СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 5846

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

В.Г. Маханьков, Ф.Х. Хакимов

ОБ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ

1971

P9 - 5846

В.Г. Маханьков, Ф.Х. Хакимов

ОБ ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ

§ I. Введение

В связи с многочисленными экспериментами по турбулентному нагреву плазмы /I-3/ большое внимание теоретиков вплоть до настоящего времени привлечено к исследованию свойств ионно-звуковой (s) турбулентности /4-6/.

Хорошо известно, что (s)-волны обладают нераспадным спектром /4/, т.е. одновременное удовлетворение условий

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 \\ \vec{K}_1 + \vec{K}_2 &= \vec{K}_3 \end{aligned} \tag{I.I}$$

является невозможным. (Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и $\vec{K}_1$, $\vec{K}_2$, $\vec{K}_3$ суть частоты и волновые векторы взаимодействующих волн). Вследствии этого основным нелинейным эффектом, приводящим к установлению спектра стационарной (s) турбулентности, считается индуцированное рассеяние ионно-звуковых волн на частицах плазмы /4-6/. С другой стороны, во-первых, в звуковой части спектра величина "запрещения" распада относительно мала $\Delta\omega_f \sim \omega_s K_1^2 d_e^2$ (d_e - дебаевский радиус электронов), во-вторых, мы знаем множество примеров, когда наличие даже слабой турбулентности в какой-то области частот (например, ω_s) может существенно исказить дисперсионные свойства плазмы в области более низких частот /7-9/. Этот факт соответствует хорошо известному возникновению сдвига частоты $\Delta\omega_n$ в результате нелинейных взаимодействий /10/. Если этот сдвиг превосходит величину частоты соответствующей линейной моды колебаний ω^ℓ , то возникает новая ветвь, которая может стать гидродинамически (по аналогии с пучковыми неустойчивостями) неустойчивой. В случае $\Delta\omega_n \ll \omega^\ell$, неустойчивость носит слабый кинематический характер и обычно называется распадной (или параметрической /8/), при этом должны быть выполнены условия (I.I).

В пределе

$$\Delta\omega_n \gg \omega^e \qquad (I.2)$$

второе из условий (I.I) выполняется, а первое фактически играет роль дисперсионного уравнения для наинизшей из частот. Такое взаимодействие будет называться квазираспадным.

Вышесказанное позволяет сделать следующие качественные выводы, исходя из наиболее тривиальных размерностных соображений: нелинейный сдвиг частоты вследствие турбулентности с частотой вблизи ω_s можно грубо оценить как

$$\Delta\omega_n \sim \frac{1}{\alpha}\omega_s \frac{W}{nT} \qquad (I.3)$$

(здесь W -плотность энергии турбулентности в области $\sim\omega_n$, nT - плотность тепловой энергии плазмы), величина "запрещения" распада для (s) турбулентности, как отмечалось выше, есть

$$\Delta\omega_f \sim \omega_s K_1^2 d_e^2 , \qquad (I.4)$$

где $K_1^2 d_e^2 \ll 1$.

Сравнивая (I.3) и (I.4), можно заключить качественно, что условием возникновения квазираспадного взаимодействия является

$$\Delta\omega_n > \Delta\omega_f ,$$

или в рассматриваемом случае

$$\frac{W}{nT} > \alpha K_1^2 d_e^2 . \qquad (I.5)$$

Более точное рассмотрение позволяет отыскать коэффициент α *). Такого рода взаимодействие должно приводить к перекачке энергии s-волн по спектру в сторону меньших частот ω и волновых чисел "К" (поскольку в звуковой части спектра $\omega_s = K V_s$, $V_s = \sqrt{T_e/m_i}$).

*) Коэффициент α в бесстолкновительном пределе может быть просто числом, при взаимодействии ленгмюровских и акустических колебаний α пропорционально либо ($K^2 V_e^2 / \nu_e^2$), либо $\left(\frac{K^2}{K_1^2}\right)$ за счет перенормирования вероятности (см./9/). В рассматриваемом случае он должен состоять из тех же параметров.

Однако, так как в рассматриваемом процессе присутствует одна низкая частота, т.е. $\omega \ll \omega_1$, ω_2 и $k \ll k_1$, k_2, то в каждом акте взаимодействия энергия изменяется незначительно, а возникающая перекачка энергии s -волн носит эстафетный (дифференциальный) характер.

