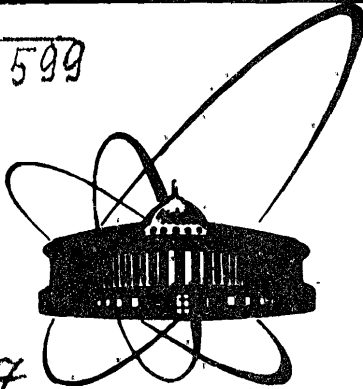


M 599



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-87-336

А.В.Микулич*, А.Б.Швачка, С.В.Шокол*

О ВЫЧИСЛЕНИИ
ЭФФЕКТИВНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ
КРУГОВОЙ ВОЛНОВОДНОЙ ЛИНЗЫ
ПО ДИСКРЕТНЫМ ДАННЫМ О ЛУЧАХ

* Университет дружбы народов им. П.Думумбы, Москва

1987

I. ВВЕДЕНИЕ

К интегральной оптике относят сформировавшееся к концу 60-х годов новое научно-техническое направление, в основе которого лежат электромагнитные явления, происходящие при распространении света в тонких слоях прозрачных материалов. Использование устройств интегральной оптики в современной механике связи и обработки сигналов позволяет значительно снизить габариты устройств по сравнению с объемными аналогами, исключить трудности юстировки и настройки оптической схемы, перейти к малым управляющим мощностям и, кроме того, реализовать эффекты, не имеющие аналогов в классической объемной оптике. Последнее возможно в оптических элементах с плавно изменяющимся эффективным показателем преломления, связанным с плавным изменением толщины пленок, реализующих волноводные элементы.

Одним из распространенных методов изготовления интегрально-оптических элементов является метод вакуумного напыления. Математическая модель нанесения пленок методом катодного распыления с использованием теневого эффекта, предложенная в работе /1/, связывает между собой три величины: функцию источника напыляемого вещества, функцию экранирующей маски и результирующую функцию напыленного слоя.

Практический интерес представляет задача выбора параметров экранирующей маски, необходимой для изготовления слоя с заданным распределением эффективного показателя преломления. При этом параметры источника напыляемого вещества могут быть найдены по результатам предварительных напылений с известной маской. Одним из важнейших элементов интегральной оптики является волноводная линза Лленберга /2,3/, обеспечивающая безаберрационную (в приближении геометрической оптики) фокусировку параллельного пучка световых лучей. В работе /4/ описан способ обработки результатов напыления волноводных линз, который состоит в следующем. Через участок волноводного слоя с переменной толщиной пропускается серия световых лучей. По их траекториям (рис. 1) восстанавливается распределение эффективного показателя преломления в плоскости волновода и делается заключение о его близости к идеальному. Эти данные могут быть использованы для корректировки параметров эк-

ранирующей маски, необходимой для напыления волноводной линзы с заданными параметрами. Формулировка модели и краткое описание алгоритма восстановления эффективного показателя преломления по следам лучей даны в /4/. В данной работе подробно излагается алгоритм восстановления эффективного показателя преломления по результатам данных эксперимента, в качестве которых берутся оцифрованные следы лучей с фотографии типа изображенной на рис. 1, и приводятся результаты восстановления для одной из линз.

2. ОЦИФРОВКА СЛЕДОВ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ

Оцифровка следов световых лучей, проходящих через экспериментальный образец пленки переменной толщины, проводилась с негатива фотографии с помощью измерительного микроскопа МИР-12.

Экспозиция с изображением нескольких лучей на одном негативе получена следующим образом: узкий пучок света, сгенерированный лазером, впускался в волновод и кратковременно экспонировался. Затем с помощью плоскопараллельной пластины пучок смещался и его прохождение через волновод вновь экспонировалось и т.д. Поэтому на входе в волноводную пленку (на рис. 1 - слева) все лучи почти параллельны. При прохождении через область неоднородности, где толщина пленки и, соответственно, эффективный показатель преломления меняются, следы отклоняются к оси симметрии линзы, проходящей через ее центр параллельно направлению лучей на входе. Взяв крайнюю левую точку первого снизу следа за начало отсчета, направление оси x -совпадающим с направлением следов на входе, а оси y - перпендикулярно оси x и вверх, оказалось возможным получить координаты точек на десяти лучах почти по всей длине следов в поле негатива, кроме зоны их пересечения. Координаты точек на оцифрованных следах сведены в таблицу I.

Таким образом, исходными данными для вычисления эффективного показателя преломления (ЭП) круговой волноводной линзы являются:

K - число оцифрованных следов лучей, проходящих через линзу;

N_j - числа оцифрованных точек на следах l_1, l_2, \dots, l_K ;

N_j^-, N_j^+ - номера точек каждого следа l_j , такие, что точки с номерами $1, \dots, N_j^-$ и N_j^+, \dots, N_j лежат вне области неоднородности линзы;

таблица $\{(x_j^n, y_j^n), n=1, \dots, N_j; j=1, \dots, K\}$ замеренных декартовых

Таблица I

Экспериментальные данные задачи восстановления эффективного показателя преломления круговой волноводной линзы.

Координаты точек приведены в табличных единицах: по оси x в I см - 6,25 табл. ед., по оси y в I см - 100 табл. ед., $R_2 = 7,5$ см.

