



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

P11-87-204

**Н.Е.Мазепа, С.И.Сердюкова**

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ  
ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ  
МАКСИМАЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО  
ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ**

Направлено в журнал "Soviet Journal on  
Numerical Analysis and Mathematical  
Modellings" (SNAMM)

**1987**

В работе<sup>/5/</sup> доказано, что явные разностные схемы максимального нечетного порядка точности, написанные по несимметричному четному набору точек,

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-k}^{k-1} a_l u_{j+l}^n, \quad n \geq 0, \quad j \geq k,$$

устойчивы в  $C$  и обладают свойствами, близкими к оптимальным.

$u_0^n, u_1^n$  заданы. Для определения  $u_1^{n+1}, \dots, u_{k-1}^{n+1}$  нужны дополнительные граничные условия. В предлагаемой работе для схем порядка точности  $O(h^3), O(h^5)$  предложены устойчивые граничные условия. Для уравнения  $u_t + u_x = 0$  пишем аппроксимацию максимального порядка точности

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} u_j^n, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Порядок аппроксимации на решении  $O(h^{2k-1})$ . Для проверки устойчивости поставленной левой краевой задачи используется система аналитических вычислений REDUCE<sup>1/</sup>. В случае  $L = \frac{1}{2}$ ,  $k = 2, 3$  показано, что спектр оператора перехода от слоя к слою  $G$  лежит строго внутри единичного круга.  $L$  - отношение шагов сетки. При  $L \leq 1$  задача Коши устойчива<sup>/5/</sup>. Тогда согласно теореме *Н.-О. Крейс* <sup>/3/</sup> устойчива рассматриваемая левая краевая задача. На правой границе недостающие  $u_i^{n+1}$  находятся аналогично:

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=N-2k+1}^N d_{ij} u_j^n, \quad i = N, \dots, N-k+2.$$

Точку спектра  $Z$  назовем простой, если характеристическое уравнение

$$z^k = \sum_{l=-k}^{k-1} a_l z^{k+l}$$

не имеет кратных решений, меньших по модулю единицы.

В общем случае (для любого  $k$  и любого  $L \leq 1$ ) доказано, что оператор перехода от слоя к слою правой краевой задачи не имеет простых точек спектра вне единичного круга. Там самым исследование устойчивости сведено к исследованию "кратных точек спектра". Это более простая задача в числах по сравнению с задачей определения всего спектра, содержащей параметр  $Z$ . Для  $L = \frac{1}{2}$ ,  $k = 2, 3, \dots, 8$  прямым расчетом показано, что характеристическое уравнение имеет кратные решения, меньшие по модулю единицы, лишь при  $|z| < 1$ . В результате доказано, что  $G$  не имеет точек спектра в области  $|z| \geq 1$ , и, значит, рассматриваемая правая краевая задача устойчива.

Так как есть только одна наклонная характеристика, из устойчивости задачи Коши и полубесконечных краевых задач (при  $L = \frac{1}{2}$ ,  $k = 2, 3$ ) следует<sup>/6/</sup> устойчивость задачи с двумя границами:  $\|G^n\| \leq C, n \leq \exp(bN)$ . В работе *Н.-О. Крейс* <sup>/3/</sup> исследуется устойчивость в  $L_2$ . Но из интегрального представления  $G^n$  <sup>/3/</sup> и оценок функции Грина задачи Коши в метрике  $L_1$  <sup>/5/</sup> следует устойчивость рассматриваемых краевых задач в метрике  $C$ . Переходим к доказательству. Левая краевая задача исследована при  $k = 2, 3$ . Аналогично работе<sup>/4/</sup> задача определения спектра оператора  $G$  сводится к решению полиномиального уравнения.

