

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**P11-87-473**

**Г.Г.Тахтамышев**

**АДАПТИВНЫЙ ГЕНЕРАТОР  
СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ (SMART)**

**1987**

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе речь будет идти о вычислении определенных многомерных интегралов методом Монте-Карло. Частным случаем этой задачи является моделирование событий в физике высоких энергий, например, для вычисления акцептанса детектора или получения других характеристик. Будем считать, что область определения есть  $k$ -мерный единичный гиперкуб, и в этой  $k$ -мерной области задана функция, которую нужно проинтегрировать; либо в другой, эквивалентной интерпретации - задана функция плотности вероятности

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_k),$$

в соответствии с которой нужно моделировать события. Эту функцию мы будем называть весом, так как общепринятый способ моделирования заключается в том, что аргументы  $x_j$  генерируются равномерным способом, а событию затем приписывается вес  $f(x_1, \dots, x_k)$ . Традиционный способ оценки интеграла методом Монте-Карло заключается в следующем. Бросаем равномерно  $N$  случайных точек в область определения, вычисляем в каждой точке значение функции  $f(x)$  и оцениваем среднее значение подынтегральной функции по этим  $N$  точкам:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^i).$$

В силу известного соотношения

$$\int_{\omega} f(x) dx = \omega \cdot \langle f \rangle$$

/  $\omega$  - объем области, по которой ведется интегрирование/, оценка среднего есть и оценка интеграла. Определим параметр  $\zeta$ , который будем называть коэффициентом заполнения данной функции, следующим образом:

$$\zeta = \langle f \rangle / f_{\max},$$

где  $f_{\max}$  - максимальное значение функции  $f$  в области интегрирования. Очевидно, что чем меньше этот коэффициент заполнения, тем труднее получить оценку интеграла с некоторой заданной

точностью. Задачу можно назвать трудной, если коэффициент заполнения функции  $\zeta = 10^{-3}$  или меньше. Малая величина параметра  $\zeta$  означает, что вся вероятность стянута к одной или нескольким точкам внутри области определения. Объем, в котором локализована вероятность, по порядку величины равен  $\zeta$ . В качестве иллюстрации можно рассмотреть задачу вычисления аксептанса /геометрической эффективности/ какого-либо детектора, например магнитного спектрометра. Если физическое событие моделируется с весом 1, то подинтегральная функция может принимать только два значения: 1 - если событие регистрируется детектором, и 0 - если не регистрируется. В этом случае параметр  $\zeta$  точно равен объему, в котором сосредоточена вся вероятность. Легко видеть, что если аксептанс равен, например,  $10^{-4}$ , то для его оценки с погрешностью 10% необходимо промоделировать и пропустить через установку  $10^6$  событий.

Один из возможных способов сократить время на решение трудных задач - применение адаптивных алгоритмов. Адаптивной мы называем программу, которая в процессе моделирования накапливает информацию о подинтегральной функции и, начиная с какого-то момента, использует эту информацию при выработывании случайного числа. Вместо равномерного бросания в интервал /0, 1/ случайные числа преимущественно бросаются в область максимума /или максимумов/ функции. Неравномерное бросание точек компенсируется добавочным весом.

## 2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Область определения каждой из переменных  $x_j$  разбита на  $m$  подынтервалов. Случайное число вырабатывается в два этапа: сначала выбирается номер подынтервала, а затем точка на этом подынтервале. И номер подынтервала, и точка внутри подынтервала всегда выбираются равновероятно. Длины же подынтервалов перестраиваются через каждые  $n$  точек. Для каждых  $n$  точек накапливаются величины  $w_{j\ell}$  ( $j = 1, \dots, k$ ;  $\ell = 1, \dots, m$ ) и на основании анализа этих величин проводится изменение длин отрезков. Для каждой переменной  $x_j$  величина  $w_{j\ell}$  - это сумма весов, попавших в подынтервал с номером  $\ell$  за очередные  $n$  точек. Конечная цель алгоритма - подобрать такие длины подынтервалов, чтобы все величины  $w_{j\ell}$  были равны.