Для всех десяти следов $N_j = 29$ и $x_1^n = x_2^n = \dots = x_{10}^n = x^n$

x^n	y_1^n	y_2^n	y_3^n	y_4^n	y_5^n	y_6^n	y_7^n	y_8^n	y_9^n	y_{10}^n
27,0	0,0	15,0	26,5	36,0	41,0	51,5	70,5	81,0	88,0	98,0
27,5	0,0	15,0	26,5	36,0	41,0	51,5	70,5	81,0	88,0	98,0
28,0	0,0	15,0	26,5	36,0	41,0	51,5	70,6	81,0	88,0	98,0
28,5	0,0	15,0	26,5	36,0	41,0	51,5	70,5	81,0	88,0	98,0
29,0	0,0	15,0	26,5	35,5	41,0	51,0	71,0	81,0	87,0	98,0
29,5	0,0	15,0	26,5	36,0	41,0	51,0	70,0	81,0	87,0	98,0
30,0	0,0	15,0	27,0	36,0	41,0	51,0	70,0	80,0	87,0	98,0
30,5	0,0	15,0	27,0	36,0	41,0	51,0	69,0	79,0	86,0	97,5
31,0	0,0	16,0	27,5	36,0	41,0	51,0	69,0	79,0	86,0	97,0
31,5	1,0	16,0	28,0	36,0	41,0	50,0	68,0	78,0	85,0	96,0
32,0	2,0	17,0	28,0	37,0	42,0	50,0	68,0	78,0	84,0	95,0
32,5	3,0	18,0	28,0	37,0	43,0	50,0	68,0	77,0	83,0	94,0
33,0	4,0	18,5	29,0	37,5	42,5	50,0	67,0	76,5	83,0	93,0
33,5	5,0	20,0	30,0	37,5	42,0	50,0	67,0	76,0	82,0	92,0
34,0	7,0	20,0	30,0	38,0	42,0	50,0	66,0	75,0	81,0	91,0
34,5	8,0	22,0	30,0	38,0	42,0	50,0	66,0	75,0	80,0	89,0
35,0	9,0	21,0	30,0	38,0	41,0	50,0	65,5	74,0	79,0	88,0
35,5	11,0	23,0	32,0	38,0	42,0	50,0	64,5	73,0	78,0	87,0
36,0	13,0	23,0	32,0	38,0	42,0	50,0	64,0	72,5	77,0	85,0
36,5	15,0	24,5	32,5	38,5	41,0	50,0	64,0	71,0	76,0	83,0
37,0	18,0	27,0	33,0	39,0	41,0	50,0	63,5	70,5	75,0	82,0
37,5	20,0	27,0	34,0	39,0	42,0	50,0	63,0	69,0	73,5	79,0
38,0	23,0	29,0	35,0	40,0	43,0	50,0	63,0	68,5	72,0	78,0
38,5	26,5	30,5	35,5	40,5	43,0	50,0	61,5	67,0	70,0	74,5
49,0	89,0	67,5	59,5	55,0	52,0	49,5	48,5	44,0	40,0	30,0
49,5	92,0	69,5	60,5	56,0	52,0	49,5	47,5	42,2	38,0	28,0
50,0	95,5	71,0	61,0	56,0	54,0	49,5	46,5	42,0	37,0	26,0
50,5	97,0	72,5	62,0	57,5	55,0	49,5	46,0	41,0	36,0	24,5
51,0	98,5	78,0	62,5	57,0	55,0	50,0	45,5	40,5	35,0	23,0

$\delta_x = 0,03$ см, $\delta_y = 0,003$ см.

координат точек P_j^n на следах лучей, где $P_j^1, P_j^2, \dots, P_j^{N_j}$ - точки, представляющие след l_j ;

δ_x, δ_y - оценки точности измерения координат x_j^n и y_j^n ;

R_0 - значение эффективного радиуса, т.е. приближенное значение радиуса неоднородности линзы, получаемое как значение радиуса отверстия, через которое производилось напыление, в нижней его части.

Об этих данных нам известно, что:

- 1) декартова система, в которой произведены измерения координат точек на следах, не связана с центром симметрии круговой линзы;
- 2) на каждом следе l_j точки $P_j^1, P_j^2, \dots, P_j^{N_j}$ упорядочены вдоль следа в том смысле, что если $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq N_j$, то точка $P_j^{n_2}$ лежит на следе l_j между точками $P_j^{n_1}$ и $P_j^{n_3}$;
- 3) на входе в волноводный слой все следы почти параллельны и нумерация вдоль следа начата с почти параллельных участков;
- 4) все следы проходят через область неоднородности линзы;
- 5) по крайней мере три первые и три последние точки каждого следа лежат вне области неоднородности, т.е. там, где толщина пленки становится постоянной, а лучи - прямыми;
- 6) на каждом следе оцифровано не менее девяти точек: $N_j \geq 9$.

Предлагаемый алгоритм был кратко изложен в /4/. Здесь приводится его подробное описание с учетом тех особенностей, которые превнесены экспериментальными данными.

По следам лучей искомое распределение $n(\vec{r})$ ЭПШ в плоскости волновода может быть восстановлено лишь с точностью до постоянного положительного множителя n_0 , равного значению ЭПШ волновода в точках плоскости вне области неоднородности /4/. Естественно искать приведенный ЭПШ $n_r(\vec{r}), n_r(\vec{r}) = n(\vec{r})/n_0$. Так как напыление проводится через отверстие, обладающее круговой симметрией, то с высокой степенью достоверности можно предполагать напыленный слой обладающим круговой симметрией. Тогда определение функции распределения ЭПШ $n_r(\vec{r})$ эквивалентно определению центра симметрии линзы и функции профиля $g_1(r)$ приведенного ЭПШ (ФПЭПШ), ибо $n_r(\vec{r}) = g_1(r)$, где r - расстояние от точки \vec{r} до центра O . Поэтому восстановление $n_r(\vec{r})$ может быть проведено в два этапа:

- 1) нахождение центра симметрии O ;
- 2) вычисление ФПЭПШ $g_1(r)$.

