

ЖТФ, 1971, т. 41 № 9, с. 1851-1857

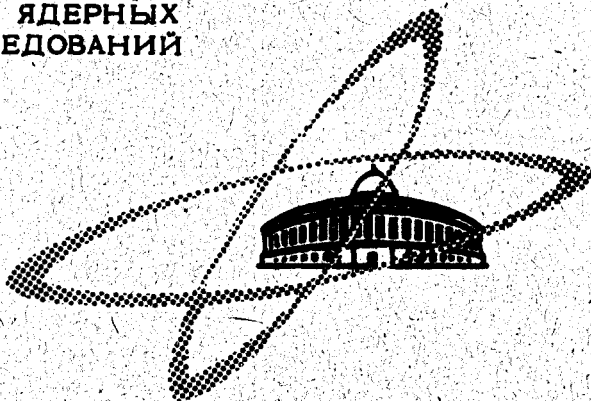
19/x-70

К-891

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9-5247



А.Б. Кузнецов, С.Б. Рубин

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

К ВОПРОСУ О ТОРМОЖЕНИИ
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЗАРЯДА
ПРИ ПРОЛЕТЕ МИМО ИДЕАЛЬНО
ПРОВОДЯЩЕГО ПРЕПЯТСТВИЯ

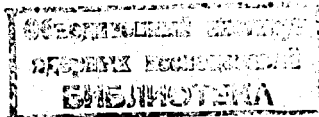
1970

P9-5247

А.Б. Кузнецов, С.Б. Рубин

К ВОПРОСУ О ТОРМОЖЕНИИ
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЗАРЯДА
ПРИ ПРОЛЕТЕ МИМО ИДЕАЛЬНО
ПРОВОДЯЩЕГО ПРЕПЯТСТВИЯ

Направлено в ЖТФ



Анализ ряда работ (см., например, ^{/1/}) показывает, что энергия, теряемая ультрарелятивистским зарядом на возбуждение излучения при пролете мимо одиночного препятствия, пропорциональна его полной энергии $\mathcal{E} = Mc^2\gamma$, но распределения потерь энергии вдоль траектории заряда ни в одной из работ, посвященных данному вопросу, не дается. Между тем четкие представления о таком распределении имеют важное значение с точки зрения учёта данного явления в коллективном ускорителе, где ускоряются компактные сгустки частиц с большим зарядом и теряемая ими энергия при пролете мимо неоднородностей в ускорительном тракте может иметь заметную величину, которую необходимо учитывать при проектировании ускорителя. Вопрос заключается в частности в том, чем определяется рост потерь с увеличением релятивистского фактора γ : ростом амплитуды тормозящей силы, или увеличением пути, на котором эта сила имеет заметную величину.

Для выяснения физики процесса торможения в сложном ускоряющем тракте представляет интерес также, как восстанавливается величина полного поля в области тени после пролета заряда мимо препятствия. Хорошей модельной задачей для выяснения этих вопросов является задача о пролете заряженной нити мимо идеально проводящей полуплоскости (схему см. на рис. 1). Задача имеет точное решение, которое было получено Болотовским и Воскресенским ^{/2/}. Анализ этого решения с указанной целью и проведен в настоящей работе.

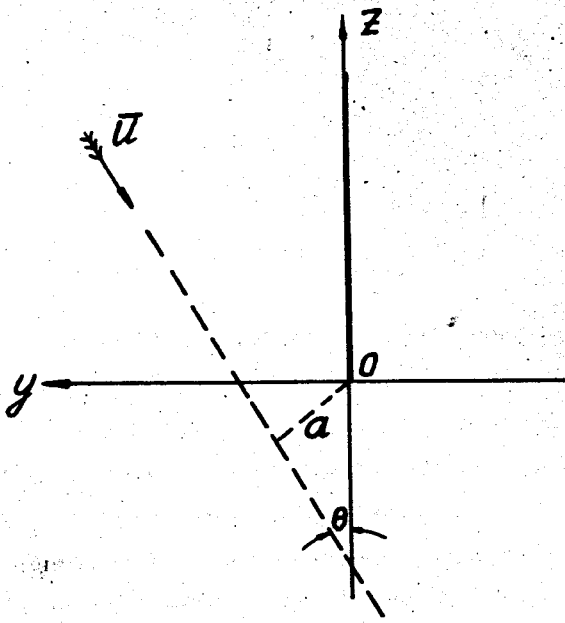


Рис. 1.

В работе^{1/2/} приведено точное выражение для вектора Герца вторичного поля, которое может быть представлено в виде:

$$\Pi_z = \frac{q}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(\frac{i}{\beta} \sin \theta - \Gamma \cos \theta \right) \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[\sqrt{k^2 - w^2}|y| + \omega z - kct + ik\Gamma a]} dw}{\sqrt{k^2 - w^2} \sqrt{k-w} \left(w + \frac{k}{\beta} \cos \theta - ik\Gamma \sin \theta \right)} \right\}$$

В этом выражении q - заряд единицы длины нити, $\Gamma = \frac{1}{\beta y}$, $\operatorname{Im} \sqrt{k^2 - w^2} \geq 0$ и берется та ветвь выражения $\sqrt{k-w}$, которая положительна при $w \rightarrow -\infty$. В плоскости комплексного переменного w с двумя разрезами, выходящими из точек $w = \pm k$ (разрез из точки $w = k$ уходит в верхнюю полуплоскость w , а из точки $w = -k$ - в нижнюю полуплоскость w), выражение (1) однозначное.