Для каждой переменной  $x_j$  анализ величин  $w_{j\ell}$  проводится одинаково и состоит из следующих этапов:

- вычисляется среднее значение  $w_{av} = \frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^m w_{j\ell}$ ;

$w_j \rightarrow \dots \rightarrow g \rightarrow C$

- находятся минимальное и максимальное значения  $w_{min}$  и  $w_{max}$  из всех  $w_{j\ell}$  /для данного  $j$ / и определяются номера подынтервалов  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , в которых реализуются эти значения;

- находится сумма всех весов, за исключением максимального:

$$w_r = \sum_{\ell=1}^m w_{j\ell} - w_{max}$$

На основании этих данных делается классификация распределений величин  $\{w_{j\ell}\}$ , и процедура перестройки длин подынтервалов различна для различных классов. Классификация распределений происходит следующим образом.

Сначала распределению присваивается класс 0. Если отношение  $w_{max}/w_{min}$  больше  $g_1$ , этому распределению присваивается класс 1. Если  $w_{max}/w_{av} > g_2$  или  $w_{av}/w_{min} > g_2$ , то присваивается класс 2. Наконец, если  $w_{max}/w_r > g_3$ , то присваивается класс 3. Константы  $g_1, g_2, g_3$  являются по сути параметрами настройки. В процессе счета использовались значения:  $g_1 = 3, g_2 = 5, g_3 = 2$ . Работа алгоритма при других значениях не исследовалась. Перестройка длин подынтервалов осуществлялась по следующим правилам. Если распределение относится к классу 3, то подынтервал, содержащий максимальный вес /т.е. номер  $\ell_1$ /, делится на  $m-1$  или на  $m-2$  равных подынтервала. Остальные же подынтервалы объединяются в один или два, в зависимости от того, является ли подынтервал  $\ell_1$  крайним или нет.

Если распределение относится к классу 2, то подынтервал с максимальным весом делится на два равных подынтервала. Среди остальных подынтервалов находятся такие два соседних, сумма весов которых меньше, чем у любой другой такой пары. Эти подынтервалы объединяются в один.

Если распределение относится к классу 1, то двигаются границы между всеми подынтервалами. Величина сдвига прямо зависит от соотношения весов в соседних подынтервалах.

Одна из задач, которая ставилась при написании данной программы, заключалась в сведении к минимуму требуемых изменений в моделирующей программе. Приведем упрощенную программу, которая вычисляет определенный интеграл методом Монте-Карло с помощью обычного генератора случайных чисел RNDM.

DIMENSION X (100)

...

SUM = 0.

DO 20 I = 1, N

DO 10 J = 1, K

X(J) = RNDM(DUMMY)

10 CONTINUE

F = FUNCT(X)

```

20 SUM = SUM+F
  RESULT = SUM/N
  ...
  END

```

Та же программа, использующая генератор SMART, будет выглядеть следующим образом:

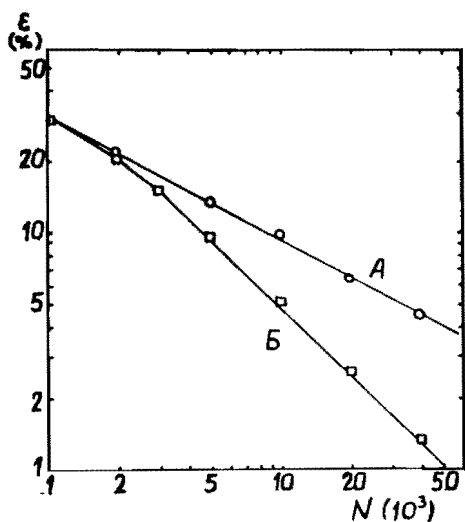
```

  DIMENSION X(100)
  ...
  SUM = 0.
  DO 20 I = 1,N
    W = SMART(0,Z)
    DO 10 J = 1,K
      X(J) = SMART(J,Z)
  10 CONTINUE
  F = FUNCT(X)
  W = SMART(-1,F)
  20 SUM = SUM+W
  RESULT = SUM/N
  ...
  END

```

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис.1 показан результат работы генератора SMART. Методом Монте-Карло вычислялось сечение реакции  $\pi + p \rightarrow p + 7\pi$  при энергии 10 ГэВ в с.ц.м. Матричный элемент предполагался равным константе. Как известно, для определения сечения такой



реакции требуется вычислить фазовый интеграл по 20-мерному гиперкубу. На рисунке показано, как зависит относительная ошибка оценки ( $\epsilon$ ) от полного числа точек (N). При использовании обычного генератора RNDM /кривая А/ ошибка убывает, как и полагается,

Рис.1. Относительная ошибка оценки сечения реакции  $\pi + p \rightarrow p + 7\pi$  ( $\sqrt{s} = 10$  ГэВ) в зависимости от числа точек. А - генератор RNDM. Б - генератор SMART.