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИВЕДЕННОГО ЭФФЕКТИВНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПО ДИСКРЕТНЫМ ДАННЫМ О СЛЕДАХ ЛУЧЕЙ

Этап I. Вычисление по экспериментальным данным координат

x_c, y_c центра симметрии O круговой линзы

3.1. Аппроксимация прямолинейных участков l_j^- и l_j^+ на концах следов

Точки $P_j^1, P_j^2, \dots, P_j^{N_j^-}$ представляют начало l_j^- следа l_j , а точки $P_j^{N_j^+}, P_j^{N_j^++1}, \dots, P_j^{N_j^+}$ - конечный участок l_j^+ . Для параметрического представления прямых s_j^-, s_j^+ , аппроксимирующих l_j^-, l_j^+ , находим точки $\mathcal{D}_j^-(x_j^-, y_j^-)$ и $\mathcal{D}_j^+(x_j^+, y_j^+)$, через которые они проходят, вычисляя их координаты по формулам

$$x_j^- = \frac{1}{N_j^-} \sum_{n=1}^{N_j^-} x_j^n; \quad x_j^+ = \frac{1}{N_j^+ - N_j^+ + 1} \sum_{n=N_j^+}^{N_j^+} x_j^n; \quad (1)$$

$$y_j^- = \frac{1}{N_j^-} \sum_{n=1}^{N_j^-} y_j^n; \quad y_j^+ = \frac{1}{N_j^+ - N_j^+ + 1} \sum_{n=N_j^+}^{N_j^+} y_j^n;$$

а направляющие векторы \vec{v}_j^-, \vec{v}_j^+ прямых s_j^-, s_j^+ - по формулам

$$\vec{u}_j^- = \sum_{1 \leq n < n' \leq N_j^-} \overrightarrow{P_j^n P_j^{n'}}; \quad \vec{v}_j^- = \vec{u}_j^- / \|\vec{u}_j^-\|,$$

$$\vec{u}_j^+ = \sum_{N_j^+ \leq n < n' \leq N_j^+} \overrightarrow{P_j^n P_j^{n'}}; \quad \vec{v}_j^+ = \vec{u}_j^+ / \|\vec{u}_j^+\|. \quad (2)$$

Перенумеруем следы в порядке возрастания y_j^- так, чтобы для $j < j'$ выполнялось $y_j^- < y_{j'}^-$.

3.2. Оценка уровня среднеквадратичной ошибки исходных данных

Точности $\delta_x, \delta_y, \delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$ измерения координат отражают верхнюю границу ошибок в каждой точке. Среднеквадратичная ошибка δ^* обычно ниже. Оценим величину δ^* по среднеквадратичной ошибке аппроксимации прямыми s_j^- и s_j^+ точек, представляющих l_j^- и l_j^+ . Такая операция возможна, так как прямые s_j^-, s_j^+ строились каждая

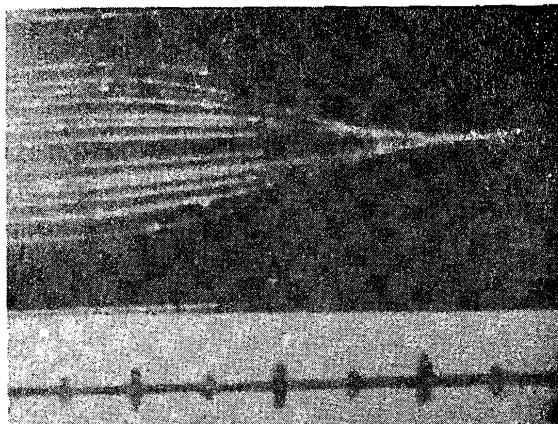


Рис. 1. Фотография планарной линзы со следами лучей. Цена деления на шкале равна 5 мм, что составляет $2/3 R_3$, где R_3 - эффективный радиус линзы.

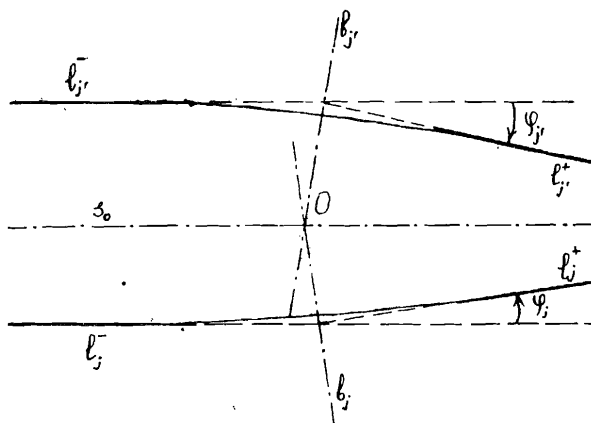


Рис. 2. Схематичное изображение центра линзы O как точки пересечения продольной оси линзы z_0 и осей симметрии b_j, b'_j искривленных следов l_j^-, l_j^+ . φ_j^-, φ_j^+ - углы отклонения следов l_j^-, l_j^+ : $\varphi_j^- > 0, \varphi_j^+ < 0$.