Выражения для полей по обычным формулам получаются из (1) в виде аналогичных интегралов. После замены переменной $w = ku$ интегралы,

входящие в выражения для полей, вычисляются по k , а затем вычисляются контурные интегралы по u . В результате для полей получают следующие формулы:

$$E_y = \frac{2q\zeta}{aR} \operatorname{sign} p \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} \frac{\sin\theta + i\Gamma \cos\theta}{\sqrt{1+u_0}} \left[\frac{u_0\sqrt{1+u_0}}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)} - \frac{u_1\sqrt{1+u_1}}{(u_0-u_1)(u_1-u_2)} + \frac{u_2\sqrt{1+u_2}}{(u_0-u_2)(u_1-u_2)} \right] \right\} \quad (2)$$

$$E_z = \frac{2q}{aR} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} \frac{\sin\theta + i\Gamma \cos\theta}{\sqrt{1+u_0}} \left[\frac{(u_0\xi - \eta + i\frac{\Gamma}{R})\sqrt{1-u_0}}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)} - \zeta \frac{(1+u_1)\sqrt{1-u_1}}{(u_0-u_1)(u_1-u_2)} + \zeta \frac{(1+u_2)\sqrt{1-u_2}}{(u_0-u_2)(u_1-u_2)} \right] \right\} \quad (3)$$

$$H_x = -\frac{2q\zeta}{aR} \operatorname{sign} p \operatorname{Im} \left\{ \frac{\frac{1}{\beta} \sin \theta + i\Gamma \cos \theta}{\sqrt{1+u_0}} \left[\frac{\sqrt{1+u_0}}{(u_0-u_1)(u_0-u_2)} - \frac{\sqrt{1+u_1}}{(u_0-u_1)(u_1-u_2)} + \frac{\sqrt{1+u_2}}{(u_0-u_2)(u_1-u_2)} \right] \right\}. \quad (4)$$

Для тока, возбужденного на экране, имеем:

$$j = \frac{cq}{\pi a R} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\frac{1}{\beta} \cos \beta + i\Gamma \sin \theta}{\sqrt{1+u_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\eta + i\frac{\Gamma}{R} \left[\eta + \frac{1}{\beta} \cos \theta - i \left(1 + \frac{1}{R}\right) \Gamma \sin \theta \right]}} \right\}. \quad (5)$$

Здесь введены обозначения

$$u_0 = -\frac{1}{\beta} \cos \theta + i\Gamma \sin \theta$$

$$u_1 = \xi \left(\eta - i \frac{\Gamma}{R} \right) + \zeta \sqrt{1 - \left(\eta - i \frac{\Gamma}{R} \right)^2}$$

$$u_2 = \xi \left(\eta - i \frac{\Gamma}{R} \right) - \zeta \sqrt{1 - \left(\eta - i \frac{\Gamma}{R} \right)^2}$$

$$p = \frac{y}{a}; \quad R = \frac{z^2 + y^2}{a}; \quad \xi = \frac{z}{aR}; \quad \zeta = \frac{|y|}{aR}; \quad \eta = \frac{ct}{aR} x/$$

x/ См. приложение А.

Сила, действующая на единицу длины нити вдоль ее движения, определяется выражением

$$F = -q [E_y \sin \theta + E_z \cos \theta],$$

где поля берутся в месте нахождения нити, определяемом уравнениями

$$y = a \cos \theta - \beta ct \sin \theta, \quad z = -a \sin \theta - \beta ct \cos \theta. \quad (6)$$

Используя (2) и (3) после предельного перехода при подстановке в них выражений (6) или путём непосредственного вычисления контурных интегралов по u при условии (6), получаем следующее явное выражение для силы F , ($\tau = \frac{ct}{a}$).

$$F = - \frac{q^2}{2a} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 \tau^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 \tau^2}} \{ 1 + \beta \cos \theta - \right.$$

$$- r \beta^2 \sin \theta + r^2 \beta^3 [(2 - \beta^2) + (2 + \beta^2) \beta \cos \theta] - r^3 \beta^4 (2 + \beta^2) \sin \theta +$$

$$+ \frac{r^4 \beta^4}{\gamma^2} (1 + \beta \cos \theta) - \frac{r^5 \beta^6}{\gamma^2} \sin \theta \} - \left\{ \frac{\sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} - r \beta [\beta + \right.$$

$$+ (1 + 2\beta^2) \cos \theta] + r^2 \beta^2 \left[3 + \frac{2\beta \cos \theta}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)} \right] \sin \theta -$$

$$\left. - \frac{r^3 \beta^3 (\beta + \cos \theta)}{\gamma^2} + \frac{r^4 \beta^4}{\gamma^2} \left[1 + \frac{1}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)} \right] \sin \theta \right\}]. \quad (7)$$

