объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-87-238

А.А.Бакасов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ ДВУХУРОВНЕВЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Направлено в "Журнал экспериментальной и теоретической физики"

1987

В теории сверхизлучения, как и в теории лазеров, существуют критические значения некоторых физических величин, которые, как иногда считается, соответствуют переходу системы из одного режима излучения в другой. В теории лазеров параметром, принимающим критические значения, может быть интенсивность накачки. После превышения первого критического уровня накачки лазер излучает синусоидальную волну, которую при достижении второго порога сменяют ультракороткие импульсы [1,2]. Решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику такого лазера, при критических значениях интенсивности накачки становятся неустойчивыми: сначала реализуется устойчивый фокус, который затем сменяется предельными циклом, а в дальнейшем – тором [3]. При этом интенсивность накачки является управляющим внешним параметром системы.

Для сверхизлучающих систем ситуация несколько иная. Объектом изучения обычно является предварительно инвертированная система, которая может переходить в основное состояние, вообще говоря, различными путями. При этом внешнего параметра, подобного интенсивности накачки для лазера, для сверхизлучающей системы не существует. Режим излучения зависит от того, в каком состоянии подготавливается система, содержащая инвертированные излучатели. Это находит отражение в начальных условиях для системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику такой системы.

Одной из основных величин является число предварительно инвертированных излучателей $K(t_0)$, где t_0 -начальный момент времени. Иногда считают, что если $K(t_0) > K_{thr}$, где K_{thr} – некоторое критическое значение, то реализуется режим кооперативного излучения [4]. В противном случае $K(t_0) < K_{thr}$ излучение будет спонтанным. Другим примером является критерий Ареччи-Куртенса [5], в частности, для числа излучателей N. Так, если $N < N_c$, где N_c – критическое значение, то импульс сверхизлучения имеет гладкую секансообразную форму, если же $N > N_c$, то кооперативное излучение становится осцилляторным.

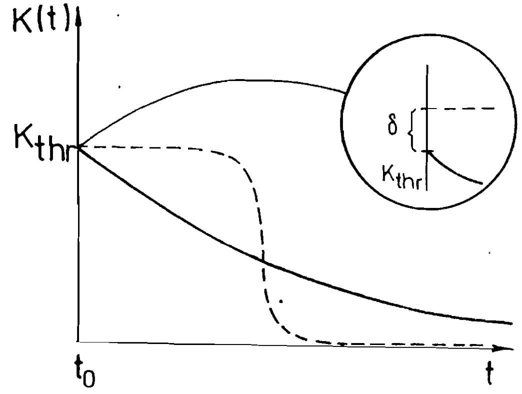
В данной работе строгими методами теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений будет исследован вопрос о характере изменений режима излучения безрезонаторной системы двухуровневых атомов. Если существуют такие критические значения величин K_{thr} или N_c, при которых решения соответствующих эволюционных уравнений становятся неустойчивыми, то режим излучения изменяется скачкообразно: спонтанное излучение сменяется кооперативным, или секансообразный импульс сменяется осцилляторным. Если же решения остаются устойчивыми, то переход через значения K_{thr} или N_c является плавным и непрерывным.

В основу нашего анализа будет положена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая излучение иглообразной системы двухуровневых атомов, взаимодействующей с двумя резонансными модами[6]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dn}{dt} + \frac{n}{\tau} = F,\\
&\frac{dF}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_2}\right)F = \frac{1}{T_0^2}\left(2n\cdot K - N\cdot n + K + S\right),\\
&\frac{dS}{dt} + \frac{S}{T_2} = F\left(2K - N\right),\\
&\frac{dK}{dt} + \frac{K}{T_{noh}} = -F.
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

Здесь n -число фотонов внутри образца, K -число инвертированных атомов, S -величина корреляции между дипольными моментами переходов двухуровневых атомов, F -скорость обмена энергией между полем и атомами, τ -время релаксации поля за счет вылета фотонов из образца, T_2 -время однородной релаксации макроскопического дипольного момента, T_{noh} -время релаксации инвертированных атомов за счет безизлучательных механизмов, N -число атомов в системе, $T_0 = \sqrt{2}\,|g|/\hbar$, где g -константа взаимодействия в гамильтониане Дикке.