по нескольким точкам: $N_j^- \geq 3$ и $N_j^+ - N_j^- \geq 3$. Вычислим для каждого следа

$$\tilde{\delta}_j^2 = \frac{1}{N_j^-} \sum_{n=1}^{N_j^-} |s_j^- P_j^n|^2 + \frac{1}{N_j^+ - N_j^-} \sum_{n=N_j^-+1}^{N_j^+} |s_j^+ P_j^n|^2, \quad (3)$$

где $|s_j P_j^n|$ - расстояние от точки P_j^n до прямой s_j , и примем в качестве оценки среднеквадратичного шума в исходных данных величину

$$\tilde{\delta} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \tilde{\delta}_j^2}. \quad (4)$$

3.3. Построение приближенной оси симметрии линзы

Вспользуемся априорной информацией о том, что на входе все лучи почти параллельны, для построения приближенной оси симметрии линзы, проходящей в направлении лучей на входе. Найдем сначала углы отклонения φ_j всех следов (см. рис. 2). Обозначим через (\vec{u}, \vec{v}) скалярное произведение векторов \vec{u} и \vec{v} ; а через \vec{v}^\perp - вектор с координатами $(-\vec{v}_y, \vec{v}_x)$, получаемый из вектора $\vec{v} = (\vec{v}_x, \vec{v}_y)$ поворотом на 90 градусов против часовой стрелки. Тогда угол отклонения следа l_j при прохождении следа через область неоднородности приближенно будет равен углу между векторами \vec{v}_j^- и $\vec{v}_j^{+\perp}$ и с учетом знака дается формулой

$$\varphi_j = \text{arctg} \left(\frac{((\vec{v}_j^-)^\perp, \vec{v}_j^+)}{(\vec{v}_j^-, \vec{v}_j^+)} \right). \quad (5)$$

Найдем последний след из отклоняющихся вверх и первый из отклоняющихся вниз. Точнее, пусть

$$j_0 = \max \{j: \varphi_j \geq 0 \text{ и } \varphi_{j'} > 0 \text{ для } j' < j\}, \quad (6)$$

$$j_0 = \min \{j: \varphi_j \leq 0 \text{ и } \varphi_{j'} < 0 \text{ для } j' > j\}.$$

Определим приближенную ось симметрии как прямую s_0 , проходящую через точку $D_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{v}_0 = (\vec{v}_x, \vec{v}_y)$, компоненты и координаты которых вычислены по формулам

$$x_0 = \beta_D (x_{j_0}^- + x_{j_0}^+) + \beta_0 (x_{j_0}^- + x_{j_0}^+),$$

$$y_0 = \beta_D (y_{j_0}^- + y_{j_0}^+) + \beta_0 (y_{j_0}^- + y_{j_0}^+),$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \beta_2 (\bar{x}_{j_D}^- + \bar{x}_{j_D}^+) + \beta_U (\bar{x}_{j_U}^- + \bar{x}_{j_U}^+), \\ \bar{y}_0 &= \beta_2 (\bar{y}_{j_D}^- + \bar{y}_{j_D}^+) + \beta_U (\bar{y}_{j_U}^- + \bar{y}_{j_U}^+), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\beta_D = 0,5, \beta_U = 0,5, \text{ если } \varphi_{j_D} = -\varphi_{j_U}, \text{ и}$$

$$\beta_2 = \frac{-\sin \varphi_{j_U}}{\sin \varphi_{j_D} - \sin \varphi_{j_U}}, \beta_U = \frac{\sin \varphi_{j_D}}{\sin \varphi_{j_D} - \sin \varphi_{j_U}} \text{ в противном случае. (8)}$$

Правило выбора (8) подходит, в частности, для случаев, когда один из углов φ_{j_U} или φ_{j_D} равен нулю, а также когда они равны нулю одновременно, что не исключено из-за шума в данных и ошибок округления.

3.4. Вычисление координат центра как минимума функционала

Построим квадратичный функционал, точка (x_c, y_c) минимума которого будет давать приближенное положение центра линзы.

Теоретически каждый искривленный след ℓ_j , проходящий через область неоднородности круговой линзы, имеет свою ось симметрии ℓ_j^* , проходящую через точку следа, ближайшую к центру линзы, и центр линзы /4/. Прямая ℓ_j^* является биссектрисой угла, образованного прямолинейными асимптотиками ℓ_j^-, ℓ_j^+ следа и содержащего центр O . Приближения ℓ_j^-, ℓ_j^+ прямолинейных участков ℓ_j^-, ℓ_j^+ найдены по (1), (2), поэтому уравнение

$$-\bar{y}_j^-(x_j^- - x) + \bar{y}_j^-(y_j^- - y) + \bar{y}_j^+(x_j^+ - x) - \bar{y}_j^+(y_j^+ - y) = 0 \quad (9)$$

задает приближение к оси симметрии искривленного следа ℓ_j . По-другому уравнение (9) можно интерпретировать как условие равенства прицельных расстояний относительно точки (x, y) следа ℓ_j , если вычислять прицельное расстояние по начальному ℓ_j^- и конечному ℓ_j^+ участкам. Уравнение (9) тем точнее описывает ℓ_j , чем ближе угол отклонения к прямому. Приближения к осям симметрии искривленных следов уже не обязаны пересекаться в центре линзы, они проходят около него. Функционал $B(x, y) =$

$$= \sum_{j \in J} |\sin \varphi_j| \cdot |\bar{y}_j^+(x_j^+ - x) - \bar{y}_j^+(y_j^+ - y) - \bar{y}_j^-(x_j^- - x) + \bar{y}_j^-(y_j^- - y)|^2 \quad (10)$$

где $J = \{1, 2, \dots, j_D - 1; j_U + 1, j_U + 2, \dots, k\}$ обозначает множество номеров искривленных следов, является мерой близости точ-

ки (x, y) к осям симметрии искривленных следов с учетом доверия к приближениям каждой из осей. Добавляя условие близости искомого центра к приближенной оси симметрии линзы \mathcal{L}_0 , построенной по слабо искривленным следам ℓ_D и ℓ_U , получим функционал

$$\Phi(x, y) = B(x, y) + |\bar{y}_0^x(x_0 - x) - \bar{y}_0^y(y_0 - y)|^2 \quad (11)$$

точку минимума которого можно считать приближенным центром линзы. Величина

$$\delta_c^v = \sqrt{\Phi(x_c, y_c) / \left(1 + \sum_{j \in J} |\sin \varphi_j|\right)} \quad (12)$$

дает оценку ошибки в определении координат x_c, y_c центра линзы, найденных таким способом.