На рис. 2 приведены графики зависимости величины $\frac{2aF}{q^2}$ от времени для случая $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 2$ и $\gamma = 20$ (в этом случае, согласно (6), координата нити вдоль траектории и время связаны соотношением $y = -c\beta t$). Из графиков видно, что при подлете к препятствию ($y > 0$, $t < 0$) на нить действует некоторая ускоряющая сила, связанная с притяжением наведенными на полуплоскости зарядами. В ультрарелятивистском случае действие ускоряющей силы существенно слабеет, а действие тормозящей силы, имеющее место в области $t > 0$, $y < 0$ (после пролета препятствия), растет. Последняя зависимость хорошо видна из асимптотических выражений, полученных для случая, когда $\gamma \gg 1$ и $t > 0$.

$$F = -\left(\frac{q^2}{2a}\right) \frac{4T(2+T^2)}{(1+T^2)^2} \quad \text{при } \theta = 0 \quad (8)$$

$$F = -\left(\frac{q^2}{2a}\right) \frac{2T(3+T^2)}{(1+T^2)^2} \quad \text{при } \theta = \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

$$F = -\left(\frac{q^2}{2a}\right) \frac{2T(2+\frac{1}{\gamma^2}T^2)}{(1+T^2)^2} \quad \text{при } \theta = \pi \quad (10)$$

Здесь для наглядности введена переменная $T = \frac{ct}{ay}$. Отсюда видно, что тормозящая сила приблизительно линейно нарастает по мере удаления нити от препятствия и достигает своего максимального значения, не зависящего от фактора γ , на расстоянии порядка $0,7 ay$, а далее спадает приблизительно по гиперболическому закону. Этот факт имеет довольно простое физическое объяснение. Нить, пролетая мимо края полуплоскости, возбуждает импульс вторичного поля. Пространственная протяженность этого импульса в направлении его распространения пропорциональна $\frac{a}{\gamma}$. Так как он распространяется со скоростью света, и, следовательно, его скорость относительно нити про-

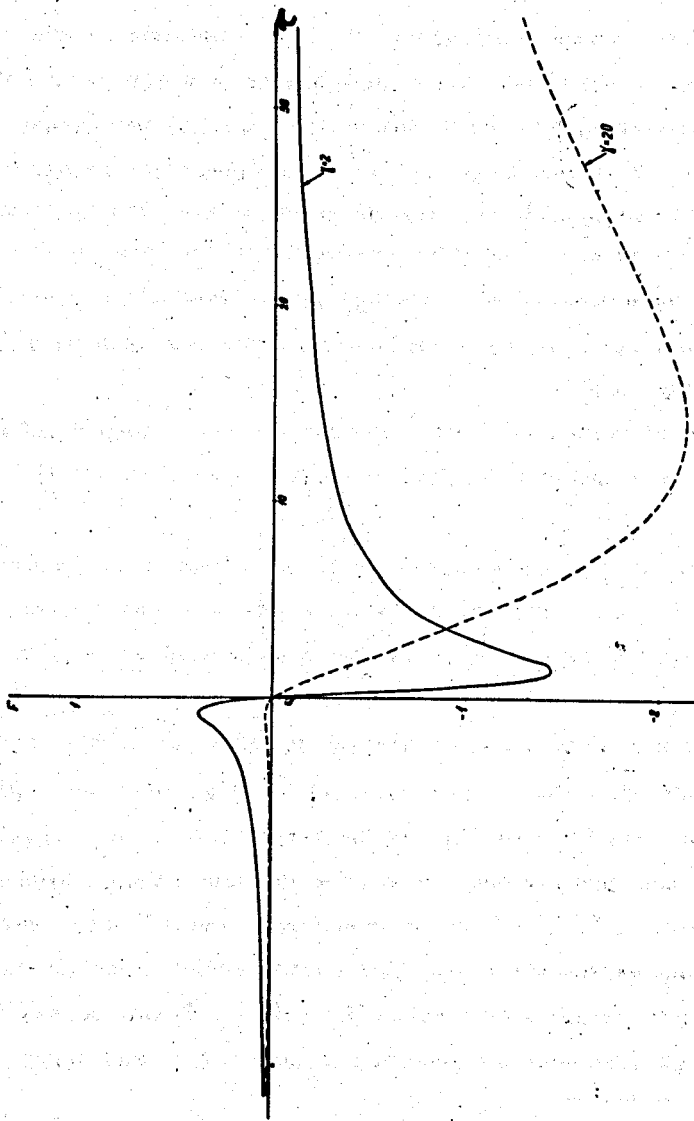


Рис. 2.

порциональна $\frac{c}{y^2}$, то время, за которое импульс поля обгоняет нить; пропорционально $\frac{ay}{c}$.

Линейный рост "длины торможения" с y и независимость от U максимума силы объясняют известный линейный закон увеличения потерь энергии. Отметим, что логарифмическая расходимость полного интеграла от силы (7) вдоль пути связана с двумерностью задачи и не имеет физического смысла. Качественный вывод о том, что рост потерь связан с пропорциональным y увеличением пути, на котором осуществляется существенное торможение, очевидно, останется справедливым и для других случаев, когда ультрарелятивистский сгусток пролетает мимо одиночного препятствия.

Основываясь на формулах (2-4)^{x/}, мы провели более подробный анализ вторичного и полного поля в области тени ($z \geq 0$; $y \leq 0$; $t > 0$), при $\theta = \frac{\pi}{2}$.

По-видимому, этот анализ позволяет сделать некоторые заключения о важном с точки зрения ускорения процессе взаимодействия ультрарелятивистского заряда со структурой, состоящей из ряда препятствий.