Если при переходе начального числа инвертированных атомов $K(t_0)$ через значение K_{thr} режим излучения меняется скачком, то соответствующее решение уравнений (I) становится неустойчивым. Это иллюстрируется рисунком, где сплошная кривая соответствует спонтанному излучению, а штриховая - кооперативному. При превышении $K(t_0)$ над K_{thr} на бесконечно малую величину δ решения, соответствующие сплошной и штриховой линиям, расходятся на конечное расстояние и, следовательно, становятся неустойчивыми по Ляпунову[7]. Поэтому наша задача состоит в исследовании некоторых нетривиальных решений уравнений (I) на устойчивость. Попутно мы выясним, какие условия будут наложены на исследуемые решения.



Введем безразмерные переменные и время

$$y_1 = n,\ y_2 = \tau F,\ y_3 = S,\ y_4 = K;\quad \theta = \frac{t}{\tau}, \qquad (2)$$

а также безразмерные константы

$$\alpha_1 = \frac{\tau}{T_2},\ \alpha_2 = \frac{\tau}{T_0},\ \alpha_3 = \frac{\tau}{T_{noh}}. \qquad (3)$$

Система (I) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = -y_1 + y_2,\\
&\dot{y}_2 = -\frac{1}{2}(1+\alpha_1)y_2 + \alpha_2^2\left(2y_1y_4 - Ny_1 + y_3 + y_4\right),\\
&\dot{y}_3 = -\alpha_1 y_3 + 2y_2y_4 - Ny_2,\\
&\dot{y}_4 = -\alpha_3 y_4 - y_2.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Пусть $A(\theta) = \{A_1(\theta), A_2(\theta), A_3(\theta), A_4(\theta)\}$ -некоторое, пока еще произвольное, решение системы (4). Исследуем его на устойчивость. Записывая

$$y(\theta) = A(\theta) + x(\theta), \tag{5}$$

получим для вариаций $X(\theta) = \{X_1(\theta), X_2(\theta), X_3(\theta), X_4(\theta)\}$ приведенную неавтономную квазилинейную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= -X_1 + X_2,\\
\dot{X}_2 &= -\tfrac{1}{2}(1+\alpha_1)X_2 + \alpha_2^2\big(2X_1X_4 + 2A_1(\theta)X_4 + \\
&\quad + 2A_4(\theta)X_1 - NX_1 + X_3 + X_4\big),\\
\dot{X}_3 &= -\alpha_1 X_3 - NX_2 + 2A_2(\theta)X_4 + 2A_4(\theta)X_2 + 2X_2X_4,\\
\dot{X}_4 &= -\alpha_3 X_4 - X_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

В сокращенной записи имеем

$$\dot{X} = \big(B + \mathcal{A}(\theta)\big)X + f(X), \tag{7}$$

где B –постоянная матрица:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 N & -\frac{1}{2}(1+\alpha_1) & \alpha_2^2 & \alpha_2^2 \\ 0 & -N & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$\mathcal{A}(\theta)$ –матрица, зависящая от времени:

$$\mathcal{A}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_2^2 A_4(\theta) & 0 & 0 & 2\alpha_2^2 A_1(\theta) \\ 0 & 2A_4(\theta) & 0 & 2A_2(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$f(x) = \{0,\ 2\alpha_2^2 x_1x_4,\ 2X_2X_4,\ 0\} \tag{10}$$

Чтобы применить критерий Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем /8/, необходимо показать, что неавтономная система первого приближения

$$\dot{\xi} = \big(B + \mathcal{A}(\theta)\big)\xi \tag{11}$$

является правильной по Ляпунову /7/. Потребуем, чтобы исследуемое решение $A(\theta)$ удовлетворяло условию

$$\int_{\theta_0}^{\infty} \|\mathcal{A}(\theta)\|\, d\theta < \infty, \qquad \theta_0 = \frac{t_0}{\tau}. \tag{12}$$

Производя в системе (II) замену $\xi = C\eta$, где C – неособенная матрица, диагонализующая матрицу B:

$$\Lambda = C^{-1}BC = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \tag{13}$$

