СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р9 - 5142

А.Г. Бонч-Осмоловский

О КРАТКОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ УСКОРЯЮЩЕГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРОННЫЙ СГУСТОК, СОДЕРЖАЩИЙ ИОНЫ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1970

P9 - 5142

А.Г. Бонч-Осмоловский

О КРАТКОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ УСКОРЯЮЩЕГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРОННЫЙ СГУСТОК, СОДЕРЖАЩИЙ ИОНЫ

Вопрос об удержании ионов в потенциальной яме электронного сгустка при ускорении последнего постоянным электрическим полем решен ранее /1/, и картина поведения ионов сводится к следующему: под действием ускоряющего поля равновесное положение колеблющихся в потенциальной яме ионов смещается в сторону, противоположную ускорению электронного сгустка, величина этого смещения зависит от величины ускоряющего поля. Требование, чтобы ионы оставались в пределах потенциальной ямы с эффективными постоянными размерами "b" (в системе координат, где электронный сгусток покоится), приводит к следующему ограничению на величину статического ускоряющего поля:

$$E_{ст.} < \frac{1}{2e} b m_{\perp} \Omega^2. \tag{1}$$

Здесь $m_{\perp}$ - поперечная масса электронов, Ω - частота колебаний ионов в потенциальной яме в системе координат электронного сгустка. Рассмотрим, как изменяются эти результаты, если время действия электрического поля конечно и равно T (в собственной системе координат). Будем считать движение ионов в собственной системе координат нерелятивистским, и отклонения 4-метрики от эвклидовой, вызванной ускорением, малыми. Тогда уравнения движения ионов можно свести к уравнению гармонического осциллятора (см. работу /2/), и они будут иметь вид (для простоты предполагаем, что электрическое поле однородно и постоянно во времени):

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \le t \le T, & \ddot{z} + \Omega^2 z = -\dfrac{e}{m_\perp} E \\ t > T, & \ddot{z} + \Omega^2 z = 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Здесь z – отклонение иона от центра сил сгустка. Начальные условия (при $t = 0$) запишем в таком виде:

$$z_0 = a\, b \sin\delta, \quad \dot{z}_0 = a\, b\Omega \cos\delta, \qquad (3)$$

где a – относительная амплитуда, δ – фаза колебания данного иона к моменту включения электрического поля. Тогда при $0 \le t \le T$ решение первого из уравнений (2) запишем в виде:

$$z = -p(1-\cos\Omega t) + a\, b \cos\delta \cdot \sin\Omega t + a\, b \sin\delta \cdot \cos\Omega t.$$

$$p = \frac{e E}{m_\perp \Omega^2}, \qquad (4)$$

и решение второго уравнения (2) будет:

$$z = A \sin\Omega t + B \cos\Omega t, \quad t > T. \qquad (5)$$

Постоянные A и B определяются из условия непрерывности z и $\dot{z}$ при $t = T$, соответствующий результат выглядит так:

$$A = ab \cos\delta - p \sin\Omega T,$$
$$B = a\, b \sin\delta + p(1-\cos\Omega T),$$

и колебания ионов в области, где электрическое поле перестало действовать, описываются выражением:

$$t \ge T, \quad z = (a\, b \cos\delta - p \sin\Omega T)\sin\Omega t + (a\, b \sin\delta + p - p\cos\Omega T)\cos\Omega t. \qquad (6)$$

Если время действия поля сравнимо или больше периода колебаний ионов в потенциальной яме, то условие удержания ионов в процессе ускорения, если $a \ll 1$, сводится к (1). При начальной амплитуде, сравнимой с b, для разных ионов (разные δ) условие удержания будет, естественно, выглядеть по-разному.