Как показывают расчёты, выполненные на ЭВМ, вторичное поле (\vec{E}', \vec{H}') представляет собой совокупность двух волн - плоской и цилиндрической (см. рис. 3.). Плоская неоднородная волна $(\vec{E}'_{пл}, \vec{H}'_{пл})$, формируемая токами, возбужденными на всей площади экрана, имеет групповую скорость $c\beta$. Эта волна полностью "гасит" поле нити в зоне тени. От области кромки экрана распространяется со скоростью c цилиндрическая неоднородная волна $(\vec{E}'_{ц}, \vec{H}'_{ц})$. Таким образом, в той области тени (назовем ее областью полной тени), где цилиндри-

^{x/} В развернутой форме эти формулы приведены в приложении В.

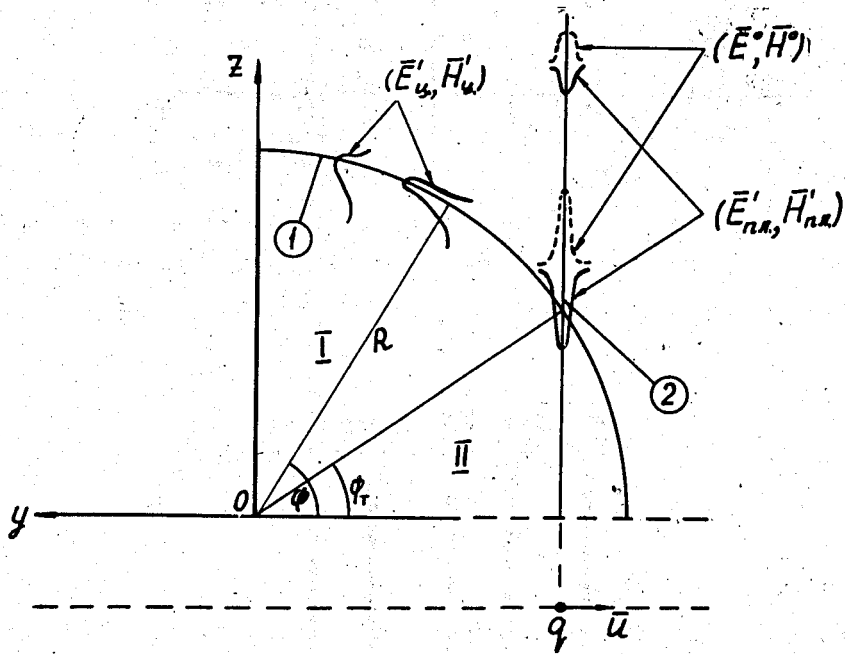


Рис. 3.

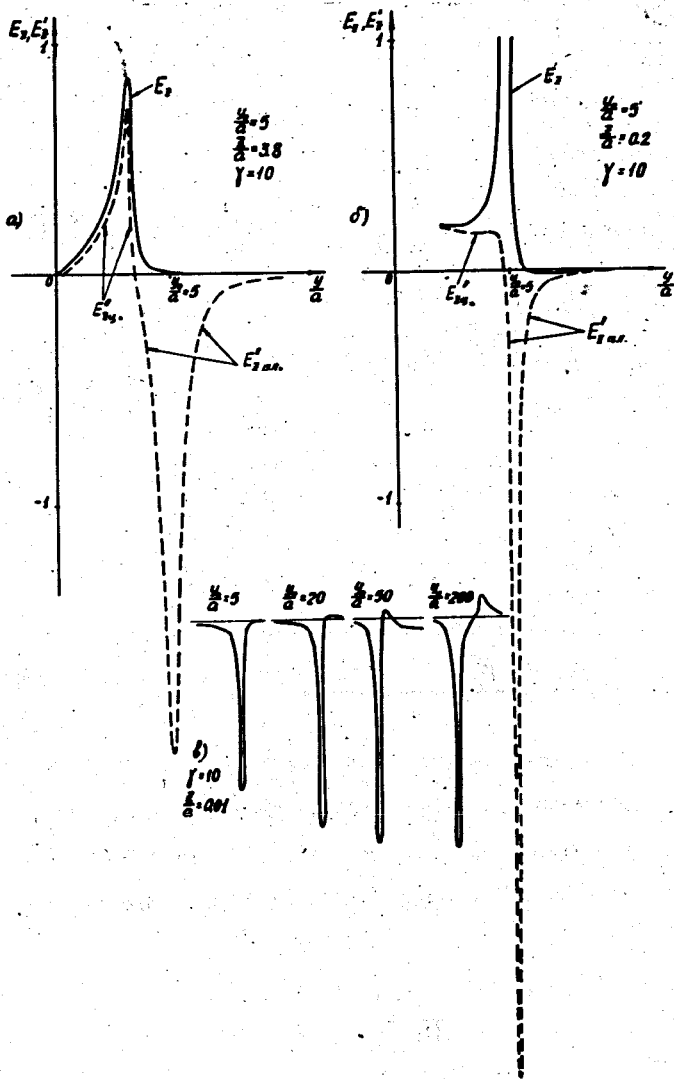


Рис. 4.

