сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-87-261

Е.П.Жидков, А.В.Сидоров, Н.Б.Скачков,
Б.Н.Хоромский

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ВХОЖДЕНИЕМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

1987

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы представим результаты численного решения релятивистских квазипотенциальных уравнений [1], описывающих связанную систему двух частиц в импульсном пространстве.

Как показано в работах [2,3], в случае взаимодействия двух скалярных частиц квазипотенциальное уравнение в импульсном пространстве имеет вид интегрального уравнения, содержащего нелинейную зависимость от собственного числа - массы системы М:

$$G^{-1}(\vec{p}, M_n)\Psi_n(\vec{p}) = (2\pi)^{-3}\int V(M_n, \vec{p}, \vec{k})\Psi_n(\vec{k})\,d\Omega_{\vec{k}} . \qquad /B1/$$

Здесь G - свободная функция Грина, $d\Omega = \dfrac{d\vec{k}}{\sqrt{m^2 + k^2}}$ - элемент объема в импульсном пространстве, а V - ядро уравнения, квазипотенциал для двух скалярных частиц массы М. В том варианте квазипотенциального подхода, который был развит на основе шпурионной диаграммной техники в [2], это ядро имеет вид:

$$V(M_n, \vec{p}, \vec{k}) = -\frac{g^2 m^3}{(2\pi)^3}[W_{p,k}(p_0 + k_0 + W_{p,k} - M_n]^{-1},$$
$$W_{p,k} = \sqrt{(\bar{p} - \bar{k})^2 + \mu^2}, \quad p_0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}, \qquad /B2/$$

где μ - масса частицы, переносящей взаимодействие.

Присутствие величин p_0 и k_0 делает квазипотенциал /B2/ нелокальным, т.е. зависящим по отдельности от $|\vec{p}|$ и $|\vec{k}|$, а не от разности $\vec{p} - \vec{k}$. Отметим, что выражение /B2/ является составной частью потенциалов, возникающих в одновременной релятивистской формулировке задачи двух тел [3].

При рассмотрении уравнения /B1/ мы ограничимся случаем нулевого орбитального квантового числа. Представляя волновую функцию в виде

$$\Psi_{e=0}(\vec{p}) = (4\pi)^{-1/2}\,\Phi(p)p^{-1} \qquad /B3/$$

и интегрируя в /B1/ по угловым переменным, получаем для $\Phi(p)$ одномерное интегральное уравнение:

$$\epsilon(p)(p_0 - \lambda)\Phi(p) = \frac{-\beta}{4\pi} \int_0^\infty V(p,k,\lambda,\mu)\Phi(k)dk, \qquad /B4/$$

где

$$V(p,k,\lambda,\mu) = \ln / \frac{p_0 + k_0 - M + [\mu^2 + (p-k)^2]^{1/2}}{p_0 + k_0 - M + [\mu^2 + (p+k)^2]^{1/2}} /, \qquad /B5/$$

$$M = 2\lambda = 2m + E_{св}, \quad m = 1.$$

Далее мы будем рассматривать два варианта функции $\epsilon(p)$. Первый:

$$\epsilon_1(p) = \sqrt{1 + p^2}, \qquad /B6/$$

соответствует уравнению, полученному в [2] на основе шпурионной диаграммной техники, а второй:

$$\epsilon_2(p) = 1 + p^2, \qquad /B7/$$

приводит левую часть уравнения /B4/ к виду, полученному в [3].

Нами будет изучено поведение собственных функций связанной системы, зависимость энергии связи от массы промежуточного бозона μ, найдены критические значения массы μ, при которых в системе появляется первое связанное состояние.

1. МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Определение массы и волновой функции связанных состояний сводится к следующей математической задаче. При фиксированных параметрах β и μ, а также заданной функции $\epsilon(p)$ рассмотрим спектральную задачу для произвольного вещественного значения λ

$$\epsilon(p)(p_0 - E)\Psi(p) + \frac{\beta}{4\pi}\int_0^\infty G(p,k,\lambda,\mu)\Psi(k)dk = 0, \qquad /1.1/$$

$$0 \le \mu \le \mu_0, \quad \beta > 0,$$

где $E = E(\lambda)$ - спектральный параметр, а $\Psi(k)$ - соответствующая собственная функция, для которой выполнено $\Psi(0) = 0$. Пусть $E_1(\lambda)$ - минимальное собственное число уравнения /1.1/. Задача состоит в нахождении такого значения λ^* и соответствующей ему волновой функции $\Psi^*(p)$, для которых

$$\lambda^* = E_1(\lambda^*). \qquad /1.2/$$

Учитывая сложную зависимость $E_1(\lambda)$, решение нелинейного уравнения /1.2/ можно произвести лишь численно. Вычисление значений функции $E_1(\lambda)$ осуществляется при помощи экономичных алгоритмов решения спектральных задач вида /1.1/, развитых в [4-6].

В работе проведен анализ зависимости величин $\lambda^* = \lambda^*(\beta,\mu)$ и $\Psi^*(k,\beta,\mu)$ от параметров $\beta > 0$ и $0 \le \mu \le 4$.

При фиксированном $\mu \ge 0$ можно определить такое значение β, при котором выполняется равенство $\lambda^*(\beta,\mu) = \lambda_0$ для всякого фиксированного значения $0 \le \lambda_0 \le 1$, причем значение $\lambda_0 = 1$ достигается для другой асимптотики волновой функции при $p \to 0$ /см. Приложение/.

$$\Psi(p) = \frac{a}{p} + O(1), \quad p \to 0. \qquad /1.3/$$

Одним из возможных способов решения уравнения /1.2/ является метод простых итераций

$$\lambda_{n+1} = (1 - w)\lambda_n + wE_1(\lambda_n), \quad 0 < w \le 1, \qquad /1.4/$$

($1 > \lambda_0$ - задано), поскольку функция $E_1(\lambda)$ для задачи /1.1/ в физически интересной области изменения μ и β определяет сжимающий оператор в силу $0 \le E_1(\lambda) \le 1$. Однако предельный случай $E_1(\lambda) \to 1$ также представляет интерес, поэтому процесс /1.4/ не может быть эффективным во всей исследуемой области изменения μ и β. Поскольку прямое вычисление производной $E_1'(\lambda)$ весьма затруднительно, в работе использован двухшаговый метод секущих, являющийся аналогом метода Ньютона, в котором производная $E_1'(\lambda)^{-1}$ заменяется разностным значением. Пусть λ_0 - начальное приближение. Полагаем $\lambda_1 = E_1(\lambda_0)$, и далее осуществляем итерации по формуле

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \frac{\lambda^{n-1} - \lambda^n}{\lambda^{n-1} - E_1(\lambda^{n-1}) + E_1(\lambda^n) - \lambda^n}(\lambda^n - E_1(\lambda^n)), \qquad /1.5/$$

$$n = 1,2,\ldots$$

Не останавливаясь на деталях, отметим лишь, что локальная скорость сходимости этого процесса подчиняется оценке [7]

$$(\lambda^n - \lambda^*) \le c_0 q^{2^n}, \quad q < 1.$$

Для представленных здесь расчетов в среднем было достаточно 3÷5 итераций до достижения условия $(\lambda^{n+1} - \lambda^n) < 10^{-4}$. При расчете кривых $\lambda^*(\beta,\mu)$ для серии значений $\beta_i = \beta_0 + i\cdot\Delta\beta$, $i = 1,2,\ldots, M$ при достаточно малых значениях $\Delta\beta$ за начальное приближение для $\lambda^*(\beta_{i+1},\mu)$ выбиралось уже вычисленное значение $\lambda^*(\beta_i,\mu)$. В этом случае среднее число итераций метода /1.5/ при каждом β_i равнялось двум.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим уравнения /1.1/ при $\epsilon_1(p) = (1+p^2)^{1/2}$. Для этого случая нами получены графики зависимости числа λ от параметра β для $\mu = 0;\ 1;\ 2;\ 4$ в таком диапазоне изменения β, для которого $0 \le \lambda \le 1$, и рассчитаны соответствующие собственные функции.