§ 2. Дисперсионные уравнения плазмы с развитой ионно-звуковой турбулентностью в области частых кулоновских соударений

В неизотермической плазме ($T_e > T_i$) ионно-звуковая ветвь непосредственно переходит в акустическую при $k \sim \nu_e / v_e$ (ν_e – частота парных столкновений электронов с электронами и ионами, ν_i – ионов друг с другом; v_e, v_i – тепловые скорости электронов, ионов соответственно: $v_{e,i}^2 = \frac{T_{e,i}}{m_{e,i}}$).

Вследствие этого распадное взаимодействие ионно-звуковых (s) и акустических (a) колебаний запрещено законами сохранения. Однако можно надеяться, что при определенном уровне (s) турбулентности электромагнитные свойства плазмы в области $\omega < \nu_e, \nu_i$ изменятся настолько, что появится возможность квазираспада. Для исследования этого эффекта получим по аналогии с /8,9/ тензор диэлектрической проницаемости плазмы для (а) колебаний в присутствии развитой (s) турбулентности.

Здесь мы будем следовать феноменологическому подходу, предложенному в /9,II/. Отвлекаясь от диссипативных эффектов, связанных с затуханием Ландау, для описания (s) колебаний используем адекватные уравнения бесстолкновительной гидродинамики /I2/.

$$\frac{\partial n_e}{dt} + div\, n_e \vec{v}_e = 0 \;, \quad \frac{\partial n_i}{dt} + div\, n_i \vec{v}_i = 0 \qquad (2.I)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \nabla)\vec{v}_e = -\frac{T_e}{m_e n_e}\nabla n_e + \frac{e}{m_e}\vec{E} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \nabla)\vec{v}_i = -\frac{e}{m_i}\vec{E} \;. \qquad (2.3)$$

Соответственно уравнения для н.ч. колебаний имеют вид:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(n_e \vec{V}_e) = 0 \quad , \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(n_i \vec{V}_i) = 0 \tag{2.4}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_e \nabla)\right] V_{e,\alpha} = -\frac{1}{m_e n_e}\frac{\partial n_e T_e}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{m_e n_e}\frac{\partial \pi_{e\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{e}{m_e} E_\alpha + \frac{1}{m_e n_e}\vec{R}_T \tag{2.5}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_i \nabla)\right] V_{i,\alpha} = -\frac{1}{m_i n_i}\frac{\partial n_i T_i}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{m_i n_i}\frac{\partial \pi_{i\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{e}{m_i} E_\alpha - \frac{1}{m_i n_i}\vec{R}_T \tag{2.6}$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_e \nabla\right) T_e + T_e \frac{\partial \vec{V}_e}{\partial \vec{r}} = -\frac{\pi_{e\alpha\beta}}{n_e}\frac{\partial V_{e\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{n_e}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{q}_e \tag{2.7}$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_i \nabla\right) T_i + T_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \vec{r}} = -\frac{\pi_{i\alpha\beta}}{n_i}\frac{\partial V_{i\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{n_i}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{q}_i \quad , \tag{2.8}$$

где

$$\vec{R}_T = -0.71\, n_e \frac{\partial T_e}{\partial \vec{r}} \quad , \quad \vec{q}_e = -3.16\, \frac{n_e T_e}{m_e \nu_e}\frac{\partial T_e}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{q}_i = -3.9\, \frac{n_i T_i}{m_i \nu_i}\frac{\partial T_i}{\partial \vec{r}} \quad , \quad \pi^e_{\alpha\beta} = -0.73\, \frac{n_e T_e}{\nu_e} W^e_{\alpha\beta}$$

$$\pi^i_{\alpha\beta} = -0.96\, \frac{n_i T_i}{\nu_i} W^i_{\alpha\beta} \; ; \quad W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta}\frac{2}{3}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} .$$

Необходимо отметить, что уравнения (2.4)-(2.8) записаны с учетом следующих упрощений:

I) нас интересует случай /9/ $\frac{m_e}{m_i}\nu_e \ll \omega \ll K v_e$, $K^2 v_e^2/\nu_e$ (это приводит к $\omega_\alpha \gg \frac{m_e}{m_i}\nu_e$, т.е. частота "акустической ветви" больше скорости выравнивания температур), поэтому величинами, пропорциональными $\delta\nu = 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e$, можно пренебречь;

2) пренебрегаем током смещения ($K v_e \ll \omega_{pe}$), полагая $V_i^R = V_e^R$ или $\vec{U} = \vec{V}_e - \vec{V}_i = 0$.