ческая волна еще не догнала фронт вторичной плоской волны, полное поле представляется именно этой цилиндрической волной (см. рис. 4а). На рисунке приведен профиль волны (компоненты E_z в зависимости от $\frac{y}{a}$) полного поля - сплошная кривая и вторичного поля - пунктирная кривая в области тени (при $\frac{z}{a} = 3,8$), вычисленных на ЭВМ^{х/}.

Положение нити относительно экрана соответствует значению $\frac{y_0}{a} = 5$. Хорошо видны обе составные части вторичной волны. Нижняя часть графика соответствует неоднородной плоской волне, верхняя часть относится к неоднородной цилиндрической волне. Цилиндрическая волна имеет форму импульса с резким передним фронтом и более медленно спадающим задним фронтом. Ширина импульса обратно пропорциональна γ . Действительно, в окрестности фронта, определяемого величиной $\eta = 1$, при $\gamma \gg 1$ поля (записанные в цилиндрической системе координат) можно приближенно представить:

$$E_{\phi} = -H_x = \frac{q\sqrt{\gamma}}{a\sqrt{R}} \frac{\sqrt{1 + \sin \phi}}{\sin \phi} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \epsilon^2} + \epsilon}{1 + \epsilon^2}}, \quad E_r = 0, \quad (11)$$

где $\epsilon = \gamma R (\eta - 1)$, угол ϕ показан на рис. 3. Например, из (11) следует, что ширина импульса по ϵ на полувысоте равна θ . Отсюда, пересчитывая, получим временную ширину импульса $\Delta t = \frac{9a}{c\gamma}$. Расчёт, выполненный по формуле (11) для тех же значений параметров, что и на рис. 4а, хорошо согласуется с расчётом по громоздким точным формулам.

Выражение (11) справедливо, однако, только в области

$$\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{\gamma}} \geq \phi \geq \frac{\pi}{\gamma} + \sqrt{\frac{m^2 + 1}{\gamma^2} + \frac{2(m + \epsilon_r)}{\gamma R}} \equiv \phi_T,$$

^{х/} Величины поля отнесены к $\frac{q}{2a}$.

где m, ϵ_1 - числа порядка 1-2, характеризующие границы фронтов плоской волны (число m) и переднего фронта цилиндрической волны (ϵ_1). В области $0 \leq \phi \leq \phi_T$ происходит интерференция цилиндрической и плоской волн вторичного поля. Эту область можно назвать областью полутени. В результате интерференции обе волны частично гасятся и преобразуются в одну цилиндрическую неоднородную волну, движущуюся со скоростью c .

Из формул (11) видно, что амплитуда поля в области полной тени пропорциональна \sqrt{y} и растет по мере приближения к границе ϕ_T с областью полутени. При $\phi = \phi_T$ амплитуда поля оказывается пропорциональной y (при $m = \epsilon_1 = 2$ и $R \ll y$ амплитуда поля порядка $\frac{2q}{a} \frac{y}{4\sqrt{2}}$). На границе света и тени ($\phi = 0$) для амплитуды полного поля E_{z_A} можно получить приближенное выражение

$$E_{z_A} = \frac{2q}{a} \frac{y}{2}. \quad (12)$$

Эта величина в два раза меньше поля нити в этой точке.

Таким образом, в области полутени, угловая ширина которой при $R \ll y$ пропорциональна $y^{-1/2}$, амплитуды полей E_z и H_x пропорциональны y и быстро спадают по мере увеличения ϕ .

Процесс восстановления первичного поля в области полутени ($\frac{z}{a} = 0.2$) хорошо виден на рис. 4б^{x/}, где профиль волны вторичного поля в нижней части графика имеет значительно меньшую ширину, чем на рис. 4а, за счёт резкого увеличения крутизны заднего фронта. Следовательно, профиль волны полного поля расширяется, как

^{x/} Расчёт выполнен по точным формулам. (Положение нити относительно экрана $\frac{y_0}{a} = 5$).

это и видно на графике, вначале за счёт восстановления заднего фронта первичного поля и при $R > \gamma$ восстанавливается передний фронт; на рис. 4в показан профиль волны полного поля E_z для случая $\gamma = 10$, $\frac{z}{a} = 0.01$ для разных моментов времени (когда нить находится на расстояниях $\frac{y_0}{a} = 5; 20; 50; 200$). Видно, как постепенно восстанавливается передний фронт импульса и видна сформировавшаяся цилиндрическая волна, обогнавшая импульс первичного поля.

Были проведены расчёты потока вектора Пойнтинга, проинтегрированного по времени, для полного поля, падающего на второй (воображаемый) экран в виде полуплоскости ($z > 0$), отстоящей на разных расстояниях $\frac{y}{a}$ от реального экрана. Результаты приведены на рис. 5. Кривая 1 дает зависимость потока от γ при фиксированном y/a . Эта зависимость несколько более слабая, чем закон $\approx \gamma^{1/2} x'$. Кривая 3 дает зависимость потока от $\frac{y}{a}$ при постоянном γ (равном 20). Она соответствует закону $\approx (\frac{y}{a})^{1/2}$ при $\frac{y}{a} < \gamma^2$, а далее выходит на плато.

