объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-87-375

Е.П.Жидков, Э.Г.Никонов, Б.Н.Хоромский

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПОЛУОСИ

Направлено в Оргкомитет Всесоюзного симпозиума "Современные проблемы математической физики", Тбилиси, 22-25 апреля 1987 г.

1987

При решении ряда проблем математической физики [3,8] возникают задачи на собственные значения для интегро-дифференциального оператора на полуоси вида

$$\alpha \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + v(x)\psi(x) + \int_0^\infty G(x,y)\psi(y)dy = \lambda\psi(x). \qquad (I)$$

Для достижения высокой точности расчетов в случае достаточно медленного убывания собственной функции $\psi(x)$ при $x \to \infty$ (например, степенного убывания) возникает проблема аппроксимации уравнения (I) при $x \to \infty$. При замене уравнения (I) задачей на конечном отрезке $[0;R]$ погрешность аппроксимации во многих случаях имеет порядок $O(R^{-\beta})$, $\beta>0$, в силу чего величина R может оказаться практически неприемлемой для достижения необходимой точности решений.

Одним из эффективных подходов для получения приближенных решений высокой точности на основе схем, имеющих невысокий порядок аппроксимации, является экстраполяция Ричардсона по параметру дискретизации. Такая экстраполяция основана на регулярной зависимости погрешности от данного параметра.

В настоящей работе исследуется характер зависимости погрешности решения приближенной задачи на конечном отрезке $[0;R]$ от параметра R. Получены условия, при которых эта погрешность разлагается в ряд по степеням R^{-1} с коэффициентами, не зависящими от этого параметра R. Такое представление погрешности позволяет на практике применить экстраполяцию по R, в результате которой точность приближенных решений возрастает на один-два порядка при незначительном увеличении вычислительной работы.

В §I рассматриваем проблему разложения погрешности для задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве в операторной формулировке. Полученные результаты могут быть использованы, например при решении задач с интегро-дифференциальным оператором на всей оси или на полуоси.

В §2 исследуется погрешность аппроксимации для одного класса задач с интегральным оператором на полуоси, возникающих при решении квазипотенциальных интегральных уравнений [6]. Приводится численный пример, иллюстрирующий эффективность экстраполяции по параметру R, задающему аппроксимацию краевого условия на бесконечности.

§ I.

Рассмотрим задачу на собственные значения для линейного, симметрического в гильбертовом пространстве H оператора A, с областью определения $D(A) \subset H$ и областью значений $R(A) \subset H$ (предполагаем, что пространства H и H^* отождествлены). Согласно [I], эта задача представляет собой нелинейное уравнение

$$\Phi(z) \equiv \begin{Bmatrix} Ax - \lambda x \\ 2^{-1}(x,x) - 2^{-1} \end{Bmatrix} = 0, \qquad (2)$$

где $z=(x,\lambda)$ – элемент прямой суммы $H_1 = H \oplus \mathbb{R}$, $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а $\Phi \in (D(A)\oplus\mathbb{R} \to R(A)\oplus\mathbb{R})$. Скалярное произведение в H_1 определяется формулой

$$(z_1, z_2) = (x_1, x_2) + \lambda_1\lambda_2.$$

Первая производная Фреше оператора Φ определяется выражением

$$\Phi'(z_0)z = \begin{Bmatrix} Ax - \lambda_0 x - \lambda x_0 \\ (x, x_0) \end{Bmatrix}, \quad z_0 = (x_0, \lambda_0), \qquad (3)$$

а вторая производная имеет вид

$$\Phi''(z_0)(z_1, z_2) = \begin{Bmatrix} -\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 \\ (x_1, x_2) \end{Bmatrix}. \qquad (4)$$

Производные более высокого порядка равны нулю.

Пусть существует однократное изолированное собственное значение λ^* оператора А с собственной функцией X^*. Тогда, используя результаты /2/, можно получить /3/, что оператор $\Phi'(z^*)$ имеет ограниченный обратный $\Phi'(z^*)^{-1}$ и справедлива оценка

$$\|\Phi'(z^*)^{-1}\| \le M,\quad M = max\,(1, m^{-1}), \tag{5}$$

где $m = \inf\limits_{\lambda\in \mathcal{L}(A)/\lambda^*} |\lambda^* - \lambda|$, $\sigma(A)$ – спектр оператора А.

Пусть для любого вещественного числа $\tau > \tau_0$, где $\tau_0>0$, определено представление $H = H_\tau \oplus H_d$ в виде прямой суммы подпространств гильбертова пространства Н. Определим ортогональный проектор P_τ, обладающий свойствами

$$P_\tau H = H_\tau,\quad P_\tau^2 = P_\tau,\quad (E - P_\tau)H = H_d \tag{6}$$

Рассмотрим линейный ограниченный симметрический оператор A_τ, аппроксимирующий оператор А следующим образом: $A_\tau = P_\tau A P_\tau$, $A_\tau \in (P_\tau D(A) \to P_\tau R(A))$. Задачу на собственные значения для оператора A_τ представим аналогично (2) в виде нелинейного уравнения

$$\Phi_\tau(z) = \begin{Bmatrix} A_\tau X - \lambda P_\tau X \\ 2^{-1}(x,x) - 2^{-1}\end{Bmatrix} = 0, \tag{7}$$