Левая краевая задача, случай  $k=2$

Исходная непрерывная краевая задача

$$u_t + u_x = 0, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0,$$

аппроксимируется разностной краевой задачей

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = -\frac{1}{16} u_{j-2}^n + \frac{9}{16} u_{j-1}^n + \frac{9}{16} u_j^n - \frac{1}{16} u_{j+1}^n, \\ n \geq 0, j \geq 2; \\ u_j^0 = f(jh), j \geq 0; \\ u_0^n = 0 \\ u_1^{n+1} = \frac{5}{16} u_0^n + \frac{15}{16} u_1^n - \frac{5}{16} u_2^n + \frac{1}{16} u_3^n. \end{cases} \quad (I)$$

Здесь и ниже, если это специально не оговаривается,  $L = \frac{1}{2}$ .  
 Порядок аппроксимации на решении есть  $O(h^3)$ . Обозначим через  $\mathcal{H}$  гильбертово пространство последовательностей  $\mathcal{V} = \{v_j\}$ ,  $j \geq 0$ , из  $L_2$ , удовлетворяющих граничным условиям (I).  $z$  является точкой спектра оператора  $G$ , если существует ненулевая последовательность  $\mathcal{V}$  из  $\mathcal{H}$ , такая, что  $G\mathcal{V} = z\mathcal{V}$ . Назовем  $z$  обобщенной точкой спектра оператора  $G$  /3/, если соответствующая  $\mathcal{V}$  является пределом последовательностей из  $L_2$ . Точки спектра и отвечающие им  $\mathcal{V}$  находятся из решения "спектральной задачи":

$$\begin{cases} z v_j = -\frac{1}{16} v_{j-2} + \frac{9}{16} v_{j-1} + \frac{9}{16} v_j - \frac{1}{16} v_{j+1}, j \geq 2, \\ v_0 = 0, \\ z v_1 = \frac{5}{16} v_0 + \frac{15}{16} v_1 - \frac{5}{16} v_2 + \frac{1}{16} v_3. \end{cases}$$

Решение спектральной задачи ищем в виде  $v_j = c x^j$ , тогда  $x$  удовлетворяет характеристическому уравнению

$$-\frac{1}{16} + \frac{9}{16} x + \left(\frac{9}{16} - z\right) x^2 - \frac{1}{16} x^3 = 0. \quad (2)$$

Известно /3/, что при  $|z| \geq 1$  (2) имеет ровно два решения, меньшие по модулю единицы,  $x_1(z)$ ,  $x_2(z)$  и одно решение, большее по модулю единицы  $x_3(z)$ . Только  $x_1(1) = 1$ .

Для остальных  $z$   $|x_i(z)| < 1$ ,  $i=1,2$ . Спектральная задача имеет при  $|z| \geq 1$  решение

$$v_j = C_1 x_1^j + C_2 x_2^j, \quad x_1(z) \neq x_2(z),$$

если  $P(x_1) = P(x_2)$ , где

$$P(x) = -\frac{5}{16} + \left(z - \frac{15}{16}\right) x + \frac{5}{16} x^2 - \frac{1}{16} x^3.$$

Случай кратных  $x$  рассматривается отдельно.

Справедливо соотношение

$$P(x_1) - P(x_2) = (x_1 - x_2) \left\{ 15 - 16z - 5(x_1 + x_2) + (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \right\}. \quad (3)$$

Следуя /4/, положим

$$x = x_1 + x_2, \quad y = x_1 \cdot x_2.$$

Из теоремы Вьета имеем

$$x - \frac{1}{y} = 9 - 16z, \quad y - \frac{x}{y} = -9.$$

С помощью системы REDUCE делаем в (3) последовательные подстановки  $z = (9 - x + \frac{1}{y}) / 16$ ,  $x = y^2 + 9y$ . В результате получаем

$$y^5 + 18y^4 + 77y^3 - 37y^2 + 6y - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет три решения, меньшие по модулю единицы:

$$y_1 = 0,33666\dots; y_{2,3} = 0,056567 \pm i0,1779\dots$$

По ним определяются  $z$ :

$$z_1 = 0,1804\dots; z_{2,3} = 0,431027 \pm i0,2177\dots$$

Тем самым показано, что  $G$  не имеет простых точек спектра в области  $|z| \geq 1$ . Кратные  $x$  удовлетворяют уравнению

$$x^3 + 9x - 2 = 0.$$

Легко проверить, что есть одно вещественное решение на  $[0, \frac{2}{9}]$  и два комплексно-сопряженных решения, большие по модулю единицы. Кратному значению  $x$ , меньшему  $\frac{2}{9}$ , отвечает  $0 < z < 1$ .

