

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Ю-163

P11-87-349

И.П.Юдин

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ
К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В УСКОРИТЕЛЕ-СИНХРОТРОНЕ

Направлено в Оргкомитет Всесоюзной
конференции "Новые подходы к решению
дифференциальных уравнений", г.Дрогобыч,
17-21 мая 1987 г.

1987

Моделирование поперечных колебаний отдельной заряженной частицы при прохождении её через магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ сводится^{/1/} к решению задачи Коши для системы двух нелинейных обыкновенных уравнений второго порядка

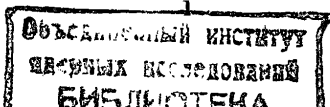
$$\begin{cases} x''_{ss} = \frac{A_s}{B\rho} \cdot [y'_s \cdot B_z(x, y, s) - (1+x_s'^2) \cdot B_y(x, y, s) + x'_s \cdot y'_s \cdot B_x(x, y, s)] \\ y''_{ss} = \frac{A_s}{B\rho} \cdot [x'_s \cdot B_z(x, y, s) - (1+y_s'^2) \cdot B_x(x, y, s) + x'_s \cdot y'_s \cdot B_y(x, y, s)] \end{cases} \quad (I)$$

с начальными условиями: $x(s_0) = x_0$, $y(s_0) = y_0$, $x'(s_0) = x'_0$, $y'(s_0) = y'_0$. В (I) $B\rho$ — магнитная жесткость частицы, $A_s = \sqrt{1+x_s'^2+y_s'^2}$, ось $\vec{z} = -\vec{z}$. Зная распределение магнитного поля $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ из эксперимента или из численных расчетов, систему (I) можно численно решить на ЭВМ, используя, например, известный алгоритм Рунге-Кутты^{/2-4/}. В этом случае, имея начальное фазовое множество $M_0 = \{x_0, x'_0, y_0, y'_0\}$, получим с помощью этого алгоритма конечное множество $M_K = \{x_K, x'_K, y_K, y'_K\}$. Программная реализация предполагает здесь проведение дискретизации множества M_0 . Таким образом, пучок заряженных частиц представляется в виде набора траекторий.

На рис. I приведена схема транспортировки частиц пучка через поворотный магнит, где α_1 — угол влета частицы, α_2 — угол вылета, l_M — эффективная длина магнита, h_s — сажитта.

Математическое моделирование многооборотного движения заряженных частиц с использованием численного интегрирования системы (I), как правило, приводит, с одной стороны, к быстрому накоплению ошибок расчета, а с другой стороны, требует много счетного времени на ЭВМ. Обычно при ускорении пучок в ускорителе-синхротроне проходит несколько сот тысяч оборотов.

В связи с этим возникает необходимость разработки таких численных алгоритмов в задачах транспортировки пучка заряженных частиц, которые бы удовлетворяли требованиям точности и минимальным затратам машинного времени.



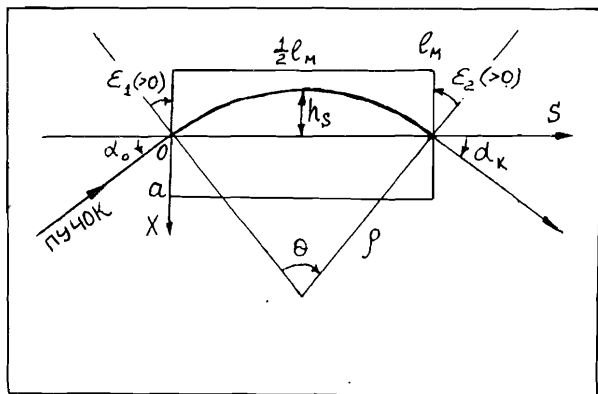


Рис. I. Схема прохождения частиц пучка через поворотный магнит.

Наиболее популярным алгоритмом учета неоднородностей в распределении магнитного поля при транспортировке пучка заряженных частиц является сегодня разложение в ряд Тейлора для вектора $\vec{V} \equiv \vec{V}(x, x', y, y', \delta)$ конечного фазового множества по начальным фазовым координатам \vec{V}_0 :

$$V_i(s_k) = \sum_j R_{ij} \cdot V_j(0) + \sum_{j,k} T_{ijk} \cdot V_j(0) \cdot V_k(0) + \sum_{j,k,l} C_{ijkl} \cdot V_j(0) \cdot V_k(0) \cdot V_l(0) + \dots \quad (2)$$

Здесь под δ может быть обозначены кроме величины отклонения частиц по импульсам $\delta = \Delta p/p$ и другие возможные переменные. Так, например, авторы работ /5-9/ используют $\vec{\delta} = \{e, \delta\}$, где e - продольное отклонение траектории рассматриваемой частицы от равновесной.