где $z=(x,\lambda)\in(P_\tau D(A)\oplus \mathbb{R})$ и $\Phi_\tau \in (P_\tau D(A)\oplus\mathbb{R} \to P_\tau R(A)\oplus \mathbb{R})$.
Пусть в пространстве Н заданы линейные множества B и B':

$$B\subset D(A)\subset H,\quad B'\subset R(A)\subset H,\quad x^*\in B$$

Эти множества определяются классами разрешимости задачи

$$\Phi'(z^*)z = f,\quad f=(g,\mu),\quad z=(x,\lambda),$$

если $g\in B'$, то $x\in B$ и при этом $A(B)\subset B'$. Обозначим $B_1 \equiv B\oplus\mathbb{R}$ и $B_1'\equiv B'\oplus \mathbb{R}$, тогда $f\in B_1'$ и $z\in B_1$.

Наша цель – получить разложение величины

$$\Delta_\tau = z_\tau^* - P_\tau z^* \tag{8}$$

по степеням τ^{-1}, z_τ^* – точное решение уравнения (7),

$$\Delta_\tau = P_\tau \sum_{k=1}^{N} C_k(z^*)\,\tau^{-k\nu_0} + \Omega_\tau,\quad \|\Omega\| = o(\tau^{-N\nu_0}), \tag{9}$$

где элементы $C_k(z^*)\in B_1$ и не зависят от τ, $\nu_0>0$ – вещественное число.

Разложение Δ_τ вида (9) устанавливает

<u>Теорема I.</u>

I. Пусть выполнены условия:

1) существует однократное изолированное собственное число λ^* задачи (2) с собственной функцией X^*, $z^*=(x^*,\lambda^*)\in B_1$. Для всех $z\in B_1$ выполнены соотношения

2) $\lim \|P_\tau - E\| = 0$ при $\tau\to\infty$; (10)

3) $\lim\|A_\tau - A\| = 0$ при $\tau\to\infty$. (11)

Тогда существует такое число $\tau_0>0$, что для $\forall \tau>\tau_0$ оператор $\Phi_\tau'(P_\tau z^*)$ имеет равномерно ограниченный обратный и справедлива оценка

$$\|\Phi_\tau'(P_\tau z^*)^{-1}\|\le M_1, \tag{12}$$

где $M_1>0$ и не зависит от τ.

II. Если выполнены условия 1)–3) и условие

4) $\|\Phi_\tau(P_\tau z^*)\| = O(\tau^{-\nu_0})$, $\nu_0>0$, при $\tau\to\infty$, (13)

тогда существует такое число $\tau_1>0$, что для $\forall\tau>\tau_1$ найдется такое число $\bar\delta>0$, что в $\bar\delta$-окрестности $\|P_\tau z^* - z\| < \bar\delta$ элемента $P_\tau z^*$ существует единственное решение z_τ^* задачи (7), такое, что

$$\lim \|P_\tau z^* - z_\tau^*\| = 0 \text{ при } \tau\to\infty. \tag{14}$$

III. Если выполнены условия 1)–4) и для $\forall \tau > \max(\tau_0, \tau_1)$ существуют разложения

5) $$P_\tau A x - A_\tau P_\tau x = P_\tau \sum_{k=1}^{N} a_k(x) \tau^{-k\nu_0} + \Omega_{\tau,0} \qquad (15)$$

для $\forall x \in B$, $a_k(x) \in B'$ и не зависят от τ.

6) $$(y, x) - (P_\tau y, P_\tau x) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k \tau^{-k\nu_0} + \omega_{\tau,0} \qquad (16)$$

для $\forall x \in B$ и $\forall y \in B$, μ_k не зависят от τ и выполнены соотношения

$$\|\Omega_{\tau,0}\| = o(\tau^{-N\nu_0}), \quad |\omega_{\tau,0}| = o(\tau^{-N\nu_0}), \qquad (17)$$

тогда для решения z_τ^* уравнения (7) справедливо разложение

$$z_\tau^* - P_\tau z^* = P_\tau \sum_{k=1}^{N} c_k(z^*) \tau^{-k\nu_0} + \Omega_\tau, \quad \|\Omega\| = o(\tau^{-N\nu_0}), \qquad (18)$$

где $c_k(z^*) \in B_1$ и не зависят от τ.

