

10/11-70

M-365

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

P9 - 4854



В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович

О КОРРЕЛЯЦИЯХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ  
В ПЛАЗМЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
И АВТОМАТИЗАЦИИ

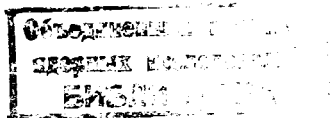
1969

P9 - 4854

В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович

О КОРРЕЛЯЦИЯХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ  
В ПЛАЗМЕ

Направлено в Nucl. Fision



8172/2 up

Маханьков В.Г., Цытович В.Н.

P9-4854

О корреляциях турбулентных пульсаций в плазме

Получены уравнения для корреляционных функций слаботурбулентной плазмы (как для распадного, так и нераспадного спектров). Показано, что форма корреляционных кривых вблизи резонансных частот имеет вид лоренцевой кривой, а уравнение, описывающее их структуру, получено суммированием ряда теории возмущений. Приведены оценки ширины корреляционной функции ленгмюровских пульсаций.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.  
Дубна, 1969**

Makhan'kov V.G., Tsytovich V.N.

P9-4854

On Correlations of the Turbulent Pulsations in Plasma

Equations for the correlation functions of weakly turbulent plasma (both for decay and non-decay spectra) are obtained. The form of the correlation curves near the resonance frequencies is shown to be of the Lorentz curve type, and the equation describing their structure is obtained by summing up the perturbation theory series. The estimates of the correlation function width of Langmuir pulsation are given.

**Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna, 1969**

## §1. В в е д е н и е

В последнее время экспериментальное исследование различных корреляционных эффектов в турбулентной плазме проводится в большинстве экспериментов, исследующих природу неустойчивости и свойств турбулентного состояния плазмы <sup>1,2/</sup>. Экспериментальные методы позволяют измерять корреляционные функции (временные и пространственные) в довольно широком интервале частот. Однако с интерпретацией получаемых результатов возникают трудности, обусловленные отсутствием последовательной теории корреляционных эффектов в плазме. Действительно, для сравнения теории и эксперимента, для идентификации различных видов колебаний необходимо найти вид корреляционной функции, ее ширину  $\Delta\omega$  <sup>х/</sup>, причем в слаботурбулентном режиме обычно выполняется неравенство

$$\Delta\omega \ll \omega_{\pm k} \quad (1.1)$$

---

<sup>х/</sup> Величина  $\Delta\omega$  может быть характерной полушириной корреляционной линии, то есть указывать тот сдвиг частот, для которых интенсивность убывает в 2 раза.

( $\omega_{\vec{k}}$  - собственная частота колебаний "спокойной" плазмы), так как только в этом случае нелинейность является слабой и имеет смысл приближенно говорить о линейных модах колебаний. Если же неравенство (1.1) нарушается, и  $\Delta\omega \approx \omega_{\vec{k}}$ , то нелинейность становится сильной, при этом вид корреляционной функции в рассматриваемой области частот  $\omega_{\vec{k}}$  существенно изменяется.

Обычно исследуемые нелинейные уравнения (учитывающие взаимодействие различных мод колебаний между собой и частицами) носят характер уравнений баланса или кинетических уравнений, которые описывают возбуждение (поглощение) и взаимодействие плазмонов. Они пригодны для исследования как стационарной, так и нестационарной турбулентности. Эффекты временных корреляций турбулентных пульсаций содержатся в зависимости  $I_{\vec{k},\omega}$  от  $\omega$ , функция  $I_{\vec{k},\omega}$ , представляющая собой коррелятор турбулентных полей, определяется из соотношения

$$\langle E_{\vec{k},\omega} \cdot E_{\vec{k}',\omega'} \rangle = I_{\vec{k},\omega} \delta(\vec{k} + \vec{k}') \delta(\omega + \omega'). \quad (1.2)$$

Здесь следует отметить, что строго соотношение (1.2) выполняется лишь в случае стационарной турбулентности. Слабое отклонение от стационарности учитывается в виде медленной зависимости  $I_{\vec{k},\omega}$  от средней координаты и среднего времени  $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_g \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ . Уравнения баланса - есть уравнения для  $\int I_{\vec{k},\omega} d\omega$ . В этих уравнениях в первом приближении можно пренебречь временными корреляциями, т.е. как в линейном приближении положить  $I_{\vec{k},\omega} = I_{\vec{k}} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}})$ . Такая возможность связана с тем, что, с одной стороны, уравнение баланса для слабой турбулентности содержит малые члены (порядка  $\gamma_{\vec{k}}/\omega_{\vec{k}}$  инкремента к частоте), а с другой - функция  $I_{\vec{k}} = \int I_{\vec{k},\omega} d\omega$  не чувствительна к детальной форме распределения пульсаций по  $\omega$ . В этих условиях корреляционные эффекты дают малые поправки, выходящие за