Систему исходных уравнений (2.I)-(2.8) будем решать методом, развитым в работе /9/, т.е. разложим все функции в ряд по амплитуде слабого регулярного поля E^R, предварительно разбив их на хаотические (турбулентные) и регулярные части.

Введем обозначения

$$\vec{E}=\vec{E}^R+\tilde{E}^{(0)}+\tilde{E}^{(1)},\quad n=n^R+\tilde{n}^{(0)}+\tilde{n}^{(1)},\quad \vec{V}=\vec{V}^R+\tilde{V}^{(0)}+\tilde{V}^{(1)} \qquad (2.9)$$

здесь $\vec{E}^R$, n^R, $\vec{V}^R$ – средние значения функций $\vec{E}$, n, $\vec{V}$ по статистическому ансамблю; $\tilde{E}^{(0)}$, $\tilde{n}^{(0)}$, $\tilde{V}^{(0)}$ не зависят от E^R, а $\tilde{E}^{(1)}$, $\tilde{n}^{(1)}$, $\tilde{V}^{(1)}$ – пропорциональны E^R.

Подставляя разложение (2.9) в уравнения (2.I)-(2.3) для интересующего нас случая, получаем соответственно:

$$\tilde{V}^{(0)}_{Ke}=-\frac{ie}{m_e}\frac{\omega}{K^2V_e^2}\tilde{E}^{(0)}_K\quad;\qquad \tilde{V}^{(0)}_{Ki}=-\frac{ie}{m_i}\frac{1}{\omega}\tilde{E}^{(0)}_K \qquad (2.10)$$

и для

$$\tilde{V}^{(1)}_{Ke}=-\frac{\omega_{pe}^2/K^2V_e^2}{\varepsilon^{\Lambda}(\omega,K)}\int\left[\frac{K_1'K_2'}{K_1\omega_2'}\frac{\omega_1}{\omega_1'}-\frac{(\vec{K}_1'\vec{K}_2')}{K_2'\omega_1}-\frac{(\vec{K}_1\vec{K}_1')}{K_1K_1'}\frac{K_2'}{\omega_2'}-\frac{(\vec{K}_1\vec{K}_2')}{K_1K_2'}\frac{K_1'}{\omega_1'}\right]\tilde{V}^{0}_{K_1'e}V^R_{K_2'e}\,d\lambda' \qquad (2.11)$$

$$V^{(1)}_{Ki}=-\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_1^2}\frac{1}{\varepsilon^{\Lambda}(\omega,K)}\int\!\!\int\left[\frac{K_1'K_2'}{K_1\omega_2'}\frac{\omega_1}{\omega_1'}-\frac{(\vec{K}_1'\vec{K}_2')}{K_2'\omega_1}-\frac{(\vec{K}_1\vec{K}_1')}{K_1K_1'}\frac{K_2'}{\omega_2'}-\frac{(\vec{K}_1\vec{K}_2')}{K_1K_2'}\frac{K_1'}{\omega_1'}\right]\tilde{V}^{(0)}_{K_1'e}V^R_{K_2'e}\,d\lambda' \;, \qquad (2.12)$$

где

$$\varepsilon^{\Lambda}(\omega,K)=1+\frac{\omega_{pe}^2}{K^2V_e^2}-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}$$ – линейная часть диэлектрической проницаемости плазмы.

При получении выражения (2.II), мы учитывали, что вклад $(\vec{V}_e^{(0)}\nabla)V_e^R$ меньше $\frac{v_e^2}{n_{0e}^2}\tilde{n}_e^{(0)}\nabla n_e^R$ на $\frac{v_p^2}{v_e^2}\sim\frac{m_i}{m_e}$, если $\omega\ll Kv_e$; поэтому вышеуказанной величиной можно пренебречь.