Реальный вторичный экран, в свою очередь, переизлучал бы падающий на него поток, а при расстояниях между экранами $\frac{y}{a} > 1$ при $\gamma \gg 1$ за этот падающий поток можно принять поток, описанный выше. Для сравнения характера переизлученного вторым экраном поля со вторичным полем первого экрана существенен характер возбуждаемых на них токов. Для случая $\Theta = \frac{\pi}{2}$ выражение (5) для тока на первом экране можно привести к виду

$$j = \frac{c q}{2 \pi a} \sqrt{\rho} \frac{\sqrt{(\rho - \delta)^2 + 1} + (\rho - \delta) \left(1 + \Gamma \rho - \frac{\beta \Gamma}{1 + \beta} \delta\right) - \sqrt{(\rho - \delta)^2 + 1} - (\rho - \delta) \left[\left(\delta + (1 + \Gamma \rho) \frac{\Gamma \beta}{1 + \beta}\right)\right]}{\sqrt{(\rho - \delta)^2 + 1} [\delta^2 + (1 + \Gamma \rho)^2]} \quad (13)$$

x' Зависимость $\approx \gamma^{1/2}$ была получена Лауссоном /5/ и представлена на рис. 5 кривой 2.

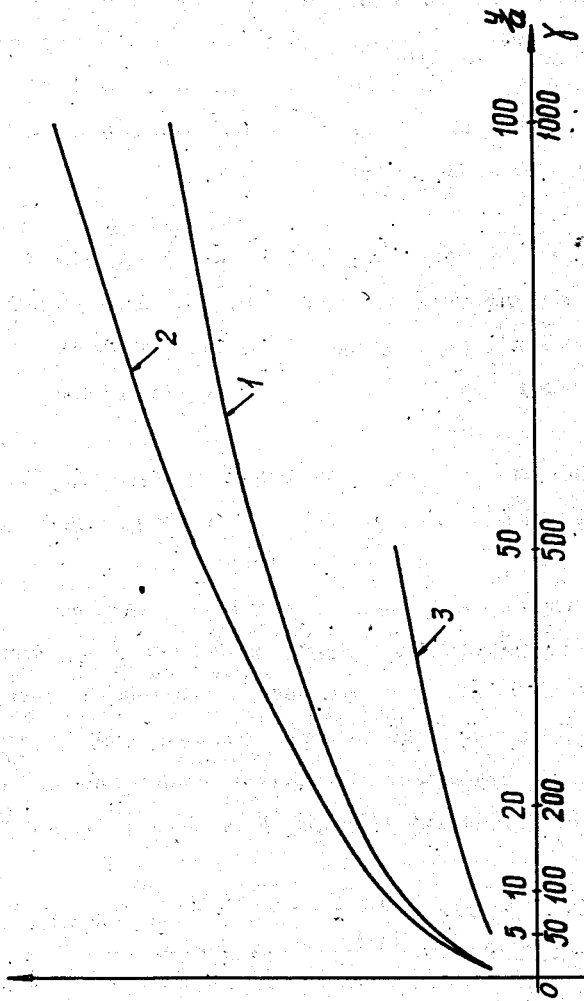


Рис. 5.

где $\rho = \frac{z}{a\Gamma}$, $\delta = \frac{ct}{a\Gamma}$. Из (13) видно, что на краю экрана ток пропорционален $(yz)^{\frac{1}{2}}$. Если рассмотреть линию максимумов временной производной тока на переднем его фронте в зависимости от ρ, δ , то оказывается, что в области $\rho \leq 1$ по мере удаления от края экрана имеется некоторое временное опережение по максимумам этой производной: то есть крутизна фронта тока на некотором расстоянии от края экрана наступает раньше, чем в точках, наиболее близких к краю. Это опережение, однако, тем меньше, чем больше y , т.е. оно уменьшается по мере "сплющивания" первичного поля источника, примерно как $\frac{1}{y}$.

Вторичное поле оказывается, таким образом, сфокусированным в область траектории нити, удаленную на $\approx ya$. В случае падения "вторичного" полного поля на второй экран конфигурация поля иная - проявляется цилиндричность падающей волны и "токовый фронт" в области $\frac{z}{a} \approx \sqrt{\Gamma}$ слабо зависит от z , а затем начинает отставать. Край второго экрана также будет переизлучать падающее поле в виде цилиндрической волны, но с существенно меньшей амплитудой и более слабо сфокусированной в область траектории источника. Таким образом, потери энергии источником на втором препятствии, расположенном от первого на расстоянии $< ya$, оказываются не зависимыми от y . В практическом отношении оба экрана можно считать единым препятствием. При увеличении расстояния больше чем на ya второе препятствие будет оказывать тормозящее действие независимо от первого.

Основываясь на этих соображениях, можно представить качественно картину взаимодействия с ускоряющей структурой в следующем виде. Если период структуры $D \gg a\gamma_0$ (a - "предельный параметр", например в случае кольца $a = R - R_0$ где R - радиус отверстий в ускоряющих элементах, R_0 - радиус кольца), то действие каждого элемента структуры проявляется независимо и потери на излучение на периоде структуры пропорциональны γ_0 . Когда в процессе ускорения γ

увеличивается и достигается обратное неравенство ($\gamma a \gg D$), взаимодействие элементов структуры при излучении становится существенным и зависимость потерь от γ выходит на плато.