Доказательство:

I. Докажем утверждение (12). Для этого представим оператор $(\Phi'_\tau(P_\tau z^*) + E - P_\tau)$ в виде

$\Phi'_\tau(P_\tau z^*) + E - P_\tau \equiv \Phi'(z^*) + \Delta$, где $\Delta = \Phi'_\tau(P_\tau z^*) + E - P_\tau - \Phi'(z^*)$

На основании формулы (3):

$$\Delta z = \Phi'_\tau(P_\tau z^*) z - \Phi'(z^*) z + (E - P_\tau) z = \begin{Bmatrix} A_\tau x - \lambda^* P_\tau x - \lambda P_\tau x^* + (E - P_\tau) x \\ (x, P_\tau x^*) \end{Bmatrix} -$$

$$- \begin{Bmatrix} A x - \lambda^* x - \lambda x^* \\ (x, x^*) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (A_\tau - A) x - \lambda^*(P_\tau x - x) - \lambda(P_\tau x^* - x^*) + (E - P_\tau) x \\ (x, P_\tau x^* - x^*) \end{Bmatrix}.$$

Отсюда в силу условий 2) и 3) следует, что

$\lim \|\Delta\| = 0$ при $\tau \to \infty$ для $\forall z \in B$.
Следовательно, существует такое число τ_0, что для $\forall \tau > \tau_0$

$$\|\Delta\| < \frac{1}{\|\Phi'(z^*)^{-1}\|}.$$

Тогда по теореме об обратном операторе /4/ для $(\Phi'_\tau(P_\tau z^*) + E - P_\tau)$ существует непрерывный обратный, причем

$$\|\Phi'_\tau(P_\tau z^*) + E - P_\tau\| \leqslant \frac{\|\Phi'(z^*)^{-1}\|}{1 - \|\Phi'(z^*)^{-1}\| \cdot \|\Delta\|} \leqslant \frac{M}{1 - M\|\Delta(\tau_0)\|} \equiv M_1.$$

Поэтому у оператора $\Phi'_\tau(P_\tau z^*)$ существует ограниченный обратный $\Phi'_\tau(P_\tau z^*)^{-1} \in (B'_1 \to B_1)$ и

$$\|\Phi'_\tau(P_\tau z^*)^{-1}\| \leqslant M_1,$$

где $M_1 > 0$ и не зависит от τ.

II. Докажем утверждение (14). Существование решения $z_\tau^* = (x_\tau^*, \lambda_\tau^*)$ задачи (7) установим методом Ньютона-Канторовича. В качестве начального приближения возьмем элемент $P_\tau z^* = (P_\tau x^*, \lambda^*)$, $P_\tau z^* \in H_1$. Согласно условию (13) и утверждению (12) существует такое число τ', что для $\forall \tau > \tau'$

$\|\Phi(P_\tau z^*)\| \leqslant C \tau^{-\nu_0}$, где $C > 0$ и не зависит от τ,

и существует такое число $\tau_0 > 0$, что $\forall \tau > \tau_0$

$\|\Phi'_\tau(P_\tau z^*)^{-1}\| \leqslant M_1$, где $M_1 > 0$ и не зависит от τ.

Напомним, что вторая производная Фреше оператора Φ_τ имеет вид (4) и поэтому равномерно ограничена $\|\Phi''\| \leqslant 1$. Следовательно, можно заключить, что существует такое число $\tau_1 \geqslant \max(\tau_0, \tau')$, что $h = M_1^2 C \tau^{-\nu_0} < 0.5$, и согласно /4/, для $\bar{\delta} = (1 + \sqrt{1 - 2h}) h^{-1} M_1 C \tau^{-\nu_0}$ при $\forall \tau > \tau_1$ в окрестности $\|P_\tau z^* - z\| \leqslant \bar{\delta}$ элемента $P_\tau z^*$ уравнение (7) имеет единственное решение $z_\tau^* = (x_\tau^*, \lambda_\tau^*)$, к которому метод Ньютона-Канторовича сходится и

$$\|P_\tau z^* - z_\tau^*\| \leqslant (1 - \sqrt{1 - 2h}) h^{-1} M_1 C \tau^{-\nu_0} \leqslant K \tau^{-\nu_0}, \; K = const,$$

что и доказывает утверждение (14).

Ш. Используя условия (I5) и (I6) теоремы, равенства (2), (7), запишем

$$\Phi_\tau(z_\tau^*)-\Phi_\tau(P_\tau z^*)=P_\tau\sum_{k=1}^{N}\bar{a}_k(z^*)\,\tau^{-k\nu_0}+\bar{\Omega}_{\tau,0},$$

где $\bar{a}_k(z^*)=(a_k(x^*),\mu_k)$, $a_k(x^*)\in B'$ и $\bar{\Omega}_{\tau,0}=(\Omega_{\tau,0},\omega_{\tau,0})$. Применив аналог формулы Тейлора для операторов в В-пространстве /5/, получим

$$\Phi_\tau'(P_\tau z^*)\Delta_\tau+\frac{1}{2}\Phi_\tau''(\Delta_\tau,\Delta_\tau)=P_\tau\sum_{k=1}^{N}\bar{a}_k(z^*)\,\tau^{-k\nu_0}+\bar{\Omega}_{\tau,0}\qquad(\mathrm{I9})$$

Так как $\Phi_\tau'(P_\tau z^*)$ имеет ограниченный обратный для $\forall z\in B_1$, а $\|\Phi_\tau''\|\leqslant 1$, то в силу принципа неподвижной точки /4/ уравнение (I9) имеет единственное решение в малой окрестности нуля. Докажем теперь, что для этого решения справедливо разложение (I8).