Проведя аналогичные рассуждения, уравнения (2.4)-(2.8) в фурье-компонентах можно записать в следующем виде:

$$\left(-i\omega+i\frac{K^2V_e^2}{\omega}\right)V^R_{Ke}=-1.71iKv_e^2\frac{T^R_{Ke}}{T_e}+\frac{e}{m_e}E^R_K+0.97\frac{v_e^2}{V_e}\int\left[K_1^2\frac{(\vec{K}\vec{K}_1)}{KK_1}\frac{K_2}{\omega_2}+\right. \qquad (2.13)$$

$$\left.+K_2^2\frac{(\vec{K}\vec{K}_2)}{KK_2}\frac{K_1}{\omega_1}\right]\tilde{V}^{(1)}_{K_1e}\tilde{V}^{(0)}_{K_2e}\,d\lambda \quad .$$

$$\left(-\frac{3}{2}i\omega+3.16\frac{K^2V_e^2}{\nu_e}\right)\frac{T_{Ke}^R}{T_e}=-iKV_{Ke}^R-\frac{2}{3}\frac{1.46}{\nu_e}\int\frac{2(\vec{K}_1\vec{K}_2)^2-[\vec{K}_1\vec{K}_2]^2}{K_1K_2}\tilde{V}_{K_1e}^{(1)}\tilde{V}_{K_2e}^{(0)}\,d\lambda$$

$$\left(-i\omega+i\frac{K^2V_i^2}{\omega}\right)V_{K_i}^R=-iKV_i^2\frac{T_{Ki}^R}{T_i}+0.71iKV_i^2\frac{T_{Ke}^R}{T_i}-\frac{e}{m_i}E_K^R+ \tag{2.14}$$

$$+1.28\frac{V_i^2}{\nu_i}\int\left[K_1^2\frac{(\vec{K}\vec{K}_1)}{KK_1}\frac{K_2}{\omega_2}+K_2^2\frac{(\vec{K}\vec{K}_2)}{KK_2}\frac{K_1}{\omega_1}\right]\tilde{V}_{K_1i}^{(1)}\tilde{V}_{K_2i}^{(0)}\,d\lambda$$

$$\left(-\frac{3}{2}i\omega+3.9\frac{K^2V_i^2}{\nu_i}\right)\frac{T_{Ki}^R}{T_i}=-iKV_{Ki}^R-\frac{1.28}{\nu_i}\int\frac{2(\vec{K}_1\vec{K}_2)^2-[\vec{K}_1\vec{K}_2]^2}{K_1K_2}\tilde{V}_{K_1i}^{(1)}\tilde{V}_{K_2i}^{(0)}\,d\lambda$$

Подставляя (2.II) и (2.I2) в (2.I3), (2.I4) и решая получившуюся систему совместно с

$$\operatorname{div}\vec{E}^R=4\pi e\,(n_e^R-n_i^R)$$

для продольной части нелинейного тензора диэлектрической проницаемости плазмы, получаем следующее выражение:

$$\varepsilon^H(\omega,K)=1+i\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega\omega_i}+i\frac{\omega_{pe}^2}{\omega\omega_e}\cdot\frac{1+\beta_i}{1+\beta_e}=0\quad, \tag{2.15}$$

где

$$\omega_i=-i\omega+i\frac{KV_i^2}{\omega}+\frac{K^2V_i^2}{\Omega_i}-0.71\frac{T_e}{T_i}\frac{K^2V_i^2}{\Omega_e}$$

$$\omega_e=-i\omega+i\frac{K^2V_e^2}{\omega}+1.71\frac{K^2V_e^2}{\Omega_e}$$

$$\Omega_i=\frac{3}{2}i\omega+3.9\frac{K^2V_i^2}{\nu_i}\quad,\quad\Omega_e=-\frac{3}{2}i\omega+3.16\frac{K^2V_e^2}{\nu_e}\,\cdot$$

$$\beta_i=1.28\,i\frac{m_e}{m_i}\frac{T_i}{T_e}\frac{\omega_{pe}^2K}{\nu_i\omega_i\Omega_i}\int\frac{2K_1^2(4)}{K_-^2\varepsilon(\omega_-,K_-)}\left|\tilde{V}_{K_1}^{(0)}\right|^2d\vec{K}_1\,d\omega_1$$