Итак, доказано, что для  $K=2$  оператор перехода от слоя к слою левой краевой задачи не имеет точек спектра в области  $|z| \geq 1$ .

Замечание. Здесь и далее при решении полиномиальных уравнений использовался метод парабол. В случае необходимости решения уточнялись по методу Ньютона.

Левая краевая задача, случай  $K=3$

Разностная краевая задача

$$u_{j+1}^n = \frac{3}{256} u_{j-3}^n - \frac{25}{256} u_{j-2}^n + \frac{150}{256} u_{j-1}^n + \frac{150}{256} u_j^n - \frac{25}{256} u_{j+1}^n$$

$$+ \frac{3}{256} u_{j+2}^n, \quad n \geq 0, \quad j \geq 3;$$

$$u_j^0 = f(jh), \quad j \geq 0;$$

$$u_0^n = 0$$

$$u_1^{n+1} = \frac{63}{256} u_0^n + \frac{315}{256} u_1^n - \frac{210}{256} u_2^n + \frac{126}{256} u_3^n - \frac{45}{256} u_4^n + \frac{7}{256} u_5^n$$

$$u_2^{n+1} = \frac{7}{256} u_0^n + \frac{105}{256} u_1^n + \frac{210}{256} u_2^n - \frac{70}{256} u_3^n + \frac{21}{256} u_4^n - \frac{3}{256} u_5^n.$$

аппроксимирует исходную непрерывную левую краевую задачу. Порядок аппроксимации на решении есть  $O(h^5)$ . При  $|z| \geq 1$  характеристическое уравнение

$$3 - 25z + 150z^2 + (150 - 256z)x^3 - 25z^4 + 3z^5 = 0$$

имеет три решения, меньшие по модулю единицы,  $x_1, x_2, x_3$ .

Как и выше,  $x_1(1) = 1$ .

Спектральная задача имеет решение

$$U_j = C_1 x_1^j + C_2 x_2^j + C_3 x_3^j, \quad x_i \neq x_j,$$

если  $z$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \psi_1(x_3) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \psi_2(x_3) \end{pmatrix} = 0, \quad \text{где}$$

$$\psi_1(x) = 63 + (315 - 256z)x - 210x^2 + 126x^3 - 45x^4 + 7x^5,$$

$$\psi_2(x) = -7 + 105x + (210 - 256z)x^2 - 70x^3 + 21x^4 - 3x^5.$$

Вычитаем из I-го и 2-го столбцов соответственно 2-й и 3-й столбцы. Имеем

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \psi_1(x_1, x_2) & \psi_1(x_2, x_2) & \psi_1(x_3) \\ \psi_2(x_1, x_2) & \psi_2(x_2, x_2) & \psi_2(x_3) \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \Delta', \quad \text{где}$$

$$\psi_1(x_1, x_2) = -256z + 315 - 210(x_1 + x_2) + 126(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) - 45(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + 7\{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)\},$$

$$\psi_2(x_1, x_2) = -256z(x_1 + x_2) + 105 + 210(x_1 + x_2) - 70(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + 21(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - 3\{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)\}.$$

В  $\Delta'$  из первого столбца вычитаем второй, получаем

$$\Delta' = (x_1 - x_3) \det \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_{11}(x_1, x_2, x_3) & \psi_1(x_2, x_3) \\ \mathfrak{F}_{21}(x_1, x_2, x_3) & \psi_2(x_2, x_3) \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\mathfrak{F}_{11} = -210 + 126(x_1 + x_2 + x_3) - 45(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1 x_2 x_3 + 9),$$

$$\mathfrak{F}_{21} = -256z + 210 - 70(x_1 + x_2 + x_3) + 21(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - 3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1 x_2 x_3 + 9),$$

$$q = x_1^2(x_2 + x_3) + x_1(x_2^2 + x_3^2) + x_2 x_3(x_2 + x_3). \quad (4)$$

Наконец, в последнем определителе из второго столбца вычитаем первый, умноженный на  $(x_2 + x_3)$ . В результате имеем

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \det \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{где}$$

$$f_{11} = -256z + 315 - 126(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 45(q + 2x_1x_2x_3) - 7\{x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)\},$$

$$f_{22} = 105 + 70(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 21(q + 2x_1x_2x_3) + 3\{x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)\}.$$

Положим  $x = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $y = x_1x_2x_3$ ,

$$u = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Тогда  $q = ux - 3y$  (см. (4)).