Используя формулу (3), для $\forall z\in B_1$ получим

$$P_\tau\Phi'(z^*)z-\Phi_\tau'(P_\tau z^*)z=\begin{Bmatrix}P_\tau Ax-\lambda^*P_\tau x-\lambda P_\tau x^*\\(x^*,x)\end{Bmatrix}-$$

$$-\begin{Bmatrix}A_\tau P_\tau x-\lambda^*P_\tau x-\lambda P_\tau x^*\\(P_\tau x^*,P_\tau x)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_\tau Ax-A_\tau P_\tau x\\(x^*,x)-(P_\tau x^*,P_\tau x)\end{Bmatrix}$$

С учетом разложений 5) и 6) теоремы получим

$$P_\tau\Phi'(z^*)z-\Phi_\tau'(P_\tau z^*)P_\tau z=P_\tau\sum_{k=1}^{N}\bar{a}_k(z)\,\tau^{-k\nu_0}+\bar{\Omega}_{\tau,0},\qquad(20)$$

для $\forall z\in B_1$, $\bar{a}_k(z)=(a_k(x),\mu_k)$, $a_k(x)\in B'$ и не зависят от τ , $\bar{\Omega}_{\tau,0}=(\Omega_{\tau,0};\omega_{\tau,0})$.

После замены Δ_τ в левой части уравнения (I9) согласно выражению (I8) получим

$$P_\tau\Phi'(z^*)\sum_{k=1}^{N}c_k\tau^{-k\nu_0}+\Phi_\tau'(P_\tau z^*)\Omega_\tau+\frac{1}{2}\Phi_\tau''P_\tau\Big(\sum_{k=1}^{N}c_k\tau^{-k\nu_0}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{N}c_k\tau^{-k\nu_0}\Big)+$$

$$+\Phi_\tau''P_\tau\Big(\sum_{k=1}^{N}c_k\tau^{-k\nu_0}\Big)\Omega_\tau+\frac{1}{2}\Phi_\tau''(\Omega_\tau,\Omega_\tau)=P_\tau\sum_{k=1}^{N}A_k\tau^{-k\nu_0}+\bar{\Omega}_{\tau,0},$$

где $A_k=\bar{a}_k(z^*)+\sum\limits_{i=1}^{k-1}\bar{a}_i(c_{k-i})$.

Для коэффициентов c_k из последнего уравнения получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\Phi'(z^*)c_1=A_1\\ \Phi'(z^*)c_2+\frac{1}{2}\Phi_\tau''(c_1,c_1)=A_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Phi'(z^*)c_N+\frac{1}{2}\Phi_\tau''\sum\limits_{i=1}^{N-1}(c_i,c_{N-i})=A_N.\end{cases}$$

Эта система однозначно разрешима в силу соотношения (5). Коэффициенты $c_k\in B_1$, $k=1,\dots,N$, так как $A_k\in B_1'$, $k=1,\dots,N$. Для Ω_τ получим уравнение

$$\Phi_\tau'(P_\tau z^*)\Omega_\tau+\Phi_\tau''P_\tau\Big(\sum_{k=1}^{N}c_k\tau^{-k\nu_0}\Big)\Omega_\tau+\frac{1}{2}\Phi_\tau''(\Omega_\tau,\Omega_\tau)=\bar{\Omega}_{\tau,0}.\qquad(\mathrm{2I})$$

Поскольку оператор $\Phi_\tau'(P_\tau z^*)$ имеет ограниченный обратный, а два других оператора в левой части уравнения (2I) являются сжимающими при достаточно больших значениях τ , то уравнение (2I) однозначно разрешимо в силу принципа неподвижной точки /4/, а для его решения легко получить оценку

$\|\Omega_\tau\|\leqslant C(z^*)\,o(\tau^{-N\nu_0})$, где $C(z^*)$ не зависит от τ ,

которая и доказывает теорему.

<u>Замечание I.</u> Условия (I0), (II) не являются необходимыми. Если свойство (I2) может быть проверено непосредственно, то условия (I0), (II) можно опустить.

§ 2. Результат теоремы I применим в задаче на собственные значения для оператора А, который имеет вид /6/

$$A\psi\equiv v\psi+G\psi,\qquad(22)$$

где $v(p)=\sqrt{1+p^2}$, $\psi(p)\in L_2[0;\infty)$,

$$G\psi\equiv\int_0^\infty G(p,k)\,\psi(k)\,dk=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,L(p,k)\,\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\,\psi(k)\,dk;$$

$$L(\rho,\kappa) \equiv \ln\left|\frac{a+(b^2-2\rho\kappa)^{\frac12}}{a+(b^2+2\rho\kappa)^{\frac12}}\right|;$$

$$a=\sqrt{1+\rho^2}+\sqrt{1+\kappa^2}-M,\quad M<2;$$
$$b=\sqrt{\rho^2+\kappa^2+\mu^2},\quad \mu=O(1).$$

Докажем, что $G\in(L_2[0;\infty)\to L_2[0;\infty))$ – вполне непрерывный оператор. Сначала покажем, что

$$|L(\rho,\kappa)|\le C_\ell,\qquad C_\ell>0$$ и не зависит от ρ и κ.