Координаты точки (x_c, y_c) минимума функционала (11) находятся из уравнения Эйлера этого функционала:

$$\begin{cases} a_{11} x_c + a_{12} y_c = b_1, \\ a_{21} x_c + a_{22} y_c = b_2, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{j \in J} |\sin \varphi_j| \cdot |\bar{y}_j^- - \bar{y}_j^+|^2 + |\bar{y}_0^x|^2, \\ a_{12} = a_{21} &= \sum_{j \in J} |\sin \varphi_j| \cdot (\bar{y}_j^- - \bar{y}_j^+) (\bar{y}_j^+ - \bar{y}_j^-) - \bar{y}_0^x \bar{y}_0^y, \\ a_{22} &= \sum_{j \in J} |\sin \varphi_j| \cdot |\bar{y}_j^+ - \bar{y}_j^-|^2 + |\bar{y}_0^y|^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$b_1 = \sum_{j \in J} |\sin \varphi_j| \cdot (\bar{y}_j^- - \bar{y}_j^+) d_j + \bar{y}_0^x (\bar{y}_0^x x_0 - \bar{y}_0^y y_0),$$

$$b_2 = \sum_{j \in J} |\sin \varphi_j| \cdot (\bar{y}_j^+ - \bar{y}_j^-) d_j - \bar{y}_0^y (\bar{y}_0^x x_0 - \bar{y}_0^y y_0),$$

$$d_j = \bar{y}_j^- x_j^- - \bar{y}_j^- y_j^- - \bar{y}_j^+ x_j^+ + \bar{y}_j^+ y_j^+.$$

Надо отметить, что задача поиска координат x_0, y_0 точки пересечения осей симметрии ℓ_j искривленных следов $\ell_j, j \in J$, из условия минимума функционала (I0) оказалась численно неустойчивой. Это объясняется тем, что углы отклонения φ очень малы и известны с погрешностью. Поэтому прямые, определенные уравнением (9); пересекаются попарно под острыми углами, а координата y_0 точки минимума функционала (I0) сильно колеблется в зависимости от выбора конкретных номеров N_j^-, N_j^+ . Добавление при переходе от (I0) к (II) второго слагаемого, выражающего требование близости искомого центра к оси симметрии ξ_0 , является по существу регуляризацией задачи минимизации функционала (I0). Здесь мы использовали априорную информацию о почти параллельности лучей на входе и построили ξ_0 как границу следов, выпуклых вверх и выпуклых вниз.

Чтобы уменьшить произвол в выборе N_j^-, N_j^+ , используем дополнительную информацию о значении эффективного радиуса R_3 линзы. Увеличим максимально N_j^- и уменьшим N_j^+ каждого следа ℓ_j , но так, чтобы расстояние от точек следа ℓ_j с номерами $1, 2, \dots, N_j^-, N_j^+, N_j^{\pm+1}, \dots, N_j$ до найденного первого приближения к центру было не больше, чем $R_3 + \delta_c$. Уточнив таким образом значения N_j^-, N_j^+ , повторим все шаги этапа I и получим второе, более точное приближение центра, которое будем по-прежнему обозначать (x_c, y_c) .

Этап 2. Табулирование функции профиля $g_j(r)$ приведенного ЭПШ на выбранной сетке узлов $r_i = 0, r_2, \dots, r_m, r_i < r_{i+1}$, значений радиуса

Перенесем начало отсчета в найденный центр O линзы. Наряду с декартовой системой координат с началом в точке O и прежними направлениями осей будем рассматривать полярную систему координат с центром O и полярной осью, совпадающей с осью Ox .

Для вычисления функции профиля $g_j(r)$ необходимо перейти от дискретного представления каждого искривленного следа $\ell_j, j \in J$, в виде набора точек $P_j^1, P_j^2, \dots, P_j^{N_j}$ к его представлению в виде графика дифференцируемой функции: $y \in Y_j(x)$ в декартовой системе координат или $r \in R_j(\varphi)$ в полярной. Это необходимо, чтобы иметь возможность вычислять величины производной $v = \frac{dR}{dr}$ в тех точках следов ℓ_j , где расстояние r до центра равно r_c , и далее воспользоваться формулой (I4) из /4/:

$$g_j(r) = \frac{h_j \sqrt{1+v^2}}{r}, \quad (15)$$

для нахождения значений ФПЭПП. В (15) h_j обозначает прицельное расстояние следа ℓ_j . Значение h_j и оценку его точности δh_j найдем по формулам

$$h_j = \frac{1}{2} (|s_j^- O| + |s_j^+ O|), \quad \delta h_j = \frac{1}{2} (|s_j^- O| - |s_j^+ O|). \quad (16)$$