Элементы  $f_{ij}$  могут быть представлены как функции  $u, x, y$ ,

$q$ :

$$f_{11} = -210 + 126x - 45(x^2 - u) + 7(x^3 - 29 - 5y),$$

$$f_{12} = -256z + 315 - 126u + 45(ux - y) - 7(x^2u - xy - u^2),$$

$$f_{21} = -256z + 210 - 70x + 21(x^2 - u) - 3(x^3 - 29 - 5y),$$

$$f_{22} = 105 + 70u - 21(ux - y) + 3(x^2u - xy - u^2).$$

Из соотношений Вьета получаем систему:

$$\begin{cases} -\frac{50+y-\frac{x}{y}}{\frac{25}{3}-x} - \frac{1}{y} + x\left(\frac{25}{3}-x\right) = 50 - \frac{256z}{3}, \\ \frac{50+y-\frac{x}{y}}{\frac{25}{3}-x} \cdot \frac{1}{y} + y\left(\frac{25}{3}-x\right) = -\frac{25}{3}. \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда  $x$  и  $z$  могут быть представлены как функции  $y$ . С помощью системы REDUCE осуществляем соответствующие подстановки в  $\det \|f_{ij}\| = 0$  и освобождаемся от радикалов. В результате получаем полиномиальное уравнение:

$$\Phi(y) = \sum_{l=1}^{37} A(l) y^{37-l} = 0, \quad \text{где}$$

A(1)=4782969  
A(2)=1913187688  
A(3)=332885076462  
A(4)=32826688844634  
A(5)=1991719581649245  
A(6)=75388210114945833  
A(7)=1686802688398015650  
A(8)=18340448569030283067  
A(9)=17354937099037033816  
A(10)=709448276876307026123  
A(11)=5448535849934779369806  
A(12)=17768036932952502002225  
A(13)=34561976605867895858604  
A(14)=36259806446362158657851  
A(15)=144009192672408772346130  
A(16)=695011281141526626793761  
A(17)=40306941267975262427446  
A(18)=117611217097822620086545  
A(19)=3395408869347864720102234  
A(20)=3275220709018872931364711  
A(21)=2092199726751505690149302  
A(22)=96318762202358559147723  
A(23)=439796720075189372733034  
A(24)=398834511105623352099199  
A(25)=40214036657689550710832  
A(26)=44879273273019224426575  
A(27)=49584146771480320691594  
A(28)=25598341678652113635875  
A(29)=3076086275496345181500  
A(30)=458963225587699034375  
A(31)=2558027457336306250  
A(32)=21353120767766953125  
A(33)=1469702548915546875  
A(34)=55282107490046875  
A(35)=1333933312500000  
A(36)=20182763671875  
A(37)=192216796875

По  $y_i$  находим  $z_i$ . Так как не только выделенные  $x_i$  удовлетворяют соотношениям (5), могут получиться ложные точки спектра, но они легко отделяются<sup>4/</sup>. Все 36 решений  $y_i$  лежат внутри единичного круга. Девяти  $y_i$  отвечают  $z_i$ , большие по модулю 1, но соответствующие  $x_i$  больше по модулю 3:

$y_i$	$z_i$	$x_i$
-0,1735;	1,565;	-6,111;
-0,0078 ± i 0,142;	0,2294 ± i 1,419;	-2,923 ± i 7,953;
0,4125 ± i 0,0568;	1,652 ± i 0,238;	14,62 ± i 0,991;
0,2418 ± i 0,2043;	1,196 ± i 1,001;	13,70 ± i 4,641;

$$y_{2,9} = y_{2,3} + O(10^{-4}).$$

Найдены "ложные точки спектра". Напомним, что  $x = x_1 + x_2 + x_3$ , где  $|x_i| \leq 1$ . Кратные значения  $x$  удовлетворяют уравнению

$$6x^5 - 25x^4 - 150x^2 + 50x - 9 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения, меньшие по модулю единицы:

$$x_{1,2} = 0,1668 \pm i 0,1779.$$

Из характеристического уравнения находим

$$z_{1,2} = 1,6948 \mp i 0,6438.$$

Решение спектральной задачи ищем в виде

$$v_j = C_1 x_1^j + C_2 x_2^j + C_3 x_3^j,$$

$C_i$  определяются из граничных условий

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0, \\ \tau_{11} C_1 + \tau_{12} C_2 = 0, \\ \tau_{21} C_1 + \tau_{22} C_2 = 0. \end{cases}$$