Разложим функцию $L(\rho,\kappa)$ по малому параметру $2\rho\kappa/b^2$ в ряд, тогда получим

$$L(\rho,\kappa)=\ln\left|\frac{a+b(1-2\rho\kappa/b^2)^{\frac12}}{a+b(1+2\rho\kappa/b^2)^{\frac12}}\right|=-\frac{2b}{a+b}\left(\frac12\cdot\frac{2\rho\kappa}{b^2}+\frac12\cdot\frac14\cdot\frac36\left(\frac{2\rho\kappa}{b^2}\right)^3+\dots\right)-$$
$$-\frac{b^2}{(a+b)^2}\left(\frac12\cdot\frac14\left(\frac{2\rho\kappa}{b^2}\right)^3+\frac14\cdot\frac14\cdot\frac12\cdot\frac12\left(\frac{2\rho\kappa}{b^2}\right)^5+\dots\right)+O\left(\frac{b^3}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{2\rho\kappa}{b^2}\right)^5\right)$$

Заметим, что

$$\frac{b}{a+b}\le\frac{b}{b(1+\alpha)}=\frac{1}{1+\alpha},\quad \alpha>0,$$
$$\frac{2\rho\kappa}{b^2}=\frac{2\rho\kappa}{\rho^2+\kappa^2+\mu^2}<1.$$

Отсюда:

$$|L(\rho,\kappa)|\le\frac{2}{1+\alpha}\left(\frac12+\frac1{16}+\frac7{128}+\dots\right)+\frac{1}{(1+\alpha)^2}\cdot\left(\frac18+\frac1{64}+\dots\right)+O\left(\frac{1}{(1+\alpha)^3}\right)$$

для $\forall\rho$, κ : $0\le\rho<\infty$, $0\le\kappa<\infty$. Следовательно,

$$|L(\rho,\kappa)|\le C_\ell,\quad C_\ell>0 \text{ и не зависит от } \rho \text{ и } \kappa. \qquad (23)$$

Далее можно показать, что:

1. $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty|G(\rho,\kappa)|^2d\rho d\kappa\le C_\ell^2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{1}{1+\rho^2}\cdot\frac{1}{1+\kappa^2}\,d\rho d\kappa=\frac{\pi^2}{4}C_\ell^2$;

2. $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty|G(\rho+h,\kappa)-G(\rho,\kappa)|^2d\rho d\kappa\le\frac{\pi C_\ell^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,h+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{h}{1+\alpha}+O(h^3)\right)$,

т.е. для $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ такое $\delta(\varepsilon)$, что для $\forall h$: $0<h<\delta(\varepsilon)$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty|G(\rho+h,\kappa)-G(\rho,\kappa)|^2d\rho d\kappa<\varepsilon^2.$$

3. $\left[\int\limits_0^\infty|G(\rho,\kappa)|^2d\kappa\right]^{\frac12}\le\frac{C_\ell\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{1+\rho^2}}\le\frac{C_0}{\rho}$, $C_0>0$ и не зависит от ρ, для всех $\rho>\rho_0$, $\rho_0>0$.

Т.о. функция $G(\rho,\kappa)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 Приложения, и, следовательно, оператор $G\in(L_2[0;\infty)\to L_2[0;\infty))$ – вполне непрерывный. По теореме Гильберта /7/ для $\forall$ функции $\psi(x)\in L_2[0;\infty)$ для оператора G справедливо разложение

$$G\psi(x)=\sum_i\mu_i\,(\psi,\varphi_i)\,\varphi_i(x),$$

где μ_i – собственные числа, а $\{\varphi_i(x)\}$ – ортонормированная система собственных функций оператора G. Пусть величины μ_i упорядочены следующим образом:

$$|\mu_1|\ge|\mu_2|\ge\dots\ge|\mu_n|\ge\dots,$$

тогда справедливо соотношение

$$G\psi(x)=\sum_{i=1}^N\mu_i(\psi,\varphi_i)\varphi_i(x)+v_N,\quad\|v_N\|=o(\mu_N) \qquad (24)$$

Для достаточно больших значений ρ оператор G уравнения (22) мажорируется выражением

$$|G\psi(\rho)|\le C_\ell\int\limits_0^\infty\frac{|\psi(\kappa)|d\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\cdot\left(\frac1\rho-\frac12\cdot\frac1{\rho^3}+\frac38\cdot\frac1{\rho^5}+O\left(\frac1{\rho^7}\right)\right). \qquad (25)$$

Следовательно, мы можем предположить с учетом симметричности оператора G, что функции φ_i представимы в виде

$$\varphi_i(x)=\sum_{i=1}^N\frac{g_i}{x^{2i-1}}+o\left(\frac{1}{x^{2N-1}}\right),\qquad x\ge x_0>0,$$

где g_i не зависят от x.

Решение уравнения (22) $\psi^*(p) \in B$, классы B и B' определяются следующим образом:

$$B = \{\psi : \psi(x) = \sum_{i=2}^{N} c_i x^{-i} + o\left(\frac{1}{x^N}\right)\}; \ x \to \infty$$

$$B' = \{f : f(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i x^{-i} + o\left(\frac{1}{x^N}\right)\}, \ x \to \infty$$

$$|c_i| \le \varphi_1(\|\psi\|), \ |b_i| \le \varphi_2(\|f\|),$$

φ_i - непрерывны на $[0, \infty)$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы I § I и, следовательно, для решения уравнения справедливо разложение (I8).