Графики величин $\lambda(\beta)$ приведены на рис.1: $\mu_1=0, \mu_2=1, \mu_3=2, \mu_4=4$.

На рис. 2 приведены аналогичные зависимости $\lambda(\beta)$ для $\epsilon_1(p) = 1+p^2$. Для этих кривых характерно существенно более медленное убывание $\lambda(\beta)$ при увеличении β.

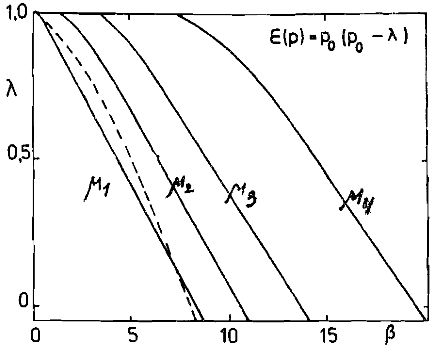

Рис. 1.

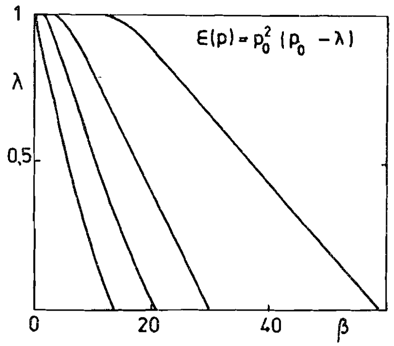

Рис. 2.

На рис. 3а приведены собственные функции для случая $\epsilon_1(p)$, соответствующие параметрам $\beta = 4,3;\ \mu = 0\ /\lambda = 0,509/$ и $\beta = 6,4;\ \mu = 1\ /\lambda = 0,512/$. Для $\epsilon_2 = 1+p^2$ пара собственных функций при параметрах $\beta = 6,1;\ \mu = 0\ /\lambda = 0,501/$ и $\beta = 10,8;\ \mu = 1\ /\lambda = 0,503/$ изображена на рис. 3б.

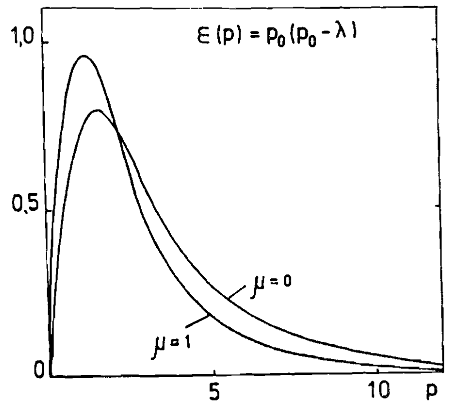

Рис. 3а.

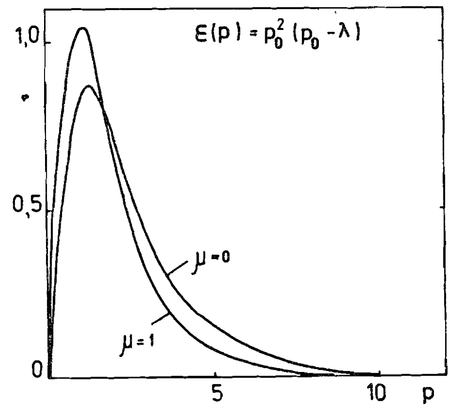

Рис. 3б.

Собственные функции нормированы условием

$$\int_0^{a_x} \phi^2(x)\,dx = 1.$$

где в приведенных расчетах достаточно было взять $a_x = 5,12$.

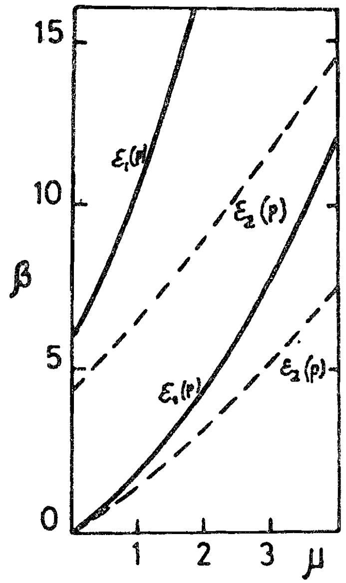

Рис. 4.