Справедливы соотношения

$$\tau_{11} = (315 - 256z) (x_1 - x_3) - 210 (x_1^2 - x_3^2) + 126 (x_1^3 - x_3^3) - 45 (x_1^4 - x_3^4) + 7 (x_1^5 - x_3^5),$$

$$\tau_{12} = (315 - 256z) x_1 - 420 x_1^2 + 378 x_1^3 - 180 x_1^4 + 35 x_1^5,$$

$$\tau_{21} = 105 (x_1 - x_3) + (210 - 256z) (x_1^2 - x_3^2) - 70 (x_1^3 - x_3^3) + 21 (x_1^4 - x_3^4) - 3 (x_1^5 - x_3^5),$$

$$\tau_{22} = 105 x_1 + (420 - 512z) x_1^2 - 210 x_1^3 + 84 x_1^4 - 15 x_1^5.$$

Считаем определитель

$$\det \| \tau_{ij} \| = -985,66 \pm i 1434,2167.$$

Значения  $x_1, x_3$  уточняются по методу Ньютона, получается сходящаяся последовательность приближенных значений  $\det \| \tau_{ij} \|$ . Здесь приведены установившиеся знаки значений  $\det \| \tau_{ij} \|$ .

В таком смысле надо понимать все приведенные результаты численных расчетов.

Итак, показано, что  $\det \| \tau_{ij} \| \neq 0$ . Значит, нет кратных точек спектра. В результате доказано, что в случае  $L = \frac{1}{2}$ ,  $K = 3$  левая краевая задача не имеет точек спектра в области  $|z| \geq 1$ .

#### Правая краевая задача

После замены  $X$  на  $-X$  правая краевая задача для уравнения  $u_t + u_x = 0$  переходит в левую краевую задачу для уравнения  $u_t = u_x$ .

**Теорема.** Пусть для уравнения  $u_t = u_x$  используется разностная схема максимального порядка точности, написанная по несимметричному четному набору точек

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-k+1}^k a_l u_{j+l}^n, \quad j \geq k-1, \quad d = \frac{\tau}{h}, \quad d \neq 1, \quad n \geq 0,$$

$$a_l = a_{k-l} = (-1)^l \frac{C_{2k-1}^l}{(-l+d)} \frac{(k-d) \dots (1-d) d (1+d) \dots (k-1+d)}{(2k-1)!}$$

$u_j^0$  заданы.

Если недостающие  $u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, \dots, u_{k-2}^{n+1}$  находятся из аппроксимации  $u_{\pm} = u_x$  максимального порядка точности

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=0}^{2k-1} C_{ij} u_j^n, \quad i=0, 1, \dots, k-2,$$

то исследование устойчивости рассматриваемой левой краевой задачи сводится к исследованию "кратных точек спектра"  $G$ . Если "кратные точки спектра" лежат строго внутри единичного круга, рассматриваемая краевая задача устойчива.

#### Доказательство

Параметры аппроксимации  $a_l, C_{ij}$  являются решениями следующих систем:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{l=-k+1}^k a_l, & 1 &= \sum_{j=0}^{2k-1} C_{ij}, \quad i=0, \dots, k-2, \\ d &= \sum_{l=-k+1}^k l a_l, & d &= \sum_{j=0}^{2k-1} (j-i) C_{ij}, \\ d^2 &= \sum_{l=-k+1}^k l^2 a_l, & d^2 &= \sum_{j=0}^{2k-1} (j-i)^2 C_{ij}, \\ & & & \dots \\ d^{2k-1} &= \sum_{l=-k+1}^k l^{2k-1} a_l, & d^{2k-1} &= \sum_{j=0}^{2k-1} (j-i)^{2k-1} C_{ij}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим многочлены

$$P_i(x) = \sum_{l=0}^{2k-1} a_{l-k+1} x^l - x^{k-1-i} \sum_{j=0}^{2k-1} C_{ij} x^j, \quad i=0, \dots, k-2.$$