Следует отметить, что разложение приближенного решения по степеням τ наблюдается не только для вполне непрерывных операторов, но и в более общем случае. В этих случаях коэффициенты при степенях τ^{-1} в разложении приближенных решений могут быть найдены численно.

§ 3. Продемонстрируем метод уточнения приближенных решений, основанный на разложении решений по степеням τ , на примере уравнения Шредингера, которое в случае кулоновского потенциала сводится к одномерному уравнению /8/

$$\frac{x^2}{2}\varphi(x) + \frac{\beta}{\pi}\int_0^\infty \ln\left|\frac{x-t}{x+t}\right| \varphi(t)\, dt = \lambda\, \varphi(x). \tag{26}$$

Это уравнение имеет точное решение. В частности, при $\beta = 1$

$$\varphi_1(x) = x(x^2+1)^{-2}, \quad \lambda_1 = -0.5.$$

Расчеты проводились для трех сеток с количеством неизвестных $n_1 = 64$, $n_2 = 128$, $n_3 = 256$. В таблице приведены величины

$$\Delta_h(\tau_1) = \lambda_h - \lambda^*; \ \Delta_h(\tau_1, \tau_2) = \lambda_h(\tau_1, \tau_2) - \lambda^*;$$

$$\Delta_h(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \lambda_h(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) - \lambda^*.$$

λ^* - точное решение уравнения (26), λ_h - уточненное по шагу сетки методом Ричардсона приближенное решение, $\lambda_h(\tau_1, \tau_2)$ и

$\lambda_h(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ - уточненное по Ричардсону и экстраполированное по двум значениям τ и по четырем значениям τ соответственно.

Другие примеры использования разложения (9) можно найти в /II/.

Таблица

	Δ
$\Delta_h(5,5)$	$7{,}69 \cdot 10^{-3}$
$\Delta_h(5;5,5)$	$2{,}58 \cdot 10^{-3}$
$\Delta_h(4;4,5;5;5,5)$	$7{,}88 \cdot 10^{-5}$

Приложение

Введем обозначения

$$L_2[0, b] \equiv L_{2,b} \ (L_2[0,\infty) \equiv L_{2,\infty}), \ 0 < b < \infty$$

Нам понадобится система вложенных отрезков $\{[0; n_i^b]\}$, где $\{n_i^b\}$ - последовательность целых чисел, начинающаяся с $n_1 > b$. Поэтому обозначим $\{[0, n_i^b]\} \equiv N_b$, так как эта система по построению целиком определяется числом b . Имеет место

Лемма I. Пусть последовательность функций

$$\{\psi_n(t) : \psi_n(t) \in L_{2,\infty} \ \forall n : n = 1, 2, ..\}$$

удовлетворяет следующим условиям:

I) $\{\psi_n(t)\}$ является последовательностью Коши в $\forall L_{2,b}$;

2) $\exists b_0 > 0$, что для $\forall t > b_0$ и $\forall n$ выполнено неравенство

$$|\psi_n(t)| < \frac{C_0}{t^\alpha}; \ \alpha = \frac{1}{2} + \beta, \ C_0 > 0, \ \beta > 0,$$

тогда $\{\psi_n(t)\}$ является последовательностью Коши в $L_{2,\infty}$.

Доказательство:

Для $\forall n_i, n_j \in \{n_i^{b}\}$, $n_i < n_j$, с учетом условия 2) имеет место неравенство

$$\|\psi_{n_i}-\psi_{n_j}\|^2_{L_{2,\infty}} = \int_0^{n_i} |\psi_{n_i}(t)-\psi_{n_j}(t)|^2 dt + \int_{n_i}^{\infty} |\psi_{n_i}(t)-\psi_{n_j}(t)|^2 dt \le$$

$$\le \|\psi_{n_i}-\psi_{n_j}\|^2_{L_{2,n_i}} + \frac{2C_0^2}{(2\alpha-1)n_i^{2\alpha-1}} = \|\psi_{n_i}-\psi_{n_j}\|^2_{L_{2,n_i}} + \frac{C_0}{\beta n_i^{2\beta}}.$$

Очевидно, что для $\forall \varepsilon>0\ \exists$ такой номер $n_0(\varepsilon)$, что для $\forall n_i > n_0(\varepsilon)$ выражение

$$\frac{C_0}{\beta n_i^{2\beta}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем какое-либо число $\bar{n} > n_j$ и зафиксируем его. В силу определения последовательности Коши /I/ и условия I) леммы I можно утверждать, что для заданного $\varepsilon>0\ \exists$ такой номер $\bar{n}_0(\varepsilon)$, что для $\forall n_i > \bar{n}_0(\varepsilon)$, $\forall n_j > \bar{n}_0(\varepsilon)$ выполнено неравенство:

$$\|\psi_{n_i}-\psi_{n_j}\|^2_{L_{2,\bar{n}}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для $\forall\varepsilon>0\ \exists$ такой $N(\varepsilon)=\max(n_0(\varepsilon),\bar{n}_0(\varepsilon))$, что для $\forall n_i>N(\varepsilon)$ и $\forall n_j > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\|\psi_{n_i}-\psi_{n_j}\|^2_{L_{2,\infty}}<\varepsilon.$$

Следовательно, по определению /I/ последовательность $\{\psi_n(t)\}$ является последовательностью Коши в $L_{2,\infty}$.