При известном представлении искривленного следа ℓ_j в виде графика дифференцируемой функции $y = Y_j(x)$ в декартовой системе координат значение v в точке следа $(x, Y_j(x))$ может быть получено по формуле

$$v = \frac{x + Y_j(x) \cdot Y_j'(x)}{-Y_j(x) + x \cdot Y_j'(x)}. \quad (17)$$

Итак, для восстановления функции профиля нам необходимо вычислять значения производных для функций, заданных набором приближенных значений на сетке, что является некорректной задачей /5/. Одним из условно корректных способов перехода от дискретного представления функции таблицей значений на сетке к представлению в виде дифференцируемой функции является построение сглаживающего кусочно-кубического сплайна дефекта I с выбором параметра сглаживания по невязке /6,7/. Будем аппроксимировать точки $P_j^1, P_j^2, \dots, P_j^{N_j}$ следа ℓ_j графиком сплайна с узлами $x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{N_j}, x_j^{N_j}$. Функционал квадрата невязки

$$U^2[Y_j] = \sum_{n=1}^{N_j} |Y_j(x_j^n) - y_j^n|^2 \quad (18)$$

является мерой отклонения сплайна $y = Y_j(x)$ от точек $(x_j^1, y_j^1), (x_j^2, y_j^2), \dots, (x_j^{N_j}, y_j^{N_j})$. Кусочно-кубический сплайн $y = Y_j(x)$, доставляющий сглаживающую аппроксимацию точкам следа ℓ_j , ищется из условия

$$U^2[Y_j] + \alpha \int_{x_j^1}^{x_j^{N_j}} |Y_j''(x)|^2 dx \rightarrow \min, \quad Y_j''(x_j^1) = Y_j''(x_j^{N_j}) = 0 \quad (19)$$

при
$$U[Y_j] = \delta^2. \quad (20)$$

Так как точность δ данных известна с невысокой точностью, порядка 10-20%, то достаточно выбирать параметр сглаживания α так, чтобы невязка U попадала в интервал $[0,9\delta; 1,1\delta]$ [7]. Второе слагаемое в (19) является мерой изгиба кривой $y = Y_j(x)$ и называется энергетическим функционалом в теории обобщенных сплайнов [6,7] или стабилизирующим функционалом в теории некорректных задач [5]. Построение сплайна, минимизирующего сглаживающий функционал (19) с выбором параметра сглаживания по уровню невязки, вместо построения интерполяционного сплайна означает отказ от проведения кривой $y = Y_j(x)$, представляющей след точно через точки P_j^1, \dots, P_j^N . Сглаживающий сплайн $y = Y_j^\alpha(x)$ проходит около точек следа. Он является наименее искривленным с точки зрения введенного энергетического функционала среди всех сплайнов, аппроксимирующих точки следа с точностью δ . В нашей задаче след должен быть прямым вне области неоднородности, $Y_j''(x)$ должна равняться нулю, если $x^2 + (Y_j(x))^2 > R_2^2$. Наибольшее искривление следа имеет место на границе области неоднородности, где велик градиент ЭП. Таким образом, использование сглаживающих сплайнов неизбежно ведет к частичному распрямлению изображений следов графиками в круге неоднородности по сравнению с реальными. Это цена, которую приходится платить за получение устойчивости в вычислении производных по дискретным данным.

Пусть $y = Y_j^\alpha(x)$ обозначает построенный сглаживающий сплайн, аппроксимирующий след l_j . Для узла табулирования $r_i = 0$ и, возможно, некоторых других малых значений радиуса, где необходимо затабулировать значения функции профиля $g_i(r)$ приведенного ЭП по (15), нет точек пересечения окружностей с центром в O и радиуса r_i с графиками $y = Y_j^\alpha(x), j \in J$, представляющими искривленные следы. Найдем эти узлы, для чего вычислим минимальные расстояния $r_{\min}(l_j)$ каждого искривленного следа $l_j, j \in J$, до центра

$$r_{\min}(l_j) = \min \{ \sqrt{x^2 + |Y_j^\alpha(x)|^2} : x_j^1 \leq x \leq x_j^N \} \quad (21)$$

и положим

$$r_* = \min \{ r_{\min}(l_j) : j \in J \}. \quad (22)$$

Для номеров узлов табулирования $i, i > i_*$, где $i_* = \max \{ i : r_i < r_* \}$,

имеется хотя бы один след $y = Y_j^\alpha(x)$ с минимальным расстоянием $r_{\min}(l_j)$ не превышающим r_i . В точках $(x_j^1, Y_j^\alpha(x_j^1)), (x_j^N, Y_j^\alpha(x_j^N))$ пересечения графиков $y = Y_j^\alpha(x)$ с окружностью $r = r_i$ вычислим r по (17) и $g_i(r_i)$ по (15). Среднее значение функции профиля по всем точкам пересечения окружности радиуса r_i с графиками функций $y = Y_j^\alpha(x)$, представляющими следы, возьмем в качестве искомого значения ФПЭП в узле r_i . Среднеквадратичное отклонение $\delta g_i(r_i)$ значений функции профиля от среднего, вычисленное по совокупности тех же точек пересечения, даст оценку точности заатабулированного значения функции профиля.

Когда функция профиля заатабулирована в узлах $r_i, i > i_*$, и известны оценки точности $\delta g_i(r_i), i > i_*$, найденных значений, перейдем к вычислению значений функции профиля в узлах r_1, \dots, r_{i_*} . При продолжении функции профиля в отрицательную область она должна быть четной в силу круговой симметрии линзы. Поэтому аппроксимируем функцию $g_i(r)$ в окрестности нуля полиномом от r^2 :

$$P_i(r) = a_0 + a_1 r^2 + a_2 (r^2)^2 + a_3 (r^2)^3. \quad (23)$$

Коэффициенты a_i найдем из условия минимума функционала

$$\sum_{i : r_i \leq 0,8R_2} \left| \frac{P_i(r_i) - g_i(r_i)}{\delta g_i(r_i)} \right|^2. \quad (24)$$

Использование для аппроксимации функции профиля около нуля только узлов $r_i \leq 0,8R_2$ объясняется тем, что обычно вершина напыленного слоя является плоской [3]. Попытка использовать более удаленные от нуля узлы функции профиля, где она быстро убывает, может сильно испортить аппроксимацию в окрестности нуля. Значения $g_i(r_i)$ в узлах r_1, \dots, r_{i_*} вычислим как значения полинома (23) с найденными методом наименьших квадратов коэффициентами. Аналогично по значениям $\delta g_i(r_i), i > i_*$, найдем оценки точности в узлах r_1, r_2, \dots, r_{i_*} .