Посмотрим, что изменится, если выполнено условие баллистического приближения, которое мы запишем в виде:

$$\Omega T \ll 1. \tag{7}$$

Условие (7) означает, что время действия ускоряющего поля гораздо меньше периода колебаний ионов в потенциальной яме. Нетрудно видеть из выражения (4), что за время действия поля ион практически не изменит своего положения относительно центра потенциальной ямы, но зато приобретет добавочную скорость в направлении, противоположном ускорению, приближенно равную

$$|\dot{z}| = \Omega^2 T(p - a b \sin\delta). \tag{8}$$

Колебания ионов после конца действия поля описываются формулой (6), при $\Omega T \ll 1$, имеющей вид:

$$t > T, \quad z = (a b \cos\delta - p \Omega T) \sin \Omega t + a b \sin\delta \cdot \cos \Omega t. \tag{9}$$

Если опять положить $a \ll 1$, то теперь получим условие удержания ионов в виде

$$p \Omega T < b$$

или в баллистическом приближении:

$$E_б < \frac{1}{e} b m_\perp \Omega^2 \frac{1}{\Omega T} = E_{ст} \frac{2}{\Omega T}. \tag{10}$$

Таким образом, допустимое поле в этом случае в $\frac{2}{\Omega T}$ раз больше, чем величина статического (или квазистатического) поля.

Представляет интерес рассмотрение вопроса об удержании ионов при периодически повторяющемся воздействии кратковременного электрического поля, что имеет прямое отношение к реальной установке, использующей для ускорения электронного сгустка с ионами систему резонаторов. Будем считать, что в процессе движения в собственной системе координат электронного сгустка частота колебаний ионов Ω не меняется (это значит, что применяется такая фокусировка, которая сохраняет размеры потенциальной ямы в собственной системе координат). Перейдем в систему отсчета, связанную со сгустком. Очевидно, она будет совпадать с меллеровой /2/ на участке действия электрического поля и с лоренцевой, когда поле равно нулю. Будем считать также, что в лабораторной системе длины участков ускорения равны и постоянны (например, зазоры резонаторов).

Формула для прироста γ_z при прохождении данного ускоряющего участка в лабораторной системе такова:

$$\gamma_k = \sqrt{1+(a_k T_л + \sqrt{\gamma^2_{k-1} - 1})^2}, \quad a_k = \frac{e E_k}{m_\perp c}. \tag{11}$$

$T_л = \frac{h}{c}$ –длительность действия поля в лабораторной системе. Если $\gamma^2_{k-1} \gg 1$, то изменение γ выражается просто:

$$\Delta\gamma_k = \gamma_k - \gamma_{k-1} = a_k T_л. \tag{12}$$

При написании (11) мы предполагаем, что в общем случае напряженность электрического поля на разных участках может быть разной, но в пределах одного участка постоянна во времени и пространстве. Длительность импульса в собственной системе равна (см. /2/):

$$T^c_k = \int_0^T \frac{dT}{\gamma_{k-1} + a_k T} = 1/a_k \cdot \ln\left(1 + \frac{a_k T_л}{\gamma_{k-1}}\right) \cong \frac{T_л}{\gamma_{k-1}}, \tag{13}$$

то есть при условии $\gamma^2_{k-1} \gg 1$ и $\frac{a_k T_л}{\gamma_{k-1}} \ll 1$ совпадает с формулой обычного лоренцева преобразования.

Теперь мы можем сформулировать задачу следующим образом: найти закон движения ионов при периодическом воздействии указанного выше поля и условия, при которых ионы не выходят за пределы потенциальной ямы электронного сгустка. Математически, при сделанных предположениях, задача сводится к решению уравнения

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = -f(t), \tag{14}$$

где $f(t) = \dfrac{eE(t)}{m_{\perp}}$ имеет примерный вид, показанный на рис. 1.

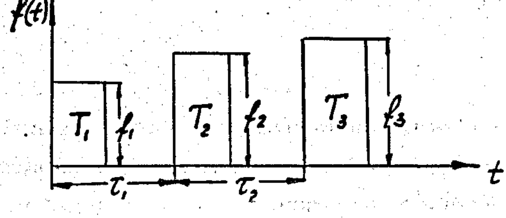

Рис. 1.