На рис. 4 даны графики зависимостей величины $\beta(\mu)$, при котором $\lambda(\beta) = 1$ /т.е. энергия связи равна нулю/ и $\lambda(\beta) = 0,5$ /верхняя пара/ для рассмотренных моделей.

Для сравнения с моделью, определяемой линейным вхождением спектрального параметра, на рис. 1 пунктиром представлена полученная в работе /6/ зависимость $\lambda/\mu = o(\beta)$ для уравнения /1.1/ с локальным ядром $V(p,k) = \ln[(p-k)/(p+k)]$, соответствующим в x-пространстве нерелятивистскому кулоновскому потенциалу. Видно, что при $\beta \to 0$ кривые практически совпадают.

Из приведенных графиков следует, что собственные числа квазипотенциального уравнения /1.1/ обладают теми же характерными свойствами, что и собственные числа уравнения Шредингера с потенциалом Юкавы:

а/ наличие для каждого μ критического значения константы связи $\beta_n(\mu)$, при котором в системе двух частиц появляется очередное n-ое связанное состояние /рис. 1,2/;

б/ рост критических значений константы связи $\beta_n(\mu)$ с ростом μ /рис. 4/.

Расчеты проводились на отрезке дискретизации $a_x = 5,12$ для асомптотики $\Psi(p) = 0(p^{-3})$, $p \to \infty$ при $N = 65$ неизвестных /5/. Относительная точность численных расчетов составляет $10^{-3} \div 10^{-4}$.

Отметим, что задаче /1.1/ может быть поставлено в соответствие счетное семейство решений. Пусть $E_n(\lambda)$ - n-ое по счету собственное число системы /1.1/. Тогда соответствующая "ветвь" определяется равенством

$$\lambda^* = E_n(\lambda^*),$$

которое можно рассмотреть в определенном диапазоне изменения β и μ. Топологическим инвариантом каждого из этих семейств будет число нулей волновой функции на отрезке $/0,\infty/$, которое равно $n - 1$.

Данную работу можно рассматривать как обобщение методов решения уравнений с модельными локальными квазипотенциалами и линейной зависимостью от собственного числа $M = 2\lambda$, которые были развиты в [4-6]. Следующим нашим шагом будет решение системы уравнений, описывающих релятивистскую связанную систему двух частиц со спином 1/2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Асимптотика при $p \to 0$ собственных функций /1.1/ для $\lambda = 1$.

Левая часть /1.1/ при $p \to 0$ имеет вид $(0{,}5p^2 + 0(p^4))\Psi(p)$ для каждого из потенциалов $\epsilon_i(p)$, $i = 1,2$. Анализируя интегральный член, рассмотрим два случая:

А/ $\mu \neq 0$, тогда при $\lambda = 1$, $p \to 0$ имеем

$$G(p,k,1,\mu) = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = -2x + 0(x^2),$$

где

$$x = \frac{pk}{\sqrt{\mu^2 + p^2 + k^2}\,(p_o + k_o - 2 + \sqrt{\mu^2 + p^2 + k^2})} + 0(p^2).$$

В итоге получаем равенство

$$\lim_{p\to o} p\,\Psi(p) = \frac{\beta}{\pi}\int_o^\infty \frac{k\Psi(k)}{\phi(\mu,k)}\,dk, \quad \phi(\mu,k) = \sqrt{\mu^2 + k^2}\,(k_o - 1 + \sqrt{\mu^2 + k^2}), \qquad /2.1/$$

которое является неявным уравнением на величину $\beta(\mu)$, указанную на рис. 4. Чтобы получить приближенное равенство для β, положим

$$p\Psi(p) = a_{-1} + a_o p + a_1 p^2 + \dots, \quad a_{-1} \neq 0, \quad p < c_o. \qquad /2.2/$$

Если при вычислении интеграла в правой части /2.1/ учитывать лишь вклад первого слагаемого из /2.2/ /это предположение основано на факте сильной "локализации" решения $\Psi(p)$ в окрестности точки $p = 0$, наблюдаемом в численных экспериментах/, то получаем приближенное уравнение для β

$$1 = \frac{\beta}{\pi}\int_o^A \frac{dk}{\phi(\mu,k)}, \qquad \mu > 0, \qquad /2.3/$$

где $[0, A]$ есть характерный отрезок локализации собственной функции.