получим линейную систему уравнений

$$\dot{\eta} = \Lambda\eta + C^{-1}\mathcal{A}(\theta)C\eta, \tag{14}$$

где в правой части не зависящие от времени коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 стоят по диагонали. Из условия (I2) вытекает, что $\int_{\theta_0}^{\infty} \|C^{-1}\mathcal{A}(\theta)C\|\,d\theta < \infty$. Тогда система (I4) – правильная по Ляпунову, а числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 образуют ее полный спектр /9/. Поскольку нелинейность (I0) удовлетворяет условиям критерия Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем, то исследование на устойчивость тривиального решения приведенной системы (6)-(I0), или, что то же, решения $A(\theta)$ исходной системы (4), сводится к простому вопросу об отрицательной определенности постоянной матрицы B. Пользуясь критерием Сильвестра, легко видеть, что при всех положительных значениях τ, T_2, T_0, T_{noh} и N в уравнениях (I) главные миноры матрицы $-B$ положительны:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(-B) &= 1 > 0,\\
\Delta_2(-B) &= \tfrac{1}{2}(1+\alpha_1) + \alpha_2^2 N > 0,\\
\Delta_3(-B) &= \alpha_1\Delta_2(-B) + \alpha_2^2 N > 0,\\
\Delta_4(-B) &= \alpha_3\cdot\Delta_3(-B) + \alpha_1\cdot\alpha_2^2 > 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

и, следовательно, матрица B отрицательно знакоопределена, т.е. $\lambda_i < 0$, i = I,2,3, 4. Тогда, согласно критерию Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем тривиальное решение приведенной системы (6)-(I0) устойчиво по Ляпунову. Это значит, что решение $A(\theta)$

$$y(\theta) = A(\theta) + x(\theta), \tag{5}$$

получим для вариаций $X(\theta) = \{X_1(\theta), X_2(\theta), X_3(\theta), X_4(\theta)\}$ приведенную неавтономную квазилинейную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= -X_1 + X_2, \\
\dot{X}_2 &= -\tfrac{1}{2}(1+\alpha_1)X_2 + \alpha_2^2\big(2X_1X_4 + 2A_1(\theta)X_4 + \\
&\quad + 2A_4(\theta)X_1 - NX_1 + X_3 + X_4\big), \\
\dot{X}_3 &= -\alpha_1 X_3 - NX_2 + 2A_2(\theta)X_4 + 2A_4(\theta)X_2 + 2X_2X_4, \\
\dot{X}_4 &= -\alpha_3 X_4 - X_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

В сокращенной записи имеем

$$\dot{X} = \big(B + \mathcal{A}(\theta)\big)X + f(X), \tag{7}$$

где B –постоянная матрица:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 N & -\frac{1}{2}(1+\alpha_1) & \alpha_2^2 & \alpha_2^2 \\ 0 & -N & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$\mathcal{A}(\theta)$ –матрица, зависящая от времени:

$$\mathcal{A}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_2^2 A_4(\theta) & 0 & 0 & 2\alpha_2^2 A_1(\theta) \\ 0 & 2A_4(\theta) & 0 & 2A_2(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$f(x) = \{0,\ 2\alpha_2^2 x_1 x_4,\ 2x_2x_4,\ 0\} \tag{IO}$$

Чтобы применить критерий Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем /8/, необходимо показать, что неавтономная система первого приближения

$$\dot{\xi} = \big(B + \mathcal{A}(\theta)\big)\xi \tag{II}$$

является правильной по Ляпунову /7/. Потребуем, чтобы исследуемое решение $A(\theta)$ удовлетворяло условию

$$\int_{\theta_0}^{\infty} \|\mathcal{A}(\theta)\|\, d\theta < \infty, \qquad \theta_0 = \frac{t_0}{\tau}. \tag{I2}$$

Производя в системе (II) замену $\xi = C\eta$, где C – неособенная матрица, диагонализующая матрицу B:

$$\Lambda = C^{-1}BC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \tag{I3}$$