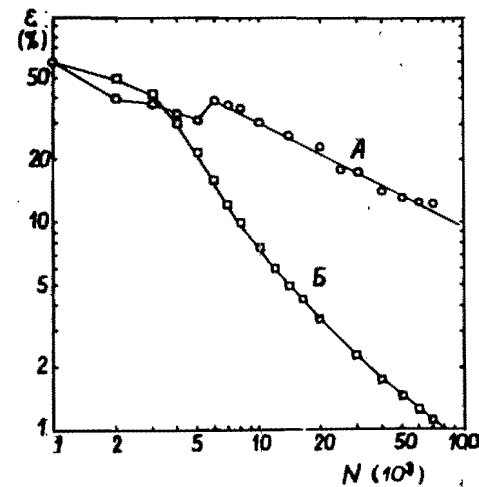
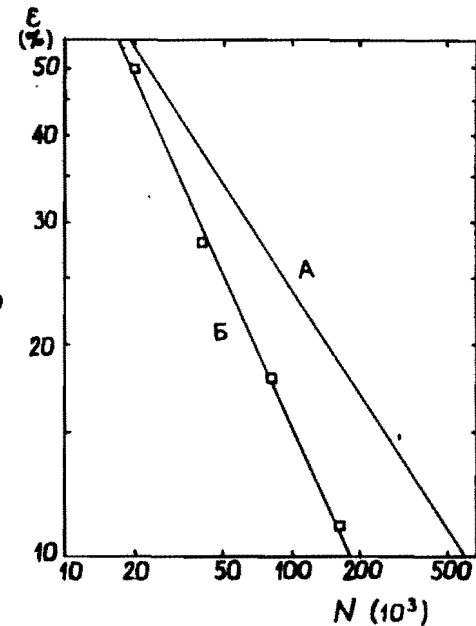


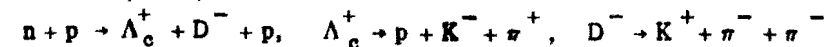
Рис.2. То же, что и на рис.1, для реакции  $\pi + p \rightarrow p + 9\pi$  ( $\sqrt{s} = 10$  ГэВ). А - генератор RNDM. Б - генератор SMART.

Рис.3. Относительная ошибка оценки акцептанса магнитного спектрометра в зависимости от числа точек. А - генератор RNDM. Б - генератор SMART.



по закону  $\epsilon \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ . В случае применения адаптивного генератора SMART убывание ошибки идет по закону, близкому к  $\epsilon \sim \frac{1}{N}$ . Например, для оценки сечения с точностью 5% генератору SMART достаточно 10000 точек, тогда как генератору RNDM требуется для такой же оценки более 30000 точек. В процессе счета оценивался также коэффициент заполнения подынтегральной функции. Оценка дает значение  $\zeta = 2 \cdot 10^{-3}$ .

На рис.2 показана аналогичная зависимость для реакции  $\pi + p \rightarrow p + 9\pi$  тоже при энергии 10 ГэВ в с.ц.м. Видно, что эффект работы адаптивного генератора /кривая Б/ в этом случае еще сильнее. Для этой задачи  $\zeta = 0,7 \cdot 10^{-4}$ . На рис.3 показан результат применения генератора SMART для вычисления акцептанса магнитного спектрометра. Спектрометр имел базу 2,5 м до магнита, базу 3 м после магнита и апертуру магнита  $1 \times 0,3$  м<sup>2</sup>. Моделировалась реакция:



при энергии 60 ГэВ. Требовалось, чтобы все заряженные частицы, образованные в реакции /кроме протона отдачи/ были зарегистрированы в камерах спектрометра. Как показал расчет, аксептанс спектрометра при этих условиях составлял  $\sim 0,2 \cdot 10^{-3}$ . График показывает, что генератор SMART /кривая Б/ и в этом случае обеспечивает более быструю сходимость, хотя отличие от RNDM /кривая А/ не так велико, как в предыдущих примерах. Тем не менее видно, что для получения оценки аксептанса с точностью 10% генератору SMART требуется в 2,5-3 раза меньше точек, чем генератору RNDM.

#### НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р.00 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р.55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р.00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р.50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р.30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р.50 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р.50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р.75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р.80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р.75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р.50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. /2 тома/	13 р.50 к.
Д1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. /2 тома/	7 р.35 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Рукопись поступила в издательский отдел  
25 июня 1987 года.