Теорема I.

Пусть множество функций $\{\psi(t)\cdot\psi(t)\in L_{2,\infty}\}$ удовлетворяет условиям:

I) $\{\psi(t)\}$ относительно компактно в $\forall\cdot L_{2,b}$;

2) $\exists b_0>0$, что для $\forall t > b_0$ для всех функций из $\{\psi(t)\}$ справедливо неравенство

$$|\psi(t)| < \frac{C_0}{t^\alpha},\ \alpha=\frac{1}{2}+\beta,\ C_0>0,\ \beta>0,$$

тогда множество функций $\{\psi(t)\}$ компактно в $L_{2,\infty}$.

Доказательство:

Доказательство будет заключаться в следующем. Сначала построим последовательность функций из множества $\{\psi(t)\}$, которая будет последовательностью Коши в $\forall L_{2,b}$. Затем воспользуемся полнотой пространства $L_{2,\infty}$ и докажем, что построенная последовательность будет сходящейся. И, наконец, докажем компактность множества $\{\psi(t)\}$.

Рассмотрим систему отрезков N_{b_0}, $b_0>0$ и соответствующую последовательность пространств: $L_{2,n_1}\subset L_{2,n_2}\subset\ldots\subset L_{2,\infty}$, $n_1 > b_0$. Построим последовательность функции из $\{\psi(t)\}$ следующим образом. В силу условия I) теоремы I из множества $\{\psi(t)\}$ можно выбрать бесконечную последовательность $\{\psi_{k_1}^{n_1}(t)\}$: $\|\psi_{k_1}^{n_1} - \psi^{n_1}\|_{L_{2,n_1}} \to 0$ при $k_1\to\infty$, $\psi^{n_1}\in L_{2,\infty}$. Далее из этой последовательности можно выбрать такую последовательность $\{\psi_{k_2}^{n_2}(t)\}$, что $\exists\psi^{n_2}\in L_{2,\infty}$: $\|\psi_{k_2}^{n_2}-\psi^{n_2}\|_{L_{2,n_2}}\to 0$ при $k_2\to\infty$. Заметим, что $\psi^{n_2}(t)\equiv\psi^{n_1}(t)$ на отрезке $[0;n_1]$. Этот процесс может быть продолжен неограниченно. Построим диагональную последовательность $\{\psi_i(t): \psi_i(t)\equiv\psi_i^{n_i}, i=1,2,\}$. Покажем, что $\{\psi_i\}$ является последовательностью Коши в каждом из пространств L_{2,n_i}. Для $\forall n_i$ имеет место неравенство

$$\|\psi_{i_k}-\psi_{i_l}\|_{L_{2,n_i}} \le \|\psi_{i_k}-\psi^{n_i}\|_{L_{2,n_i}} + \|\psi_{i_l}-\psi^{n_i}\|_{L_{2,n_i}}.$$

По построению в $\forall L_{2,n_i}$ последовательность $\{\psi_i\}$ является подпоследовательностью, сходящейся в L_{2,n_i} последовательности. Следовательно, $\{\psi_i\}$ сходится в L_{2,n_i} к ψ^{n_i} в силу единственности предела последовательности /I/.

Таким образом, для $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)$, что для $\forall i_k > n_0(\varepsilon)$

$$\|\psi_{i_k}-\psi^{n_i}\|_{L_{2,n_i}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

для $\forall\, i_\ell > n_0(\varepsilon)$

$\| \psi_{i_\ell} - \psi^{n_i} \|_{L_2, n_i} < \frac{\varepsilon}{2}$,

что и означает, что в силу произвольности n_i $\{\psi_i(t)\}$ является последовательностью Коши в $\forall\, L_{2, n_i}$. Поэтому с учетом условия 2) теоремы I в силу леммы I $\{\psi_i(t)\}$ является последовательностью Коши в $L_{2,\infty}$. В силу полноты $L_{2,\infty}$ /9/ $\exists\, \psi(t) \in L_{2,\infty}$: $\| \psi_i - \psi \|_{L_{2,\infty}} \to 0$ при $i \to \infty$. Следовательно, по определению /10/ множество $\{\psi(t)\}$ компактно в $L_{2,\infty}$. Теорема доказана.

Теорема 2.