$$\beta_e=-0.97\frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e\omega_eK}\int\frac{2(4)(\vec{K}\vec{K}_1)K_1^2}{\omega_1K_-^2\varepsilon(\omega_-,K_-)}\left|\tilde{V}_{K_1}^{(0)}\right|^2d\vec{K}_1\,d\omega_1$$

$$(4)=-\frac{KK_1}{\omega K_-}\frac{\omega_-}{\omega_1}+\frac{(\vec{K}\vec{K}_1)}{K\omega_-}+\frac{(\vec{K}_1\vec{K}_-)}{K_1K_-}\frac{K}{\omega}+\frac{(\vec{K}\vec{K}_-)}{KK_-}\frac{K_1}{\omega_1}.$$

Для исследования дисперсионных свойств плазмы в выражении (2.I5) удобно выделить линейную часть диэлектрической проницаемости и записать дисперсионное уравнение в виде:

$$L + \beta = 0, \tag{2.I6}$$

здесь

$$L = 1 + \frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_e}{\omega_i}$$

$$\beta = 0.97\,\frac{m_e^2}{m_i^2}\frac{K^4 v_e^4}{\nu_e \omega_i}\frac{1}{nT_e}\int \frac{K_1^2(\vec{K}\vec{K}_1)^2}{K^6}\frac{(\vec{K}\frac{\partial}{\partial \vec{K}_1})N_{\vec{K}_1}^{e}}{\omega - \vec{K}\vec{v}_g}\,d\vec{K}_1 - 2.56\,i\,\frac{m_e^2}{m_i^2}\frac{K^4 v_e^4}{\nu_e \omega_i}\,\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{nT_e}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2}\frac{K v_e}{\Omega_i}\int\frac{K_1^3(\vec{K}\vec{K}_1)}{K^5}\frac{N_{\vec{K}_1}^{e}}{\omega - \vec{K}\vec{v}_g}\,d\vec{K}_1 .$$

Последнее выражение получено при учете $K \ll K_1$ $(K_- \approx K_1)$, а $\vec{v}_g = \frac{\partial \omega_\kappa}{\partial \vec{K}}$ – групповая скорость высокочастотных (s) колебаний, $N_{\vec{K}_1}^{e}$ –число плазмонов ионно-звуковых волн, которое может быть определено из соотношения

$$W^e = \int \omega_{\vec{K}_1} N_{\vec{K}_1}^{e}\, d\vec{K}_1 .$$

§ 3. Низкочастотные неустойчивости ионно-звуковой турбулентности

Рассмотрим теперь исходное дисперсионное уравнение

$$L + \beta = 0. \tag{3.I}$$

Для дальнейшего решения данного уравнения вычислим вначале интегралы, выходящие в выражение β , которые в дальнейшем мы обозначим через

$$J_1 = \int \frac{K_1^2 (\vec{K}\,\vec{K}_1)^2}{K^6} \, \frac{(\vec{K}\,\frac{\partial}{\partial \vec{K}_1}) N^{\ell}_{\vec{K}_1}}{\omega - \vec{K}\,\vec{v}_g} \, d\vec{K}_1 \tag{3.2}$$

$$J_2 = \int \frac{K_1^3 (\vec{K}\vec{K}_1)}{K^5} \, \frac{N^{\ell}_{\vec{K}_1}}{\omega - \vec{K}\,\vec{v}_g} \, d\vec{K}_1 . \tag{3.3}$$

После элементарного интегрирования по углам [ж)], а затем по частям, получаем соответственно:

$$J_1 = + \frac{W^{\ell}}{K^2 v_s^2} \frac{\omega_{pe}^2}{K_1^2 v_e^2} \frac{K_1^2}{K^2} \left[\frac{4}{3} + 4\varkappa^2 + 2\varkappa^3 \ln \frac{|\varkappa - 1|}{\varkappa + 1} \right]$$

$$J_2 = - \frac{W^{\ell}}{K^2 v_s^2} \frac{\omega_{pe}^2}{K_1^2 v_e^2} \frac{K_1^3}{K^3} \left(1 + \frac{\varkappa}{2} \ln \frac{|\varkappa - 1|}{\varkappa + 1} \right) ,$$

где $\qquad \varkappa = \dfrac{\omega}{K v_s}$.