Лемма. Многочлены  $P_i(x)$  имеют при  $x=1$  ноль кратности  $2k$ :

$$P_i(x) = -C_{i, 2k-1} \cdot (x-1)^{2k} Q_{k-2-i}(x).$$

Коэффициент при старшем члене  $Q_{k-2-i}(x)$  равен 1.

Заметим, что при  $0 < d < 1$  все  $C_{i, 2k-1} \neq 0$ .

В самом деле,

$$C_{i, 2k-1} = \frac{d}{(2k-1-i)} \frac{W(-i, -(i-1), \dots, -1, 1, \dots, 2k-2-i, d)}{W(-i, -(i-1), \dots, -1, 1, \dots, 2k-2-i, 2k-1-i)}$$

где  $W(x_1, \dots, x_n)$  - определитель Вандермонда. Известно [1], что

$$W(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

Доказательство леммы. Покажем, что

$$P_i(1) = P_i'(1) = \dots = P_i^{(2k-1)}(1) = 0.$$

Представим  $P_i(x)$  в виде

$$P_i(x) = x^{k-1} \left\{ \sum_{l=-k+1}^k a_l x^l - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} x^{j-i} \right\} = x^{k-1} \mathcal{F}(x).$$

Имеем  $P_i(1) = \mathcal{F}(1) = \sum_{l=-k+1}^k a_l - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} = 0.$

Далее получаем

$$P_i'(x) = (x^{k-1})' \mathcal{F}(x) + x^{k-2} \left\{ \sum_{l=-k+1}^k l a_l x^l - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} (j-i) x^{j-i} \right\} = (x^{k-1})' \mathcal{F}(x) + x^{k-2} \mathcal{F}_1(x).$$

Из двух первых пар уравнений системы (6) следует, что

$$\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}_1(1) = 0. \quad \text{Производная порядка } l \text{ имеет вид}$$

$$P^{(l)}(x) = (x^{k-1})^{(l)} \mathcal{F}(x) + (x^{k-2})^{(l-1)} \mathcal{F}_1(x) + \dots + x^{k-1-l} \mathcal{F}_l(x),$$

где  $\mathcal{F}_s(x) = \sum_{l=-k+1}^k a_l l^s x^l - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} (j-i)^s x^{j-i}.$

Из  $(s+1)$ -й пары уравнений (6) следует, что  $\mathcal{F}_s(1) = 0.$

Следовательно,  $P(1) = P'(1) = \dots = P^{(2k-1)}(1) = 0.$

Дальнейшее продвижение невозможно, так как использованы все  $2k$  пары уравнений системы (6). Точки спектра  $G$ , расположенные вне единичного круга, являются решением следующей алгебраической задачи. При  $|z| \geq 1$  характеристическое уравнение имеет ровно  $(k-1)$  решений<sup>/3/</sup>, меньших по модулю единицы. Обозначим их через  $x_1(z), x_2(z), \dots, x_{k-1}(z)$ . Решение спектральной задачи

$$\begin{cases} z v_j = \sum_{l=-k+1}^k a_l v_{j+l}, & j \geq k-1, \\ z v_i = \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} v_j, & i = 0, \dots, k-2. \end{cases}$$

ищем в виде  $v_j = \sum_{l=1}^{k-1} b_l x_l^j(z).$  Параметры  $b_l$  определяются из граничных условий

$$z \left( \sum_{l=1}^{k-1} b_l x_l^i \right) = \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} \left( \sum_{l=1}^{k-1} b_l x_l^j \right), \quad i = 0, \dots, k-2.$$

Эта система имеет ненулевое решение, если

$$\det \left\| z x_l^i - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} x_l^j \right\| = \det \left\| \xi_{il} \right\| = 0. \quad (7)$$