Коэффициенты в (2) при членах степени выше первой (T_{ijk} , C_{ijkl} , ...) называются абберрационными коэффициентами второго, третьего и т.д. порядка. Эти коэффициенты являются функциями от величины неоднородностей магнитного поля. Обычно эту зависимость находят с помощью

аналитических вычислений (при некоторых упрощающих предположениях) вручную, не привлекая ЭВМ, а затем уже полученные выражения программируют. Идеология этого метода для вычисления коэффициентов T_{ijk} с учетом разложения поля в степенной ряд по x до второго порядка включительно реализована в работах /5-9/.

В данной работе разрабатывается следующая схема /12/ учета неоднородностей в распределении магнитного поля при транспортировке пучка заряженных частиц.

1) Частицы из начального фазового множества M_0 с помощью численного интегрирования методом Рунге-Кутты системы дифференциальных уравнений движения (I) "транспортируются" через исследуемый магнитный элемент, поле которого может содержать и произвольные неоднородности. На этом этапе получим конечное фазовое множество

$$M_k = \{x_k, x'_k, y_k, y'_k\}.$$

2) Получив конечное фазовое множество M_k , проводим обработку результатов с целью получения аналитической зависимости конечных фазовых координат x_k, x'_k, y_k, y'_k от начальных фазовых координат x_0, x'_0, y_0, y'_0 и величины неоднородностей поля.

3) На третьем этапе полученные зависимости можно использовать при транспортировке пучка через подобные магнитные элементы и далее при рассмотрении многооборотного движения.

Предложенную схему проиллюстрируем на конкретном примере. Проиллюстрируем движение пучка протонов через поворотный магнит регулярной структуры ускорителя-синхротрона /10/. Как и в большинстве современных действующих и тем более проектируемых синхротронах, этот магнит имеет магнитную ось в виде прямой линии (см. рис. I), а не дуги окружности, как это принимается в различных упрощениях системы (I).

Используем представление распределения магнитного поля внутри апертуры магнита в виде Фурье-разложения /11, 12/:

$$\begin{cases} B_y(z, \theta) = B_1 \cdot \left[1 + \sum_{n=3,5,7,\dots} v_n \cdot \left(\frac{z}{z_0} \right)^{n-1} \cdot \cos(n-1)\theta \right], \\ B_x(z, \theta) = B_1 \cdot \sum_{n=3,5,7,\dots} v_n \cdot \left(\frac{z}{z_0} \right)^{n-1} \cdot \sin(n-1)\theta, \\ B_z = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где B_1 - основная, дипольная составляющая, характеризующая средний уровень поля ($B_1 = 2,2751$ Тл), v_n - относительные величины амплитуд высших гармоник поля, определенных на краю рабочей области: $z_0 = 2,5$ см. Заметим, что в (3) амплитуды Фурье-гармоник постоянны вдоль длины магнита (не зависят от s). Это широко используемое приближение /5-9/. На него ориентировано и проведение измерений /13/ магнитного поля в таком магните.

Подставляя выражения (3) в уравнения движения (I) и интегрируя их при различных значениях v_n и начального фазового множества $M_0 = \{x_0, x'_0, y_0, y'_0\}$; можно получить зависимости конечного фазового множества $M_K = \{x_K, x'_K, y_K, y'_K\}$ от величины v_n и x_0, x'_0, y_0, y'_0 . На рис. 2 приведен вид функции $f(x_0, x'_0 = \frac{\theta}{2}) \equiv f(x_0) = x_K^H - x_K^L$, полученный с помощью алгоритма Рунге-Кутты пятого порядка для случая, когда пучок параллелен и поле магнита содержит только 3-ю или 5-ю или 7-ю гармонику v_n (кроме основной B_1). Здесь x_K^H - конечная координата x_K для случая, когда все $v_n = 0$ (линейный случай: поле однородно, x_K^L определяется по формулам (4)), а x_K^H - конечная координата x_K при указанном в (3) неоднородном распределении поля, $\theta = 7,5^\circ$ - угол, на который магнит заворачивает пучок. Для однородного поля ($B_y \equiv B_1 = \text{const}$, $B_x = B_z = 0$) известны /14/ выражения для вычисления x_K^L и y_K^L :

$$\begin{pmatrix} x_K^A \\ x_K^A \\ 1 \end{pmatrix} = M^x \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_K^A \\ y_K^A \\ 1 \end{pmatrix} = M^y \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$M^x = \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta \cdot \text{tg} \varepsilon_1 & \rho \cdot \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ \frac{\text{tg} \varepsilon_2}{\rho} (\cos \theta + \sin \theta \cdot \text{tg} \varepsilon_1) - \frac{\sin \theta}{\rho} + \cos \theta \cdot \frac{\text{tg} \varepsilon_1}{\rho} & \text{tg} \varepsilon_2 \cdot \sin \theta + \cos \theta & \text{tg} \varepsilon_2 (1 - \cos \theta) + \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$M^y = \begin{pmatrix} 1 - \theta \cdot \text{tg} \varepsilon_1 & \rho \cdot \theta & 0 \\ -\frac{\text{tg} \varepsilon_2}{\rho} (1 - \theta \cdot \text{tg} \varepsilon_1) - \frac{\text{tg} \varepsilon_1}{\rho} & 1 - \theta \cdot \text{tg} \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нашего случая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\theta}{2}$.