4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Комплекс программ, реализующий алгоритм вычисления приведенного ЭП по дискретным данным о следах лучей, написан на фортране и имеет модульную структуру.

Предварительная обработка экспериментальных данных состоит в перемасштабировании: все координаты и оценки точностей переводятся в единицы эффективного радиуса.

Вычисления первого этапа - поиска координат x_c, y_c центра линзы - проводились по формулам, приведенным в тексте. Небольшие модификации были сделаны для снижения вероятности переполнения и катастрофической потери точности. В частности, внутри каждого шага использовалась двойная точность, а исходные данные и результаты каждого шага первого этапа хранились с одинарной точностью, т.е. вычисления проводились в режиме накопления.

На втором этапе основными операциями являются: 1) вычисление коэффициентов сплайна $Y_j^\alpha(x)$, доставляющего сглаживающую аппроксимацию точек $(x_j^i, y_j^i), \dots, (x_j^N, y_j^N)$ следа L_j с подбором параметра сглаживания α по уровню невязки δ^i , и 2) вычисление координат точек пересечения $(\tilde{x}_j^i, Y_j^\alpha(\tilde{x}_j^i)), (\tilde{x}_j^i, Y_j^\alpha(\tilde{x}_j^{i+}))$ окружности радиуса r_i с центром в O с графиками построенных сплайнов. Попытка использовать стандартные подпрограммы *SPLSG*, *VSPSG* /8/ из минского пакета прикладных программ натолкнулась на две трудности. Во-первых, при их использовании время счета оказалось неожиданно большим. Дело в том, что подпрограмма

SPLSG вычисляет коэффициенты сплайна при фиксированном значении параметра сглаживания, решая вспомогательную систему линейных алгебраических уравнений с ленточной симметричной матрицей итеративным методом. Так как поиск подходящего параметра сглаживания также является итеративным, это приводило к неоправданным затратам машинного времени. Была написана подпрограмма вычисления коэффициентов сглаживающего сплайна при фиксированном значении α , в которой согласно /6/ вспомогательная система решается методом Холецкого, что резко сократило время вычисления коэффициентов сплайна, доставляющего сглаживающую аппроксимацию точкам следа с необходимым уровнем невязки. Когда коэффициенты сплайна найдены, необходимо многократно находить точки пересечения окружностей $r = r_i$ и графиков сплайнов $y = Y_j^\alpha(x)$, т.е. решать уравнения

$$(x)^2 + (Y_j^\alpha(x))^2 = r_i^2. \quad (25)$$

Для сокращения времени вычисления значений сплайна при решении уравнений (25) вместо подпрограммы *VSPSG* /8/ использовалась подпрограмма, в которой согласно идее работы /9/ между двумя последовательными обращениями сохраняется номер n интервала, где

находилось значение аргумента x . Так как координата x точки пересечения с графиком сплайна ищется итеративно, то после первого десятка итераций и левый, и правый конец интервала, содержащего искомый \tilde{x}_j^i , попадают между двумя соседними узлами сплайна. Тогда дальнейшее уточнение координаты x точки пересечения делается без поиска интервала $[x_j^n, x_j^{n+1}]$, содержащего текущие значения аргумента. За счет этого существенно экономится время поиска решения уравнения (25).

Другим, более существенным препятствием в использовании подпрограммы *SPLSG* является слабая зависимость невязки $U[Y_j^\alpha]$ от параметра сглаживания при вычислении коэффициентов сплайна с помощью *SPLSG*. Интервал значений параметра сглаживания, внутри которого $U[Y_j^\alpha]$ возрастает при возрастании α , очень узок. Добиться увеличения невязки $U[Y_j^\alpha]$ до нужного уровня δ^i путем увеличения значений α оказалось невозможным с помощью *SPLSG*. Максимальное отклонение сглаженных значений $Y_j^\alpha(x_j^n)$ сплайна в узлах x_j^n от экспериментальных значений y_j^n было менее 0,0002, т.е. сглаживания как такового не получалось. Разработанная нами подпрограмма свободна от этого недостатка. На тестовых примерах была подтверждена ее способность к сглаживанию: при малых значениях α сглаживающий сплайн проходил очень близко к точкам $(x_j^i, y_j^i), \dots, (x_j^N, y_j^N)$, а при больших значениях α сглаживающий сплайн приближался к прямой, удаляясь при этом от экспериментальных значений. Поэтому и вторая подпрограмма, которая осуществляла поиск подходящего значения параметра сглаживания по уровню невязки δ^i , также работала устойчиво и быстро.

Таким образом удалось добиться устойчивости вычислений и сократить время счета до 5 минут (на ЕС 1060).

Разработанный комплекс программ включает также модули визуализации исходных данных и результатов расчетов.

5. ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Описание способа оцифровки приведено выше. Результаты оцифровки сведены в таблице I, где приведены также оценки точности и значение эффективного радиуса R_3 . Точность оцифровки точек на следах составляет 3% R_3 . Она оказалась низкой в основном потому, что физические лучи - узкие лазерные пучки - по ширине составляли около 4% R_3 . Удалось оцифровать только 10 следов (хотя на

Таблица 2

Значения восстановленной функции профиля $g_1(r)$ приведенного эффективного показателя преломления и оценки ее точности

r	$g_1(r)$	$\delta g_1(r)$	r	$g_1(r)$	$\delta g_1(r)$
0,00	I,146	0,11	0,80	I,108	0,021
0,05	I,146	0,10	0,85	I,092	0,020
0,10	I,145	0,09	0,90	I,087	0,021
0,15	I,145	0,06	0,95	I,077	0,021
0,20	I,145	0,053	I,00	I,068	0,021
0,25	I,144	0,049	I,05	I,060	0,022
0,30	I,143	0,047	I,10	I,036	0,020
0,35	I,145	0,045	I,15	I,027	0,019
0,40	I,143	0,044	I,20	I,020	0,017
0,45	I,135	0,039	I,25	I,016	0,017
0,50	I,132	0,037	I,30	I,009	0,011
0,55	I,135	0,034	I,35	I,007	0,010
0,60	I,130	0,031	I,40	I,005	0,009
0,65	I,124	0,027	I,45	I,003	0,009
0,70	I,118	0,022	I,50	0,997	0,008
0,75	I,109	0,022			

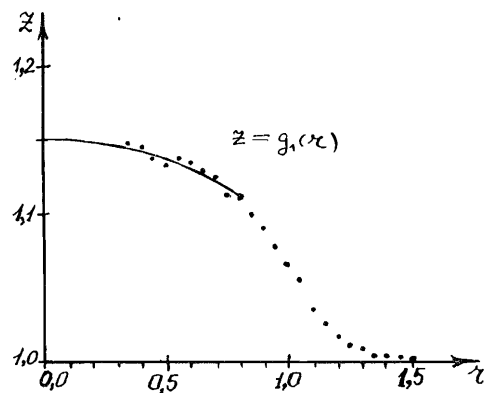


Рис. 3. График восстановленной функции профиля $g_1(r)$ приведенного эффективного показателя преломления. Точки обозначают значения, найденные по формуле (15), сплошная линия — график полинома, интерполирующего функцию $g_1(r)$ в окрестности нуля.

фотографии изображено больше — см. рис. 1), так как по ширине только 10 следов вошли в поле зрения использованного измерительного микроскопа. Тем не менее координаты центра были найдены с точностью $1,3\% R_2$, а функция профиля $g_1(r)$ приведенного ЭП была затабулирована с точностью 2% для значений радиуса $r > 0,6R_2$ (см. табл. 2). Для значений $r < 0,6R_2$ точность вычисления функции профиля оказалась существенно худшей: 5–10% (см. рис. 3).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первый опыт применения разработанного алгоритма и основанного на нем программного обеспечения для вычисления эффективного показателя преломления круговой волноводной линзы по экспериментальным данным подтвердил работоспособность предложенного метода. Хотя ошибка при оцифровке отдельных точек на следах лучей составляла 3% значения эффективного радиуса R_2 , а число оцифрованных следов было 10, с помощью обсуждаемого метода удалось найти центр линзы с точностью $1,3\% R_2$, а функцию профиля $g_1(r)$ ЭП удалось затабулировать с точностью 2% для значений радиуса, больших $0,6R_2$. Для значений радиуса, меньших $0,6R_2$, точность вычисления функции профиля ниже на полтора порядка. Однако aberrации линзы и, соответственно, ее рабочая апертура определяются в основном точностью изготовления периферийной части линзы [2,3].

Известные методы — профилоинтерферометрический и метод прямого профилометрирования — обеспечивают точность 1–3% в пересчете на значения ЭПЭП для центральной части линзы [10,11]. На периферийном участке указанные методы неприменимы. Предложенный нами способ позволяет с такой же точностью восстановить ЭП на периферии линзы, т.е. там, где традиционные методы не работают. Он может быть использован вместе с профилоинтерферометрическим методом для получения функции профиля при всех значениях радиуса путем сшивания участков функции профиля, полученных двумя методами.

Слабым местом в использовании метода является низкая точность исходных данных, полученных путем оцифровки следов лучей с изображения на негативе с помощью микроскопа МИР-12. Применение средств электроники повысит точность оцифровки на полтора–два порядка. В той же степени, в свою очередь, повысится точность восстановления функции профиля для периферийной части лин-

зы. В центральной части точность станет не хуже точностей, даваемых другими методами.

Необходимо также отметить, что способ одинаково пригоден как для линз, полученных напылением, для которых он и разрабатывался, так и для геодезических линз, в которых фокусировка достигается за счет искривления поверхности, вдоль которой распространяется световая волна.

Описанный метод при его дальнейшей модернизации может быть использован в качестве средства оперативного неразрушающего контроля в процессе изготовления волноводных линз.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В.И.Аникину, В.В.Курышкину и Л.А.Севастьянову за плодотворные дискуссии и помощь в процессе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аникин В.И., Дерюгин Л.Н., Курышкин В.В., Севастьянов Л.А. Математические задачи, связанные с процессом напыления. ВИНТИ, М., 1982, № 5175-82.
2. Southwell W.H. J. Opt. Soc. Am., 1977, v.67, p.1004-1009.
3. Аникин В.И., Шокол С.В. Фокусирующие элементы интегральной оптики. Зарубежная радиоэлектроника, 1984, № 5, с. 67-77.
4. Курышкин В.В., Микулич А.В., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р5-86-665, Дубна, 1986.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1986.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. "Наука", М., 1977.
7. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. "Наука", Новосибирск, 1983.
8. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Выпуск 22. Минск, Наука и техника, 1980.
9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. "Мир", М., 1980.
10. Пуряев Д.Т. Методы контроля оптических асферических поверхностей. "Машиностроение", М., 1976.
11. Bryan D.A., Chubb C.R., Powers J.K., Tomaschke H.E., Reed W.R., Dalke E.A. SPIE, v.321, Integrated Optics 11, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 мая 1987 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р.00 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р.55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р.00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р.50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р.30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р.50 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р.50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р.75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р.80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р.75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р.50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. /2 тома/	13 р.50 к.
Д1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. /2 тома/	7 р.35 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.