Уравнение для определения спектра  $G$  получено. В силу характеристического уравнения

$$z = \sum_{j=-k+1}^k a_j x_l^j, \quad l = 1, \dots, k-1.$$

Тогда  $\xi_{il}$  в (7) можно переписать в виде

$$\xi_{il} = x_l^i \sum_{j=-k+1}^k a_j x_l^j - \sum_{j=0}^{2k-1} c_{ij} x_l^j = x_l^{-k+i+1} P_i(x_l).$$

Но согласно лемме  $P_i(x_l) = -c_{i, 2k-1} (x_l-1)^{2k} Q_{k-2-i}(x_l).$

Следовательно, из  $l$ -го столбца можно вынести множитель

$$x_l^{-k+i} (x_l-1)^{2k}.$$

После этого под знаком определителя в (7) остается матрица  $\|\Psi_{il}\|$

$$\Psi_{1,l} = a_{-k+1} + w_1^1 x_l + w_2^1 x_l^2 + \dots + w_{k-2}^1 x_l^{k-2},$$

$$\Psi_{2,l} = a_{-k+1} x_l + w_2^2 x_l^2 + \dots + w_{k-2}^2 x_l^{k-2},$$

$$\Psi_{k-2,l} = a_{-k+1} x_l^{k-3} + w_{k-2}^{k-2} x_l^{k-2},$$

$$\Psi_{k-1,l} = a_{-k+1} x_l^{k-2}.$$



Напомним, что

$$a_{-k+1} = (-1)^{k-1} \frac{(k-d) \dots (1-d) d (1+d) \dots (k-1+d)}{(-k+1+d) (2k-1)!}$$

$$a_{-k+1} \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 < d < 1.$$

Очевидным образом в  $\det \|\psi_{i\ell}\|$  можно избавиться от внедиагональных элементов, после чего остается определитель Вандермонда.

Итак, получен явный вид определителя в (?):

$$\begin{aligned} \det \|\psi_{i\ell}\| &= (a_{-k+1})^{k-1} \left( \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{(x_{\ell}^{-1})^{2k}}{x_{\ell}^{k-1}} \right) W(x_1, \dots, x_{k-1}) = \\ &= (a_{-k+1})^{k-1} \left( \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{(x_{\ell}^{-1})^{2k}}{x_{\ell}^{k-1}} \right) \prod_{1 \leq j < i \leq k-1} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

При  $|z| \geq 1$  рассматриваемые  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ) строго меньше по модулю единицы. Поэтому  $\det \|\psi_{i\ell}\| \neq 0$  при  $|z| \geq 1$ , если только

$$\prod_{1 \leq j < i \leq k-1} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Остается найти  $z$ , которым отвечают кратные  $x$ , меньшие по модулю единицы. Такие  $x, z$  определяются из системы

$$\begin{cases} z x^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{2k-1} a_{\ell-k+1} x^{\ell}, \\ (k-1) z x^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{2k-1} \ell a_{\ell-k+1} x^{\ell}. \end{cases}$$

Рассматриваемая система имеет не более  $(2k-1)$  решений. Теорема доказана.

"Кратные точки спектра" найдены для  $d = \frac{1}{2}$ ,  $k=2, 3, \dots, 8$ . Для таких  $d$  и  $k$  при  $|z| \geq 1$  не обнаружено кратных  $x$ , меньших по модулю единицы.

В заключение приведем результаты расчетов для  $k=2, 3$ . Вернемся к правой краевой задаче для уравнения  $u_{\pm} + u_x = 0$ .

Правая краевая задача  $k=2, d = \frac{1}{2}$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{16} (-u_{j-2}^n + 9u_{j-1}^n + 9u_j^n - u_{j+1}^n), \quad j = N-1,$$

$$u_N^{n+1} = \frac{1}{16} (5u_N^n + 15u_{N-1}^n - 5u_{N-2}^n + u_{N-3}^n).$$

Порядок аппроксимации на точном решении  $O(h^3)$ .