Разложим правую часть (14) в интеграл Фурье, тогда получим, желая найти решение после некоторого числа циклов n :

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} f_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} e^{-i\omega \sum_{\ell=1}^{k-1} \tau_\ell} \left(e^{-i\omega T_k} - 1 \right) e^{i\omega t} \, d\omega. \tag{15}$$

Частное решение неоднородного уравнения (15) можно представить в виде:

$$z_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} f_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega(\Omega^2 - \omega^2)} \left[e^{i\omega(t - T_k - \sum_{\ell=1}^{k-1} \tau_\ell)} - e^{i\omega(t - \sum_{\ell=1}^{k-1} \tau_\ell)} \right] d\omega. \tag{16}$$

Вклад в интеграл (16) дают полюсы подинтегрального выражения $\omega = \pm\Omega$. При учете конечного затухания, имеющего место в реальной системе, нетрудно установить, что они смещены вверх от действительной оси ω. Конкретное вычисление зависит от того, в какой области t рассматривается решение. При $t > \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k + T_n$ интеграл вычисляется непосредственно с помощью теории вычетов при замыкании контура далекой полуокружностью в верхней полуплоскости комплексных ω . При этом имеем:

$$z_n = -\frac{1}{\Omega^2}\sum_{k=1}^{n} f_k \sin\frac{\Omega T_k}{2}\sin\Omega\,(t - \sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell - T_k/2)\cdot \tag{17}$$

Если $\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k + T_n > t > \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k$, то в интеграле (16) предыдущая процедура непосредственно не проходит. Проще всего вычислить производную от него по времени.

$$\dot{I}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} f_k \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}\left[e^{-i\omega(\sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell + T_k - t)} - e^{i\omega(t-\sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell)}\right]d\omega\,. \tag{18}$$

В интеграле (18) все члены суммы, кроме $k=n$, вычисляются так же, как для интеграла (16), в слагаемые с $k=n$ дает, как легко видеть, вклад только вторая экспонента в подинтегральном выражении. В результате вычислений несложно получить:

$$\dot{I}(t) = \frac{1}{\Omega}\sum_{k=1}^{n-1} f_k\,[\sin\Omega\,(t - T_k - \sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell) - \sin\Omega(t-\sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell)] - \frac{f_n}{\Omega}\sin\Omega(t-\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k)\,. \tag{19}$$

Выполняя интегрирование по времени от 0 до t, получим частное решение (15) в области $\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k + T_n > t > \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k$:

$$z_n = -\frac{f_n}{\Omega^2}[1-\cos\Omega\,(t-\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k)] - \frac{2}{\Omega^2}\sum_{k=1}^{n-1} f_k \sin\frac{\Omega T_k}{2}\sin\Omega\,(t-\frac{T_k}{2}-\sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell). \tag{20}$$

Полное решение задачи получим, прибавив к (17) и (20) общее решение однородного уравнения, учитывающее начальные условия вида (3):

$$z = a\,b\cos\delta\cdot\sin\Omega t + a\,b\sin\delta\cdot\cos\Omega t\,. \tag{21}$$

При $n=1$ полученный результат, естественно, совпадает с (4) и (6).

Новое в вопросе об удержании ионов по сравнению со свободными колебаниями (21) дают вынужденные колебания (17) и (20). Легко убедиться, что отклонения ионов в области вне действия электрического поля (17) превышают отклонения во время действия поля (20), поэтому достаточно исследовать решение в форме (17).