пределы точности уравнений, если учитываются нелинейные токи не выше третьего порядка по полю  $x/$ . Поэтому спектр турбулентности (т.е. зависимость  $I_{\vec{k}}$  от  $\vec{k}$ ) можно искать, не вникая в характер временных корреляций пульсаций <sup>/3,4/</sup>. С другой стороны, как уже отмечалось выше, временные корреляционные функции измеряются сейчас в большинстве экспериментов по изучению плазменной турбулентности и представляют собой одну из важных ее характеристик. Действительно, знание корреляционной функции может дать представление не только о частотах турбулентных пульсаций, но и об уровне турбулентности.

Ниже мы будем исследовать корреляционные функции в условиях стационарной турбулентности ( $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = 0$ ) и неравенства  $(W/nT) \ll 1$ . Будут получены общие соотношения для определения корреляционных функций, которые позволяют оценить сдвиг и ширину корреляционной кривой вблизи  $\omega_{\vec{k}}$ .

Оказывается, что для исследования резонансных эффектов, связанных со структурой корреляционной функции вблизи основной частоты  $\omega_{\vec{k}}$ , необходимо суммировать ряд теории возмущений.

## §2. Уравнение для корреляционной функции (теория возмущений)

Прежде чем перейти к изложению настоящей теории, напомним кратко основные результаты, которые могут быть получены с помощью теории возмущений. Будем исходить из уравнения Максвелла для турбулентности части поля  $E^T$ , определяемой из соотношения  $E^T = E - \langle E \rangle$

---

<sup>x/</sup> Однако даже в этих условиях учет корреляционных эффектов может привести к появлению распадных неустойчивостей, если спектр близок к распадному. Подробнее см. ниже.

(знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по статистическому ансамблю). В целях упрощения выкладок предположим, что пульсации продольны, а внешнее магнитное поле отсутствует. Тогда

$$-\omega \epsilon_0^{\ell}(\vec{k}, \omega) \mathbf{E}_{\kappa}^T = 4\pi i (j_{\kappa}^{T(2)} + j_{\kappa}^{T(3)}). \quad (2.1)$$

Здесь  $\epsilon_0^{\ell}(\vec{k}, \omega)$  - линейный тензор диэлектрической проницаемости плазмы,  $j_{\kappa}^{T(2)}$ ,  $j_{\kappa}^{T(3)}$  - суть турбулентные части токов второго и третьего порядка по полю соответственно, причем, как обычно,

$$j_{\kappa}^{T(2)} = \int S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2) (\mathbf{E}_{\kappa_1}^T \mathbf{E}_{\kappa_2}^T - \langle \mathbf{E}_{\kappa_1}^T \mathbf{E}_{\kappa_2}^T \rangle) d\lambda, \quad d\lambda = \delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2) d\kappa_1 d\kappa_2$$

$$j_{\kappa}^{T(3)} = \int \Sigma(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) (\mathbf{E}_{\kappa_1}^T \mathbf{E}_{\kappa_2}^T \mathbf{E}_{\kappa_3}^T - \langle \mathbf{E}_{\kappa_1}^T \mathbf{E}_{\kappa_2}^T \mathbf{E}_{\kappa_3}^T \rangle - \mathbf{E}_{\kappa_1}^T \langle \mathbf{E}_{\kappa_2}^T \mathbf{E}_{\kappa_3}^T \rangle) \delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3, \quad \kappa = \{\vec{k}, \omega\}. \quad (2.2)$$

Умножив (2.1) на  $\mathbf{E}_{\kappa}^T$  и интегрируя по  $\kappa'$ , получим

$$-\omega \epsilon_0^{\ell}(\kappa) T_{\kappa} = 4\pi i \int S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2) \langle \mathbf{E}_{\kappa_1}^T \mathbf{E}_{\kappa_2}^T \mathbf{E}_{\kappa'}^T \rangle d\lambda d\kappa' +$$

$$+ 4\pi i \int \Sigma(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) (\langle \mathbf{E}_{\kappa_1}^T \mathbf{E}_{\kappa_2}^T \mathbf{E}_{\kappa_3}^T \mathbf{E}_{\kappa'}^T \rangle - \langle \mathbf{E}_{\kappa'}^T \mathbf{E}_{\kappa_1}^T \rangle \langle \mathbf{E}_{\kappa_2}^T \mathbf{E}_{\kappa_3}^T \rangle) \delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3 d\kappa'. \quad (2.3)$$