В/ Пусть $\mu = 0$, тогда при $p \to 0$

$$G(p,k,1,0) = \ln\left(\frac{0{,}5p^2 + k_o - 1 + |p - k|}{0{,}5p^2 + k_o - 1 + (p + k)}\right) =$$

$$= \begin{cases} -2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots), & x = \dfrac{p}{0{,}5p^2 + \sqrt{1 + k^2} - 1 + k}, \; k \geq p \\ -2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots), & x = \dfrac{k}{p + 0{,}5p^2 + \frac{k^2}{2}}, \; k < p, \end{cases}$$

и

$$\int_o^p G(p,k,1,0)\Psi(k)\,dk = -2a_1 b_{-1} + 0(p),$$

где $b_{-1} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Аналогично в случае $k \geq p$ можно получить

$$\int_p^\infty G(p,k,1,0)\Psi(k)\,dk = -2\sum_{k=o}^{\infty} b_k \cdot a_{-1} + 0(p),$$

где также $b_k = (2k+1)^{-2}$. В итоге имеем равенство

$$\frac{p2}{2}\,\Psi(p) = \frac{\beta}{4\pi}(-4b_{-1}a_{-1}) + 0(p) = \frac{\beta\pi}{8}a_{-1} + 0(p), \qquad /2.4/$$

из которого следует, что $\beta(0) = 0$ /т.е. при $\mu = 0$/ в классе решений /2.2/. Можно проверить, что при произвольном порядке по p первого слагаемого в разложении /2.2/, соотношение типа /2.4/ будет выполняться только при $\beta = 0$. Оценим асимптотику функции $\beta(\mu)$ при $\mu \to 0$ из формулы /2.3/ в интервале $\mu > A$, предполагая, что число A достаточно мало в силу "локализованности" собственной функции. При малых k имеем

$$\phi(\mu,k) = \mu^2 + k^2 + 0(k^2\max(k,\mu)).$$

Поэтому при достаточно малых μ, но ограниченных снизу $\mu \geq A_o > A$, приближенная формула для $\beta(\mu)$ имеет вид

$$\beta = c(A)\cdot\pi\cdot\mu^2, \qquad /2.5/$$

где $c(A)$ - некоторая константа, зависящая от A. Формула /2.5/ согласуется со свойством $\beta(0) = 0$, а также с графиком рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. - Nuovo Cim., 1963,29,p.380.
2. Kadyshevsky V.G. - Nucl.Phys., 1968, B6, p.125.
3. Капшай В.Н., Саврин В.И., Скачков Н.Б. ТМФ, 1986, т.68, с.400.
4. Сидоров А.В., Скачков Н.Б. ОИЯИ, P2-84-502, Дубна, 1984.
5. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, P11-84-740, Дубна, 1984.
6. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, P11-85-465, Дубна, 1985.
7. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., Мир, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 апреля 1987 года.

Жидков Е.П. и др. P11-87-261

Численное решение квазипотенциального уравнения с нелинейным вхождением спектрального параметра

Представлены результаты численного исследования релятивистских квазипотенциальных уравнений, описывающих связанную систему двух частиц в импульсном пространстве, в случае, когда интегральный оператор содержит нелинейную зависимость от собственного числа - массы системы $M=2\lambda$. Установлена зависимость энергии связи от массы промежуточного бозона μ, найдены критические значения μ, при которых в системе появляется первое связное состояние.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P. et al. P11-87-261

Numerical Solution of Quasipotential Equation with Nonlinear Entry of Spectral Parameter

The results of numerical investigation of relativistic quasipotential equations describing the coupled two-particle system in momentum space are presented for the case when integral operator contains the nonlinear dependence on the eigenvalue-mass of the system $M=2\lambda$. The dependence of the couple energy on the mass of intermediate boson μ is found. Critical values of mass μ for which the first bound state arises is calculated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987