Обнаружены две "кратные точки спектра"

$$z_{1,2} = 0,56943 \pm i 0,37526, \quad |z_{1,2}| < 1.$$

Правая краевая задача,  $k=3, d = \frac{1}{2}$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{256} (3u_{j-3}^n - 25u_{j-2}^n + 150u_{j-1}^n + 150u_j^n - 25u_{j+1}^n + 3u_{j+2}^n), \quad j = N-2,$$

$$u_N^{n+1} = \frac{1}{256} (63u_N^n + 315u_{N-1}^n - 210u_{N-2}^n + 126u_{N-3}^n - 45u_{N-4}^n + 7u_{N-5}^n),$$

$$u_{N-1}^{n+1} = \frac{1}{256} (-7u_N^n + 105u_{N-1}^n + 210u_{N-2}^n - 70u_{N-3}^n + 21u_{N-4}^n - 3u_{N-5}^n).$$

Порядок аппроксимации на точном решении  $O(h^5)$ .

Обнаружены три "кратные точки спектра"

$$z_{1,2} = 0,54156 \pm i 0,5025, \quad |z_{1,2}| < 1,$$

$$z_3 = 0,5039.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А.О. "Исчисление конечных разностей", Москва, ФМ, 1959, с.10.
2. Kern A.G. REDUCE User's Manual 2-nd. Univ. of Utah, 1973, 70p.
3. H.-O.Kreiss. Stability Theory for Difference Approximations of Mixed Initial Boundary Value Problems, Math. of Comp., 1968, vol.22, No 107, p.703-711.
4. Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И.  
Исследование устойчивости одной разностной краевой задачи с применением системы аналитических вычислений, Математика, 1985 10(281); с.55-61.
5. Сердюкова С.И. Асимптотические свойства разностных схем максимального нечетного порядка точности. Мат. заметки, 1982, т.32, вып.4, с.517-528.
6. Сердюкова С.И. Об устойчивости разностных краевых задач с наклонными характеристиками постоянного знака. ЖВМ и ММ, 1975, г. т.15, № 5, 1333-1339.

Рукопись поступила в издательский отдел  
31 марта 1987 года.

Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И.

P11-87-204

Дополнительные граничные условия для разностных схем максимального нечетного порядка точности

Для разностных схем максимального нечетного порядка точности  $2k-1$  предложены дополнительные граничные условия того же порядка точности  $2k-1$ . Доказана устойчивость в  $C$  левой краевой задачи при  $a = 1/2$ ,  $k = 2, 3$ . Здесь  $a$  - отношение шагов сетки. Наибольшую трудность представляет определение спектра оператора перехода от слоя к слою  $G$ . Используется развитая нами ранее методика с применением системы аналитических вычислений REDUCE. Задача определения спектра  $G$  сводится к решению полиномиального уравнения. Устойчивость правой краевой задачи в  $C$  доказана для  $a = 1/2$ ,  $k = 2, 3, \dots, 8$ . В общем случае /при любом  $k$  и любом  $a \leq 1$ / доказано, что оператор перехода от слоя к слою правой краевой задачи не имеет "простых" точек спектра, вне единичного круга. Из устойчивости полубесконечных краевых задач практически следует устойчивость задачи с двумя границами:  $\|G^n\| \leq c$ ,  $n \leq \exp(bN)$ . Здесь  $N$  - число точек по  $x$ .

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Mazepa N.E., Serdykova S.I.

P11-87-204

Additional Boundary Conditions for the Difference Schemes of Maximum Odd Accuracy

For the difference schemes of maximum odd accuracy  $(2k-1)$  we set the additional boundary conditions of the same accuracy  $(2k-1)$ . The left boundary problem stability in  $C$  is proved for  $a = 1/2$ ,  $k = 2, 3$ . Here  $a$  is mesh ratio. The main difficulty consists in finding of the spectrum of the operator of the transition from layer to layer  $G$ . We use our previously developed methods with application of the symbolic computation system REDUCE. The spectrum definition problem is reduced to the polynomial equation solution. The right boundary problem stability in  $C$  is proved for  $a = 1/2$ ,  $k = 2, \dots, 8$ . In general case (for any  $k$  and any  $a \leq 1$ ) it is proved that the operator  $G$  of the right boundary problem has no "simple spectrum point" outside the unit circle. The half-infinite difference boundary problems stability implies practically the stability of the problem with two boundaries:  $\|G^n\| \leq c$ ,  $n \leq \exp(bN)$ . Here  $N$  is the number of points in  $x$ .

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987