Полученные на этапе интегрирования системы (I) результаты (см. рис. 2) были обработаны. На этом этапе предложена следующая аналитическая зависимость $f(x_0)$ для данных амплитуд высших гармоник поля v_n с помощью набора коэффициентов δ_n, A_n и $x_{c,n}$:

$$f(x_0) = \sum_{n=3,5,7,\dots} v_n \cdot \left[\delta_n + A_n \cdot (x_0 - x_{c,n})^{n-1} \right] \quad (6)$$

Сдвиг $x_{c,n} \approx 2/3$ сагитты $h_s = 0,706456$ см: $x_{c,3} = 0,471075$ см, $x_{c,5} = 0,426825$ см, $x_{c,7} = 0,407875$ см. Коэффициенты $\delta_3 = 2,0 \cdot 10^{-2}$ см, $\delta_5 = 2,7 \cdot 10^{-4}$ см, $\delta_7 = 4,1 \cdot 10^{-6}$ см, $A_3 = 0,4526$ см⁻¹, $A_5 = 0,08724$ см⁻³, $A_7 = 0,01752$ см⁻⁵.

Зависимость $\tilde{f}(x_0) = x_K^H - x_K^L$ аналогична (5) (см. рис. 3):

$$\tilde{f}(x_0) = \sum_{n=3,5,7,\dots} v_n \left[\tilde{\delta}_n + \tilde{A}_n \cdot (x_0 - \tilde{x}_{c,n})^{n-1} \right] \quad (7)$$

Таким же образом находятся зависимости и от x'_0, y_0, y'_0 .

Данное исследование проведено с помощью написанной автором фортран-программы MITRA, реализованной на ЭВМ CDC-6500 ОИЯИ. Интегрирование системы (I) проводилось методом типа Рунге-Кутты пятого порядка (подпрограмма RK5FIY) /12/ практически с машинной точностью (машинное слово ЭВМ CDC-6500 содержит 60 разрядов). В таб-

лице продемонстрированы на тестовом варианте возможности вычислительного метода. В качестве тестовых взяты функции $u_{таб.}$:

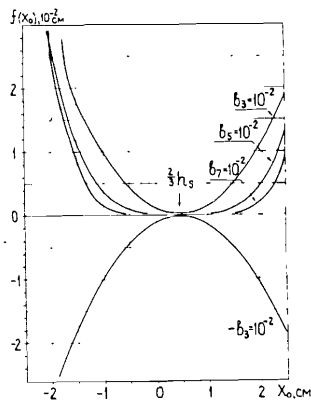


Рис.2. Вид функции $f(x_0)$ (нелинейное приращение x_R).

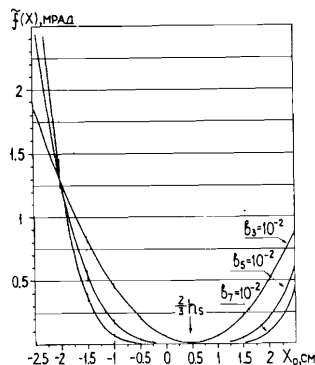


Рис.3. Вид функции $\tilde{f}(x_0)$ (нелинейное приращение x'_R).

Таблица

Зависимость от шага интегрирования h ошибки проводимых вычислений $\Delta u = |u_{инт.} - u_{таб.}|$ и времени t в секундах, затраченного центральным процессором при интегрировании системы дифференциальных уравнений для тестовых функций $u_1 = \sin x$ и $u_2 = \sin x + \cos x$ в интервале $0 \leq x \leq 4\pi$

$h, \text{рад.}$	$\Delta u = u_{инт.} - u_{таб.} $		$t, \text{с}$
	Δu_1 ($u_1 = \sin x$)	Δu_2 ($u_2 = \sin x + \cos x$)	
0,1	$< 10^{-6}$	$< 1,4 \cdot 10^{-6}$	1,6
0,01	$< 10^{-12}$	$< 1,4 \cdot 10^{-12}$	7,8
0,001	$< 10^{-16}$	$< 1,4 \cdot 10^{-16}$	69,1
0,0001	$< 10^{-21}$	$< 1,4 \cdot 10^{-21}$	679,9

$u_1 = \sin x$ и $u_2 = \sin x + \cos x$. Интегрирование системы дифференциальных уравнений для этих функций проводилась на протяжении двух периодов: от $x = 0$ до $x = 4\pi$. В таблице I приведены ошибка интегрирования $\Delta u = |u_{инт.} - u_{таб.}|$ и время t центрального процессора, затраченное на проведение интегрирования при различных шагах интегрирования h . Интегрирование уравнений для тестовых функций $u_{инт.}$, так же, как и вычисление $u_{таб.}$, проводилось с удвоенной точностью.

