})^2}{2a} + \rho_0(\bar{\alpha} - V(\alpha)) \right\}, \quad (28a)$$

где $\bar{\alpha}$ определяется из условия ($\bar{V} = \min_{\alpha \in \Lambda_1} V(\alpha)$)

$$\alpha = \begin{cases} \mu - a \int_{\Lambda_1} d^d x \rho_0(\alpha - V(\alpha)), & \mu \leq a\rho_{c,ext} + \bar{V}; \\ \bar{V}, & \mu \geq a\rho_{c,ext} + \bar{V}, \end{cases} \quad (28b)$$

а локальная и критическая плотности имеют вид

$$\rho_{mf}(\mu; \alpha) = \rho_0(\alpha - V(\alpha)),$$

$$\rho_{c,ext} = \lim_{\alpha \rightarrow \bar{V}-0} \int_{\Lambda_1} d^d x \rho(\alpha - V(\alpha)).$$

Выражение (28) полезно сравнить с (27) и локальной плотностью $\rho(\mu; \alpha)$.

Заметим, что давление $P_{mf}(\mu)$ является сингулярным только в точке $\mu = a\rho_{c,ext} + \bar{V}$, и что плотность может быть конечной даже для размерностей $d = 1, 2$, ср. $1/\rho_{c,ext}$ и $1/\rho_c$. Для этой системы также можно изучить локальную плотность $\rho_{mf}(\mu; \alpha)$. Она имеет следующее свойство: если $\mu > a\rho_{c,ext} + \bar{V}$, то для $\forall \alpha$, соответству-

ющего $V(\alpha) > \bar{V}$,

$$\rho_{mf}(\mu; \alpha) = \rho_0(\bar{V} - V(\alpha)).$$

Следовательно, как только средняя плотность ρ начинает превышать величину $\rho_{c,ext}$, локальная плотность в точках α , удовлетворяющих условию $V(\alpha) > \bar{V}$, достигает своего максимального (критического) значения, а любые вновь добавляемые частицы образуют бозе-конденсат, который стремится занять место в области минимума внешнего поля. Для случая внешнего потенциала, изображенного на рис. I, это означает, что сверхтекучая фаза (бозе-конденсат) локализуется в точке $|\alpha| = 0$. Эта картина существенно отличается от того, что происходит в случае неидеального бозе-газа в ван-дер-ваальсовском пределе, когда локальная плотность во всех точках α является строго монотонной, возрастающей функцией средней плотности ρ .

Эту разницу в поведении двух моделей нетрудно понять, если принять во внимание, что для модели среднего поля энергия взаимодействия в некотором малом сосуде внутри куба Λ_L пропорциональна квадрату средней (глобальной) плотности числа частиц в системе, в то время как для неидеального бозе-газа в ван-дер-ваальсовском пределе эта энергия пропорциональна квадрату локальной плотности. Поэтому в первом случае бозе-конденсат может локализоваться в области с термодинамически микроскопическими линейными размерами l_L : $\lim_{L \rightarrow \infty} l_L/L = 0$, что соответствует точке $\min V(\alpha)$, см. рис. I. Во втором случае такая локализация невозможна: из-за локального характера взаимодействия бозе-конденсат распределяется в области с термодинамически макроскопическими линейными размерами α_L : $\lim_{L \rightarrow \infty} \alpha_L/L > 0$, что соответствует конечным областям на рис. I.

Один из нас (Ф. де Сметт) благодарен Лаборатории теоретической физики ОИЯИ за гостеприимство, способствовавшее написанию настоящей работы, а также Бельгийскому научно-исследовательскому фонду за финансовую поддержку.

Приложение

Здесь мы докажем равенство (24). Идея доказательства такая же, как и в работах [13, 14].

Выберем некоторые μ_0 и λ_0 и предположим, что $\mu < \mu_0$, $0 < \lambda < \lambda_0$. Обозначим через $K_L(x)$ функцию распределения

$$K_L(x) = \frac{\sum_{\{n: nL \leq x\}} \exp \beta \mu n T_{z_{\mu, \lambda}} \exp(-\beta \bar{H}_{L, \lambda}^{\infty})}{\exp(\beta L^{\nu} \bar{p}_{L, \lambda}^{\infty}(\mu))}$$

Тогда имеем:

$$\exp(\beta L^{\nu} \bar{f}_{L, \lambda}^{(\mu)}(\mu)) = \exp(\beta L^{\nu} \bar{p}_{L, \lambda}^{\infty}(\mu)) \left\{ 1 - \int_M^{\infty} K_L(dx) \right\}. \quad (29)$$

Пусть $c > 0$, ясно, что

$$\int_M^{\infty} K_L(dx) \leq \exp(-\beta c M L^{\nu}) \int_0^{\infty} K_L(dx) \exp(\beta c L^{\nu} x) = \exp\left\{c \beta L^{\nu} \left(-M + \frac{\bar{p}_{L, \lambda}^{\infty}(\mu+c) - \bar{p}_{L, \lambda}^{\infty}(\mu)}{c}\right)\right\}.$$

Однако, с другой стороны:

$$0 \leq \bar{p}_{L, \lambda}^{\infty}(\mu+c) \leq \bar{p}_{L, a(1-\varepsilon)}^{\infty}(\mu_0+c+\lambda_0^{\nu} U(0)),$$

где мы использовали (13) (для достаточно большого L) и тот факт, что давление является возрастающей функцией μ .

Выберем теперь $M > \min_c c^{-1} \bar{p}_{a(1-\varepsilon)}^{\infty}(\mu_0+c+\lambda_0^{\nu} U(0))$, тогда легко проверить, что для любых $0 < \lambda < \lambda_0$ и $\mu < \mu_0$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta L^{\nu}} \ln \left(1 - \int_M^{\infty} K_L(dx) \right) = 0.$$

Этот предел вместе с (29) и доказывает (24).

Литература

1. Van den Berg M., Lewis J.T.-Comm. Math. Phys., 1981, 81, p.435.
2. Van den Berg M., Lewis J.T., Pulè J.V.-Helv. Phys. Acta, 1986, 59, p. 1271.
3. Hohenberg P.C.-Phys. Rev., 1967, 158, p. 383.
4. Bouziane M., Martin Ph.A.-J. Math. Phys., 1976, 17, p. 1848.
5. Lewis J.T, Pulè J.V. de Smedt Ph.-Lecture Notes in Physics, 257, (Proceedings, Groningen 1985). p. 234-256, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.
6. Papoyan V. V., Zagrebnov V.A.-Phys. Lett., 1985, 113A, p. 8.
7. de Smedt Ph.-J. Stat. Phys., 1986, 45, 201.
8. Lebowitz J., Penrose O.-J. Math. Phys., 1966, 7, p. 98.
9. Lieb E.-J. Math. Phys., 1966, 7, p. 1016.
10. Robinson D.W. The Thermodynamic Pressure in Quantum Statistical Mechanics: Lecture Notes in Physics 9, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.
11. Van den Berg M., Lewis J.T., de Smedt Ph.-J. Stat Phys., 1984, 37, p. 697.
12. Lewis J.T., Pulè J.V., de Smedt Ph.-J. Stat. Phys., 1984, 35, p. 381.
13. Ziff R.M., Uhlenbeck G.E., Kac M.-Phys. Rep., 1977, 320, p.169.
14. Lewis J.T., Pulè J.V. Lecture Notes in Mathematics, 1095, p. 25, Springer-Verlag, Heidelberg, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 апреля 1987 года.