Возьмем практически важный случай баллистического приближения, когда $\frac{\Omega T_k}{2} \ll 1$, тогда приближенно можно написать:

$$z_n \approx -\frac{1}{\Omega}\sum_{k=1}^{n} f_k T_k \sin\Omega\,(t-\sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell - T_k/2)\,. \tag{22}$$

<u>Первый случай</u>, который мы рассмотрим при анализе общего выражения (22), относится к варианту ускоряющей системы, когда период следования импульсов поля в собственной системе координат постоянен и равен τ. Это значит, что в лабораторной системе координат период ускоряющей системы увеличивается пропорционально росту γ:

$$\tau_k^{Л} = \tau\,\gamma_k\,. \tag{23}$$

Нетрудно показать, что наименьшие абсолютные значения функция z_n принимает при условии, что период следования импульсов поля кратен половине периода ионных колебаний

$$\Omega\tau = \pi\,(2m+1),\quad m=0,1,\ldots \tag{24}$$

Действительно, если

1. $f_k T_k = f\,T = \text{const}$,

то

$$z_n \approx -\frac{fT}{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\sin\Omega\,(t-(k-1)\tau) = -\frac{fT}{\Omega}\,\frac{\sin\Omega\,(t-\frac{n-1}{2}\tau)\sin\frac{n}{2}\Omega\tau}{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}\,. \tag{25}$$

При $\Omega\tau = 2m\pi$ в (25) имеется резонанс и z_n с ростом n растет. Минимальная амплитуда колебаний z_n достигается при условии (24) и равна $\pm\frac{fT}{\Omega}$. При четных n функция z_n равна нулю (также и $\dot z_n$), а при нечетных отклонение ионов с учетом начальных колебаний имеет вид:

$$z_{2m+1} = (ab\cos\delta - \frac{eET}{m_\perp\Omega})\sin\Omega t + ab\sin\delta\cdot\cos\Omega t\,, \tag{26}$$

т.е. совпадает с (9). Физически этот результат ясен: при постоянном импульсе действующей силы отбросы ионов на каждом ускоряющем участке одинаковы, и при четном числе импульсов (24) погашают друг друга. На нечетных участках картина повторяет результат первого импульса.

2. $f_k = f = \mathrm{const}$.

В этом случае с учетом (12) и (13) для z_n можно написать:

$$z_n \approx -\frac{fT_п}{\Omega}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\Omega\,(t-(k-1)\tau)}{\gamma_0+\alpha\frac{h}{c}k}. \qquad (27)$$

Введем $t=(n-1)\tau+T_n+\Delta t$, Δt меняется от 0 до $\tau-T_n$. Тогда

$$z_n = -\frac{f}{\alpha\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\Omega(\Delta t+T_n+n\tau-k\tau)}{k+\frac{\gamma_0 c}{n\alpha}} =$$

$$(28)$$

$$=\frac{f}{\alpha\Omega}\sin\Omega(\Delta t+T_n+n\tau)\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\Omega\tau k}{k+\frac{\gamma_0 c}{h\alpha}}+\frac{f}{\alpha\Omega}\cos\Omega(\Delta t+T_n+n\tau)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\Omega\tau k}{k+\frac{\gamma_0 c}{h\alpha}}.$$

Минимальные значения (по абсолютной величине) выражения (28) совпадают с минимумами сумм в правой части. Нетрудно установить, что первая сумма имеет минимумы при условии (24), вторая при этом равна нулю. Таким образом, имеем

$$z_n = (-1)^{n+1}\frac{f}{\alpha\Omega}\sin(\Delta t+T_n)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k+\frac{\gamma_0 c}{h\alpha}}. \qquad (29)$$

При больших n сумму в (29) можно оценить так:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k+\frac{\gamma_0 c}{h\alpha}} \approx \int_0^1\frac{x^{\frac{\gamma_0 c}{h\alpha}-1}}{1+x}\,dx-\frac{h\alpha}{\gamma_0 c} = \int_0^\infty\frac{e^{-\frac{\gamma_0 c}{h\alpha}t}}{1+e^{-t}}\,dt-\frac{h\alpha}{\gamma_0 c}. \qquad (30)$$

Если $\frac{\gamma_0 c}{h\alpha} \gg 1$, то можно интеграл в (30) заменить первым членом его асимптотического разложения, равным $\frac{h\alpha}{2\gamma_0 c}$, и окончательно получить:

$$z_n \approx (-1)^n\frac{fT_0}{2\Omega}\sin\Omega(\Delta t+T_n),\quad T_0=\frac{h}{c\gamma_0}. \qquad (31)$$

Таким образом, асимптотическое значение z_n в этом случае меньше, чем согласно (25).