Сформулируем основные результаты, полученные в данной работе при разработке нового подхода [12] к решению дифференциальных уравнений движения заряженных частиц в ускорителе-синхротроне.

1. Показана высокая эффективность применения метода Рунге-Кутты при численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведена оценка точности метода.

2. Разработана программная реализация предложенного в [12] подхода к решению систем дифференциальных уравнений движения заряженных частиц в ускорителе-синхротроне (фортран-программа MITRA), с помощью которой проведено численное моделирование, транспортировки пучка протонов через существенно неоднородное магнитное поле поворотного магнита ускорителя-синхротрона.

3. Проведена оценка ряда абберрационных коэффициентов второго, четвертого и шестого порядка. Получен аналитический вид функций $f(x_0) = x_R^H - x_R^L$ и $\tilde{f}(x_0) = x'_R^H - x'_R^L$, позволяющий с ростом числа оборотов для данных величин неоднородностей b_n оценить при циклическом движении пучка в кольце ускорителя рост фазового объема (x, x', y, y') , потери интенсивности пучка, время жизни пучка и другие характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. М., "Мир", 1969.

2. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М., "Мир", 1977.
3. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М., "Мир", 1980.
4. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. (Редакторы Дж.Холл и Дж.Уатт). М., "Мир", 1979.
5. Brown K.L. A first - and second - order matrix theory for the design of beam transport systems and charged particle spectrometers. SLAC Report N 75.
or Advances Particle Phys. 1, 71-134 (1967)
6. Brown K.L., Carey D.C., Iselin Ch. and Rothacker F. TRANSPORT - a computer program for designing charged particle beam transport system. CERN 73-16, Geneva 1973.
7. Carey D.C. TURTLE - a computer program for simulating charged particle beam transport system. NAL - 64, Batavia, 1978.
8. Carey D.C. High energy charged particle optics computer programs. Fermilab - Conf. - 80/76, Batavia, 1980.
9. Iselin F.Ch. The MAD program (Methodical Accelerator Design). CERN - LEP - TH/85 - 15, Geneva, 1985.
10. Шелаев И.А. и др. ОИЯИ, Р9-83-582, Дубна, 1983.
11. Шелаев И.А., Юдин И.П. ОИЯИ, Р9-80-333, Дубна, 1980.
12. Юдин И.П. ОИЯИ, 9-85-153, Дубна, 1985.
13. Алфеев В.С. и др. В сб.: Труды VII Всесоюзного Совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 14-16 октября 1980 г., ОИЯИ, т.1, стр.360, Дубна, 1981.
14. Bovet C. et al. A selection of formulae and data useful for the design of A.G.Synchrotrons. CERN/MPS-SI/Int. DI/70/4.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 мая 1987 года.

Юдин И.П. P11-87-349
Об одном подходе к решению дифференциальных уравнений движения заряженных частиц в ускорителе-синхротроне

С помощью построенного алгоритма типа Рунге-Кутты пятого порядка получено с высокой точностью численное решение системы дифференциальных уравнений, описывающих поперечные /бетатронные/ колебания заряженных частиц при их прохождении через поворотный магнит, магнитное поле которого содержит, кроме дипольной составляющей, амплитуды третьей, пятой и седьмой фурье-гармоник. Предложена аналитическая зависимость полученного численного решения /конечные фазовые координаты x_K, x'_K, y_K, y'_K / от начальных фазовых координат и параметров магнитного поля. Разработана программная реализация предложенного подхода к решению дифференциальных уравнений движения заряженных частиц в ускорителе-синхротроне.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод автора

Yudin I.P. P11-87-349
On an Approach to Solving Charged Particle Motion
Differential Equations in Accelerator-Synchrotron

A numerical solution of a system of differential equations describing transverse (betatron) oscillations of charged particles when they pass through a bending magnet which magnetic field contains, besides the dipole component, the amplitude of 3th, 5th and 7th Fourier harmonics is obtained with a high accuracy by means of constructed the Runge-Kutta type algorithm of the 5th order. An analytical dependence of the obtained numerical solution (final phase coordinates x_K, x'_K, y_K, y'_K) upon the initial phase coordinates and magnetic field parameters is proposed. Program realization of the proposed method for solving differential equations of charged particle motion in the accelerator-synchrotron is developed.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987