получим линейную систему уравнений

$$\dot{\eta} = \Lambda\eta + C^{-1}\mathcal{A}(\theta)C\eta, \tag{I4}$$

где в правой части не зависящие от времени коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 стоят по диагонали. Из условия (I2) вытекает, что $\int_{\theta_0}^{\infty} \|C^{-1}\mathcal{A}(\theta)C\|\, d\theta < \infty$. Тогда система (I4) – правильная по Ляпунову, а числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 образуют ее полный спектр /9/. Поскольку нелинейность (IO) удовлетворяет условиям критерия Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем, то исследование на устойчивость тривиального решения приведенной системы (6)-(IO), или, что то же, решения $A(\theta)$ исходной системы (4), сводится к простому вопросу об отрицательной определенности постоянной матрицы B. Пользуясь критерием Сильвестра, легко видеть, что при всех положительных значениях τ, T_2, T_0, T_{noh} и N в уравнениях (I) главные миноры матрицы $-B$ положительны:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(-B) &= 1 > 0, \\
\Delta_2(-B) &= \tfrac{1}{2}(1+\alpha_1) + \alpha_2^2 N > 0, \\
\Delta_3(-B) &= \alpha_1\Delta_2(-B) + \alpha_2^2 N > 0, \\
\Delta_4(-B) &= \alpha_3\cdot\Delta_3(-B) + \alpha_1\cdot\alpha_2^2 > 0,
\end{aligned} \tag{I5}$$

и, следовательно, матрица B отрицательно знакоопределена, т.е. $\lambda_i < 0$, i = I,2,3, 4. Тогда, согласно критерию Ляпунова для неавтономных квазилинейных систем тривиальное решение приведенной системы (6)-(IO) устойчиво по Ляпунову. Это значит, что решение $A(\theta)$

исходной системы (I) или (4), удовлетворяющее единственному условию (I2), является устойчивым. Более того, как следует из этого же критерия, решение $A(\theta)$ -экспоненциально устойчиво по Ляпунову /I0/.

Обсудим физические следствия и применимость полученных строгих результатов. Устойчивость решения $A(\theta)$, которое произвольно (за исключением условия (I2)), физически означает, что не существует начальных условий, в частности, такого начального числа инвертированных атомов K_{thr}, при которых режим излучения безрезонаторной системы, описываемой уравнениями (I), изменялся бы скачком. Следовательно, в данной системе переход из режима спонтанного излучения к сверхизлучению происходит непрерывным образом. Экспоненциальная устойчивость решения $A(\theta)$ означает, что за время, сравнимое с $max(\tau, T_2, T_0, T_{non})$, в эволюции переменных R, F, S, K наступает стадия их экспоненциального стремления к нулевым значениям. Следовательно, уравнения (I) адекватно описывают диссипативный характер излучения безрезонаторной системы двухуровневых атомов.

Достаточное условие (I2), с точки зрения математика, является очень сильным. Однако физик не может не требовать выполнения этого условия, поскольку оно эквивалентно условию конечности энергии в системе "Излучатели + поле". В заключение заметим, что исходные переменные R, F, S, K не позволяют воспользоваться прямо энергетическим способом построения функции Ляпунова для исследования решений уравнений (I) на устойчивость, поскольку энергия системы линейна по этим переменным /II/.

Автор признателен П.Е.Жидкову за неоднократные и полезные обсуждения.

Литература

I. Sargent M. III, Scully M.O., Lamb W.E., Jr.,Laser Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

2. Haken H., in Encyclopedia of Physics, vol. XXV/2c: Laser Theory, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1970.

3. Haken H., Synergetics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1978.

4. Bonifacio R., Schwendimann P., Haake F., Phys.Rev., 1971, vol. 4A, No. 1, 302-313.

5. Arecchi F.T., Courtens E. Phys.Rev., 1970, vol. 2A, No.5, 1730-1737.

6. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А., УФН, I980, т.I3I, вып. 4, 653-694.

7. Ляпунов А.М., Общая задача об устойчивости движения, М.-Л.,Гостехиздат, I950.

8. Малкин И.Г., Теория устойчивости движения, М.: Наука, I966.

9. Рапопорт И.М., О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Киев: ИАН УССР, I954.

I0. Красовский Н.Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М: Физматгиз, I959.

II. Лефшец С., Ла-Салль Ж., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М.: Мир, I964.

Рукопись поступила в издательский отдел
I0 мая I987 года.