Наконец, рассмотрим наиболее интересный случай, когда период следования поля в лабораторной системе постоянен и равен $\tau_л$ и $f_k = f = \text{const}$. При этом в собственной системе он изменяется обратно пропорционально γ:

$$\tau_k = \frac{\tau_л}{\gamma_k}. \tag{32}$$

Формулу (22) перепишем, введя $t = \Delta t + T_n + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k$:

$$z_n = -\frac{fT_л}{\Omega} \sin\Omega(\Delta t + T_n) \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\Omega\left(\sum_{\ell=k}^{n-1} \tau_\ell - T_k/2\right)}{\gamma_0 + \frac{ha}{c}k} -$$

$$- \frac{fT_л}{\Omega} \cos\Omega(\Delta t + T_n) \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\Omega\left(\sum_{\ell=k}^{n-1} \tau_\ell - T_k/2\right)}{\gamma_0 + \frac{ha}{c}k}. \tag{33}$$

Точное исследование этой формулы возможно лишь численными методами. Однако в интересующем нас асимптотическом случае, при больших n, можно сделать ряд качественных заключений.

При больших n пренебрежем первым членом в (33), считая, что $\Omega\tau_n \ll 1$, во втором члене заменим суммирование по n интегрированием. При этом, считая, что $T_{n-1} \ll \tau_{n-1}$, в соответствующих членах в аргументе $\sin$ пренебрежем $T_k/2$.

Окончательно после несложных выкладок получим оценку:

$$z_n = -\frac{fT_л}{\Omega}\,\frac{1}{\Omega\tau_л}\left[1 - \cos\frac{\Omega\tau_л}{aT_л}\ln\frac{\gamma_n}{\gamma_0}\right],$$

$$\gamma_n = \gamma_0 + a(n-1). \tag{34}$$

Таким образом, после большого числа импульсов поля амплитуда вынужденных колебаний ионов не превосходит

$$|z_n| \le \frac{2}{\Omega\tau_л}|z_б| = |z_{ст}| \cdot \frac{T_л}{\tau_л}. \tag{35}$$

Здесь согласно (1) и (9) $|z_\delta| = \frac{eE}{m_\perp \Omega} T_л$ и $|z_{ст}| = \frac{2eE}{m_\perp \Omega^2}$.

Исследование формулы (33), в том числе численными методами, показывает, что z_n — в общем случае функция периодическая, при этом, если $n \gg 1$, то максимальная амплитуда ее очень хорошо согласуется с (35). При малых n амплитуда z_n превосходит (35) не более, чем в $\sqrt{2}$ раз.

Отсюда следует важный в практическом отношении вывод, что при постоянном в лабораторной системе пространственном периоде ускоряющего поля и $\Omega T_k \ll 1$ отклонение ионов меньше, чем в статическом случае в отношении $\frac{\tau_л}{T_л}$ – "скважности" ускоряющей системы.

Автор благодарен А.Б. Кузнецову за полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1. *А.Г. Бонч-Осмоловский, Г.В. Долбилов, О.А. Колпаков, А.Б. Кузнецов, В.Н. Мамонов, К.А. Решетникова, Н.Б. Рубин, С.Б. Рубин, В.П. Саранцев. Препринт ОИЯИ, Р9-4171, Дубна, 1968.*
2. *А.Г. Бонч-Осмоловский, Э.А. Перельштейн, Н.Б. Рубин, С.Б. Рубин, О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ, 2649-2, Дубна, 1966.*

Рукопись поступила в издательский отдел
27 мая 1970 года.