Таким образом, дисперсионное уравнение приобретает следующий вид:

$$1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_e}{\omega_i} + 0{,}97 \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e \omega_i} \frac{W^{\ell}}{n T_e} \left[\frac{4}{3} + 4\varkappa^2 + 2\varkappa^3 \ln \frac{|\varkappa - 1|}{\varkappa + 1} \right] + \tag{3.4}$$

$$+ 2{,}56\, i \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e \omega_i} \frac{W^{\ell}}{n T_e} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{5/2} \frac{K_1 v_e}{\Omega_i} \left(1 + \frac{\varkappa}{2} \ln \frac{|\varkappa - 1|}{\varkappa + 1} \right) = 0 ,$$

где для интересующего нас случая: $\frac{m_e}{m_i} \nu_e \ll \omega \ll K v_e$, $K^2 v_e^2 / \nu_e$
$\omega_i \to -i\omega$, $\omega_e \to i \frac{K^2 v_e^2}{\omega}$, $\Omega_i \to -\frac{3}{2} i \omega$.
вместо (3.4) имеем:

$$1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2} + 0{,}97\, i \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e} \frac{u}{\omega} \left[\frac{4}{3} + 4\varkappa^2 + 2\varkappa^3 \ln \frac{|\varkappa - 1|}{\varkappa + 1} \right] -$$

$$- 2{,}56 \cdot \frac{2}{3} i \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e} K_1 v_e \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{5/2} \frac{u}{\omega^2} \left(1 + \frac{\varkappa}{2} \ln \frac{|\varkappa - 1|}{\varkappa + 1} \right) = 0 ,$$

$$u = \frac{W^{\ell}}{n T_e} .$$

[ж)] При интегрировании по углам мы считаем (S) турбулентность изотропной.

Данное уравнение в общем виде решить довольно сложно, поэтому мы рассмотрим два крайних случая:
I) $\varkappa \gg 1$ и 2) $\varkappa \ll 1$.

Для первого случая получаем уравнение

$$\omega^4 - \omega_a^2\omega^2 - 0.78 i \frac{m_e}{m_i}\omega_a^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e} u\omega + 0.57 i \frac{m_e}{m_i}\omega_a^2\omega_{pe}^2 \frac{K_1 v_e}{\nu_e}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2} u = 0,$$

которое при $\omega \gg \omega_a$ имеет неустойчивое решение

$$\gamma \approx \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4}\omega_a\left(\frac{K_1 v_e}{\nu_e}\right)^{1/4}\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_a}\right)^{1/2}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/8} u^{1/4}, \tag{3.5}$$

справедливое при

$$u \gg \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2}\frac{K^2}{K_1^2}\frac{K_1 v_e}{\omega_{pe}}\frac{\nu_e}{\omega_{pe}}. \tag{3.6}$$

В случае $\varkappa \ll 1$ имеем

$$-1{,}3\,\omega u \frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e}\frac{m_e}{m_i} = i\omega_a^2 - 1{,}7\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e}K_1 v_e\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2} u \tag{3.7}$$

$$\omega = -i\frac{\omega_a^2}{\omega_\sim^2} + K_1 v_e\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2},$$

где $\omega_\sim^2 \approx 1.3\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e}u$.

В силу условия $\omega \ll K v_s$ получим, что решение (3.7) существует лишь, если выполнено (3.6) и $\frac{T_e}{T_i} \gg \left(\frac{K_1}{K}\right)^{2/5}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/5}$, т.е. степень неизотермичности плазмы должна быть довольна велика.

Наконец, можно рассмотреть случай $\varkappa \to 1$, так что $\varkappa - 1 \ll 1$. Полагая теперь $\varkappa - 1 = \pm\delta$, будем решать (3.4) методом последовательных приближений, оставляя для простоты лишь последний ионный член, пропорциональный u, и отбрасывая электронный. В результате получим

$$2\delta = 1.7\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e}\frac{K_1 v_e}{K^2 v_a^2}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2} u\left(1 - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{|\delta|} + i\arg(\delta)\right) \quad \text{при } \varkappa = 1+\delta$$

(3.8)

и $$2\delta = -1.7\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e}\cdot K_1 v_e\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2}\frac{u}{K^2 v_a^2}\left(1 - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{|\delta|} + i\pi + i\arg(\delta)\right). \quad \text{при } \varkappa = 1-\delta$$