Приложение А

Электрические и магнитное поля, определяемые согласно известным формулам

$$E_y = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y \partial z}; \quad E_z = -\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y}; \quad H_x = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y \partial t}, \quad (\text{A.1})$$

имеют вид

$$E_y = -\frac{q}{\pi} \operatorname{sign} y \operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\beta} \sin \theta - \Gamma \cos \theta \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta} \cos \theta + i \Gamma \sin \theta}} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i[\sqrt{k^2 - w^2}|y| + wz - kct + ik\Gamma a]} w d w}{\sqrt{k-w} \left(w + \frac{k}{\beta} \cos \theta - ik\Gamma \sin \theta \right)} \right\} \quad (\text{A.2})$$

$$E_z = \frac{q}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\beta} \sin \theta - \Gamma \cos \theta \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta} \cos \theta + i \Gamma \sin \theta}} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i[\sqrt{k^2 - w^2}|y| + wz - kct + ik\Gamma a]} \sqrt{k^2 - w^2} dw}{\sqrt{k-w} \left(w + \frac{k}{\beta} \cos \theta - ik\Gamma \sin \theta \right)} \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$H_x = \frac{q}{\pi} \operatorname{sign} y \operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\beta} \sin \theta - \Gamma \cos \theta \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta} \cos \theta + i \Gamma \sin \theta}} \int_0^\infty \sqrt{k} dk \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i[\sqrt{k^2 - w^2}|y| + wz - kct + ik\Gamma a]} dw}{\sqrt{k-w} \left(w + \frac{k}{\beta} \cos \theta - ik\Gamma \sin \theta \right)} \right\} \quad (\text{A.4})$$

Проведя в (A.2) + (A.4) замену переменных $w = ku$ и проинтегрировав эти выражения по k , мы получим:

$$E_y = + \frac{q}{\pi a} \operatorname{sign} p \operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\beta} \sin \theta + i \Gamma \cos \theta \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta} \cos \theta + i \Gamma \sin \theta}} \times \right. \quad (\text{A.5})$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^\infty \frac{u du}{\sqrt{1-u} \left(u + \frac{1}{\beta} \cos \theta - i \Gamma \sin \theta \right) (u h - r + i \Gamma + |p| \sqrt{1-u^2})} \right\}$$

$$E_z = -\frac{q}{\pi a} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\frac{1}{\beta} \sin \theta + i \Gamma \cos \theta)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta} \cos \theta + i \Gamma \sin \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-u^2} du}{\sqrt{1-u} (u + \frac{1}{\beta} \cos \theta - i \Gamma \sin \theta) (uh - \tau + i \Gamma + |p| \sqrt{1-u^2})} \right\}, \quad (\text{A.6})$$

$$H = -\frac{q}{\pi a} \operatorname{sign} p \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\frac{1}{\beta} \sin \theta + i \Gamma \cos \theta)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta} \cos \theta + i \Gamma \sin \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{1-u} (u + \frac{1}{\beta} \cos \theta - i \Gamma \sin \theta) (uh - \tau + i \Gamma + |p| \sqrt{1-u^2})} \right\}, \quad (\text{A.7})$$

где введены безразмерные координаты $p = \frac{y}{a}$, $h = \frac{z}{a}$ и время $\tau = \frac{ct}{a}$.

Подинтегральные выражения в (A.5) + (A.7) не имеют полюсов в нижней полуплоскости комплексного переменного u . Имея это в виду, мы можем интегралы вдоль действительной оси преобразовать в интегралы вдоль разреза, уходящего вниз из точки $u = -1$, а последние после некоторых преобразований вычисляются методом вычетов. В результате получаются выражения (2) + (4).

Приложение В

Формулы (2) + (4) в явной действительной форме при $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеют следующий вид:

$$\frac{a E_y}{2q} = -\frac{\operatorname{sign} p}{R} \left[\Gamma \zeta \frac{D_0^y}{C_1 C_2} + \frac{1}{2\sqrt{\beta(1+\beta)}} \left(\frac{D_1^y}{C_1 C_3} - \frac{D_2^y}{C_2 C_3} \right) \right]$$

$$\frac{a E_z}{2q} = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\beta} \frac{D_0^z}{C_1 C_2} + \frac{1}{2\sqrt{\beta(1+\beta)}} \left(\frac{D_1^z}{C_1 C_3} + \frac{D_2^z}{C_2 C_3} \right) \right]$$

$$\frac{a H}{2q} = -\frac{\operatorname{sign} p \cdot \beta}{R} \left[\frac{1}{\beta} \zeta \frac{D_0^x}{C_1 C_2} + \frac{1}{2\sqrt{\beta(1+\beta)}} \left(\frac{D_1^x}{C_1 C_3} - \frac{D_2^x}{C_2 C_3} \right) \right]$$

$$D_0^y = a_1 a_2 - (b_1 - \Gamma)(b_2 - \Gamma)$$

$$D_1^y = \{[(1+\beta)A - \beta\Gamma B][\text{sign } b_1 \cdot h_1^+(a_1^2 + b_1^2 - \Gamma b_1) + \Gamma q_1^+ \cdot a_1] - [(1+\beta)B + \beta\Gamma A] \times \\ \times [q_1^+(a_1^2 + b_1^2 - \Gamma b_1) - \Gamma a_1 h_1^+ \text{sign } b_1]\} :$$