Пусть оператор G определен следующим образом:

$$G\psi = \int_0^\infty G(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi\ , \quad \psi \in L_{2,\infty}$$

и функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет условиям:

I) $\int_0^\infty\int_0^\infty |G(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi \le C^2$, $C = const$, $C > 0$;

2) для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall\, h : 0 < h < \delta(\varepsilon)$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |G(x+h,\xi) - G(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi < \varepsilon^2;$$

3) для $\forall\, x > b_0$, $b_0 > 0$

$$\Big[\int_0^\infty |G(x,\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \le \frac{C_0}{x^\alpha}\ , \quad \alpha = \frac{1}{2} + \beta,\ C_0 > 0,\ \beta > 0,$$

тогда $G \in (L_{2,\infty} \to L_{2,\infty})$ – вполне непрерывный.

Доказательство:

Рассмотрим множество ограниченных функций $M = \{\psi(t) : \psi \in L_{2,\infty}; \|\psi\| \le 1\}$. Оператор $G \in (M \to K)$, где $K = \{\psi(x) : \psi(x) = \int_0^\infty G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi\}$. Докажем, что множество K относительно компактно в $\forall\, L_{2,b}$, $b > 0$ и для $\forall\, x > b_0$,

$$b_0 > 0 \Rightarrow |\psi(x)| < \frac{C_0}{x^\alpha}\ , \quad \alpha = \frac{1}{2} + \beta;\ \beta > 0,\ C_0 > 0.$$

Затем, используя теорему I Приложения, покажем, что оператор G является вполне непрерывным по определению вполне непрерывного оператора.

Рассмотрим $L_{2,b}$, $b > 0$, тогда из условия I) теоремы 2 в силу неравенства Коши-Буняковского получим

$$\|\psi\|^2_{L_{2,b}} \le \int_0^b \Big(\Big[\int_0^\infty |G(x,\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_0^\infty |\varphi(\xi)|^2 d\xi\Big]^{\frac{1}{2}}\Big)^2 dx \le$$

$$\le \int_0^b\int_0^\infty |G(x,\xi)|^2 d\xi\,dx \le \int_0^\infty\int_0^\infty |G(x,\xi)|^2 dx\,d\xi \le C^2,$$

т.е. множество K равномерно ограничено по норме $L_{2,b}$.

Из условия 2) следует, что для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall\, h$: $0 < h < \delta(\varepsilon)$ для $\forall\, \psi \in K$; используя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$\|\psi(x+h) - \psi(x)\|^2_{L_{2,b}} \le \int_0^b \Big[\Big(\int_0^\infty |G(x+h,\xi) - G(x,\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L_{2,\infty}}\Big]^2 dx \le$$

$$\le \int_0^b\int_0^\infty |G(x+h,\xi) - G(x,\xi)|^2 d\xi\,dx \le \varepsilon^2,$$

т.е. множество K равностепенно непрерывно в $L_{2,b}$.

Следовательно, из условий I) и 2) теоремы 2 в силу теоремы М.Рисса /4/ множество K относительно компактно в $L_{2,b}$.

В силу произвольности b это справедливо для $\forall\, L_{2,b}$.

Используя неравенство Коши-Буняковского, из условия 3) теоремы 2) получим, что для $\forall\, x > b_0$

$$|\psi(x)| \le \Big(\int_0^\infty |G(x,\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L_{2,\infty}} \le \frac{C_0}{x^\alpha}\ , \quad \alpha = \frac{1}{2} + \beta,\ \beta > 0,\ C_0 > 0$$

В результате, в силу теоремы 1 множество K является компактным в $L_{2,\infty}$. Следовательно, в силу линейности $G \in (L_{2,\infty} \to L_{2,\infty})$ – вполне непрерывный оператор.

Теорема доказана.

Литература

I. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М., Наука, 1965.

2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М., Мир, 1972.
3. Гареев Ф.А., Гончаров С.А., Жидков Е.П. и др. Численное решение задач на собственные значения для интегро-дифференциальных уравнений в теории ядра. – ЖВМ и МФ, 1977, т.17, № 2, с.407–409.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., Наука, 1984.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., Наука, 1972.
6. Жидков Е.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-87-261, Дубна, 1987.
7. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М., Мир, 1979.
8. Жидков Е.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-85-465, Дубна, 1985.
9. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. – М., Мир, 1982.
10. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М., Мир, 1983.
11. Жидков Е.П., Никонов Э.Г., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р11-85-970, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июня 1987 года.

Жидков Е.П., Никонов Э.Г., Хоромский Б.Н. Р11-87-375

Асимптотическое представление решений спектральной задачи для интегро-дифференциального оператора на полуоси

Получены условия разложимости погрешности приближенных решений в задаче на собственные значения для самосопряженного оператора по некоторому параметру аппроксимации. При численном решении спектральной задачи с интегральным оператором на полуоси такое разложение позволяет повысить точность приближенных решений на 1-2 порядка на основе экстраполяции по параметру аппроксимации.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P., Nikonov E.G., Khoromskij B.N. P11-87-375

Asymptotic Representation of Solution of Spectral Problem for Integro-Differential Operator on the Half-Axis

The decomposition conditions for the error of approximate solutions in eigenvalue problem for self-conjugated operator over some parameter of approximation are obtained. When the spectral problem for integral operator on the half-axis is solved numerically this decomposition makes it possible to increase the accuracy of approximate solutions by 1-2 orders by means of extrapolation over the parameter of approximation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987