Легко проверить, что первое из выписанных уравнений имеет только устойчивые решения с $\operatorname{Im}\delta = \operatorname{Im}\omega < 0$. Второе уравнение приводит к $\operatorname{Re}\delta > 0$, и неустойчивости, определяемой из условия $\operatorname{Im}\delta = -\operatorname{Im}\omega < 0$ или $\ln\frac{2}{|\delta|} < 2$,

поэтому

$$|\delta| > \frac{2}{e^2} \simeq 0.27. \tag{3.9}$$

Условие неустойчивости (3.9), строго говоря, противоречит предположенному $|\delta| \ll 1$, т.к. решение в этом случае найдено довольно грубо с точностью до 30%. Тем не менее полуколичественные выводы могут быть сделаны: в области $\varkappa \longrightarrow 1$ при условии (3.9) возможно существование неустойчивых решений для акустических колебаний, фазовая скорость, которая меньше v_g – групповой скорости ионно-звуковых. Оценивая $|\delta|$ из уравнения (3.8), находим, что (3.9) аналогично (3.6) с точностью до численного коэффициента, следовательно, пороговое значение энергии ионно-звуковой турбулентности определяется из уравнения

$$\frac{m_e}{m_i}\,\frac{\omega_{pe}^2}{\nu_e}\,\frac{K_1 v_e}{K^2 v_\alpha^2}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2} U_{tz} \simeq 0.3. \tag{3.10}$$

Это соотношение можно переписать в более наглядном виде

$$U_{tz} = \left[\frac{K^2}{K_1^2}\,\frac{\nu_e}{K_1 v_e}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2}\right] K_i^2 d_e^2, \tag{3.11}$$

откуда видно, что упомянутый выше коэффициент есть

$$\alpha = \frac{K^2}{K_1^2}\,\frac{\nu_e}{K_1 v_e}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2}.$$

Это соотношение может быть легко получено из простых физических соображений при учете того факта, что основной вклад в нелинейные взаимодействия (s) и (a) волн дают члены, пропорциональные тензору вязких напряжений $\pi_{\alpha\beta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.К.Завойский и Л.И.Рудаков.
Физика плазмы (коллективные процессы и турбулентный нагрев).
"Знание" М. 1967. Атомная энергия, 23, 417, 1967.
2. S.M. Hamberger and L.E. Sharp in Proceed.of IV Eur. Conf. on
Plasma Phys. and Contr. Fusion (Rome) p. 64,65, 1970.
3. S.M. Hamberger, M. Friedman. Phys. Rev. Lett., 21, 674, 1968.
Б.А.Демидов, Н.И.Елагин, С.Д.Фанченко. ДАН СССР, 174, 327, 1967.
4. Б.Б.Кадомцев."Вопросы теории плазмы" т.4, стр.188. Атомиздат,
М. 1964.
В.И.Петвиашвили, ДАН СССР, 153, 1295, 1963.
5. И.А.Ахиезер, ЖЭТФ, 47, 2269, 1964; 47, 952, 1964.
6. К.Н.Степанов, В.Л.Сизоненко. Письма ЖЭТФ, 9, 468, 1969.
L.I. Rudakov, V.N. Tsytovich, Plasma Phys., (in print),
Preprint No28 of Lebedev. Phys. Institute, 1970.
7. A.A. Vedenov, A.V. Gordeev, L.I. Rudakov. Plasma Phys., 9, 719, 1967.
В.Н.Цытович. ДАН СССР, 181, 1968.
8. Ю.А.Алиев, В.П.Силин, ЖЭТФ, 48, 901, 1965.
В.П.Силин, ЖЭТФ, 48, 1679, 1965.
Л.М.Горбунов. "Гидродинамика плазмы в сильном ВЧ поле".
Препринт ФИАН, № 174, 1969.
9. В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов. ЖЭТФ, 57, 877, 1969.
10. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в
теории нелинейных колебаний. Ф.М, М. 1963.
11. V.G. Makhankov, V.N. Tsytovich, Plasma Phys., 12, 741, 1970.
12. Т.Ф.Волков. "Вопросы теории плазмы", т.4, стр.3. Атомиздат, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июня 1971 года.