$$D_2^y = \{[(1+\beta)A - \beta\Gamma B][h_2^+(a_2^2 + b_2^2 - \Gamma b_2) + \Gamma a_2 q_2^+ \text{sign } b_2] - [(1+\beta)B + \beta\Gamma A] \times \\ \times [q_2^+(a_2^2 + b_2^2 - \Gamma b_2) \text{sign } b_2 - \Gamma a_2 h_2^+]\}$$

$$D_0^z = \eta [a_1(b_2 - \Gamma) + a_2(b_1 - \Gamma)] + (\bar{\Gamma} + \Gamma\xi)[a_1 a_2 - (b_1 - \Gamma)(b_2 - \Gamma)]$$

$$D_1^z = \{[(1+\beta)A - \beta\Gamma B][h_1^-(a_1^2 + a_1 + b_1^2 - \Gamma b_1) + q_1^-(b_1 - \Gamma - \Gamma a_1) \text{sign } b_1] +$$

$$+ [(1+\beta)B + \beta\Gamma A][q_1^-(a_1^2 + a_1 + b_1^2 - \Gamma b_1) \text{sign } b_1 - h_1^-(b_1 - \Gamma - \Gamma a_1)]\}$$

$$D_2^z = \{[(1+\beta)A - \beta\Gamma B][h_2^-(a_2^2 + a_2 + b_2^2 - \Gamma b_2) \text{sign } b_2 + q_2^-(b_2 - \Gamma - \Gamma a_2)] +$$

$$+ [(1+\beta)B + \beta\Gamma A][q_2^-(a_2^2 + a_2 + b_2^2 - \Gamma b_2) - h_2^-(b_2 - \Gamma - \Gamma a_2) \text{sign } b_2]\}$$

$$D_0^x = -[a_2(b_1 - \gamma) + a_1(b_2 - \gamma)]$$

$$D_1^x = \{[(1+\beta)A - \beta\Gamma B][-q_1^+(b_1 - \Gamma) + h_1^+ a_1 \text{sign } b_1] - [(1+\beta)B + \beta\Gamma A][q_1^+ a_1 + h_1^+(b_1 - \Gamma)\text{sign } b_1]\}$$

$$D_2^x = \{[(1+\beta)A - \beta\Gamma B][-q_2^+(b_2 - \Gamma)\text{sign } b_2 + h_2^+ a_2] - [(1+\beta)B + \beta\Gamma A][q_2^+ a_2 \text{sign } b_2 + h_2^+(b_2 - \Gamma)]\}$$

$$C_1 = a_1^2 + (b_1 - \Gamma)^2; \quad C_2 = a_2^2 + (b_2 - \Gamma)^2; \quad C_3 = A^2 + B^2$$

$$A = \sqrt{[\sqrt{(1+\eta)^2 + \bar{\Gamma}^2} + (1+\eta)][\sqrt{(1-\eta)^2 + \bar{\Gamma}^2} - (1-\eta)]} + \sqrt{[\sqrt{(1+\eta)^2 + \Gamma^2} - (1+\eta)][\sqrt{(1-\eta)^2 + \bar{\Gamma}^2} - (1-\eta)]}$$

$$B = \sqrt{[\sqrt{(1+\eta)^2 + \bar{\Gamma}^2} + (1+\eta)][\sqrt{(1-\eta)^2 + \bar{\Gamma}^2} - (1-\eta)]} - \sqrt{[\sqrt{(1+\eta)^2 + \Gamma^2} - (1+\eta)][\sqrt{(1-\eta)^2 + \bar{\Gamma}^2} + (1-\eta)]}$$

$$q_{1,2}^+ = \sqrt{\sqrt{(1+a_{1,2})^2 + b_{1,2}^2} + (1+a_{1,2})}; \quad h_{1,2}^+ = \sqrt{\sqrt{(1+a_{1,2})^2 + b_{1,2}^2} - (1+a_{1,2})}$$

$$q_{1,2}^- = \sqrt{\sqrt{(1-a_{1,2})^2 + b_{1,2}^2} + (1-a_{1,2})}; \quad h_{1,2}^- = \sqrt{\sqrt{(1-a_{1,2})^2 + b_{1,2}^2} - (1-a_{1,2})}$$

$$a_1 = \xi \eta + \zeta \frac{A}{2}; \quad b_1 = -\xi \bar{\Gamma} + \zeta \frac{B}{2}; \quad a_2 = \xi \eta - \zeta \frac{A}{2}; \quad b_2 = -\xi \bar{\Gamma} - \zeta \frac{B}{2}$$

$$\xi = \frac{h}{R}; \quad \zeta = \frac{|p|}{R}; \quad \eta = \frac{r}{R}; \quad \bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{R}; \quad R^2 = h^2 + p^2; \quad \Gamma = \frac{1}{\beta\gamma}$$

Литература

1. Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский. УФН 88, 209 (1966);
УФН 94, 377 (1968).
2. Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров. ДАН СССР, 124, 1026 (1959).
3. А.Б. Кузнецов, С.Б. Рубин. Препринт ОИЯИ Р9-5087, Дубна 1970.
4. Г.В. Воскресенский, В.Н. Курдюмов. Доклад на 7-й Международной конференции по ускорителям. Ереван, 1969 г.
5. T.D. Lawson. Radiation from a Ring Charge Passing Through a Resonator, RHEL/M 144 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел

13 июля 1970 года.