Средние от четырех полей с необходимой точностью можно разбить на парные произведения, а в среднем от трех полей каждое из них следует уточнить, используя приближенное соотношение

$$E_{\kappa}^T = -\frac{4\pi i}{\omega \epsilon^{\ell}(\kappa)} \int S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2) (E_{\kappa_1 \kappa_2}^T E_{\kappa}^T - \langle E_{\kappa_1 \kappa_2}^T E_{\kappa}^T \rangle) d\lambda. \quad (2.4)$$

Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \epsilon^{\ell}(\kappa) I_{\kappa}^{\ell} &= \frac{8\pi i}{\omega} \left\{ I_{\kappa}^{\ell} \int \Sigma'(\kappa, \kappa_1) I_{\kappa_1}^{\ell} d\kappa_1 - \right. \\ &\left. - 4\pi i \int \frac{|S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2)|^2}{\omega \epsilon^{\ell}(-\kappa_1 - \kappa_2)} I_{\kappa_1}^{\ell} I_{\kappa_2}^{\ell} d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma'(\kappa, \kappa_1) &= \frac{1}{2} (\Sigma(\kappa, \kappa_1, \kappa, -\kappa_1) + \Sigma(\kappa, \kappa_1, -\kappa_1, \kappa)) - \\ &\frac{8\pi i S(\kappa, \kappa_1, \kappa - \kappa_1) S(\kappa - \kappa_1, \kappa, -\kappa_1)}{(\omega - \omega_1) \epsilon^{\ell}(\kappa - \kappa_1)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

и кроме того учтено, что  $\langle E_{\kappa}^T E_{\kappa'}^T \rangle = -I_{\kappa}^{\ell} \delta(\kappa + \kappa')$ . Проинтегрировав (2.5) по  $d\omega$  и взяв мнимую часть, можно получить уравнение баланса. Однако уравнение (2.5) недостаточно для исследования корреляций, оно может разве что описывать корреляционные эффекты на хвостах корреляционных кривых при значениях  $\omega$ , существенно отличных от  $\omega_{\vec{k}}$ . Вблизи резонанса его следует уточнить, поскольку второй член правой части (2.5) содержит расходящийся при  $\omega \rightarrow \omega_{\vec{k}}$  множитель  $1/\epsilon^{\ell}(-\kappa)$  (так как  $\text{Re} \epsilon^{\ell}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}) = 0$ ). При этом левую часть (2.5) можно записать в виде



$$\omega \frac{\partial \epsilon^{\ell}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\vec{k}}^{\ell}} [(\omega - \omega_{\vec{k}}^{\ell}) I_{\kappa}^{\ell} + i \gamma_{\vec{k}}^{\ell} I_{\kappa}^{\ell}]. \quad (2.7)$$

Из этого соотношения и уравнения (2.4) следует, что  $\Delta\omega \approx \omega - \omega_{\vec{k}}^{\ell} \approx I_{\kappa}^{\ell}$ . Но  $I_{\kappa}^{\ell}$  (точнее, безразмерная величина  $W/p_0 T_e$ ) является малым параметром, поэтому разность  $\omega - \omega_{\vec{k}}^{\ell}$  много меньше  $\omega_{\vec{k}}^{\ell}$ , что соответствует приближению слабой нелинейности.

Итак, вблизи  $\omega = \omega_{\vec{k}}^{\ell}$  имеет место оценка  $\frac{1}{\epsilon^{\ell}(-\kappa)} \approx \frac{1}{\omega - \omega_{\vec{k}}^{\ell}} \approx W^{-1}$ . Это означает, что последний член в правой части (2.4) получен недостаточно точно. Он может быть вычислен более аккуратно, если, используя малость параметра  $\Delta\omega / \omega_{\vec{k}}^{\ell}$ , просуммировать ряды теории возмущений и считать, что  $\omega - \omega_{\vec{k}}^{\ell}$  имеет порядок  $I_{\kappa}$ .

### 83. Точное уравнение для корреляционной функции

Для того чтобы построить теорию, заметим, что особенность в уравнении (2.3) появляется при уточнении коррелятора от трех полей  $\langle EEE \rangle$  с помощью формулы (2.4). Но поскольку  $\epsilon(\kappa) \langle EE \rangle \approx W \langle EE \rangle$ , при отыскании тройного коррелятора  $\langle EEE \rangle$  необходимо в уравнении (2.1) учесть члены четвертого и пятого порядков по полю. Конкретные вычисления приведены в приложении 1. Здесь мы выпишем окончательный вид интегрального уравнения, определяющего корреляционную функцию  $\langle EEE \rangle$ , точнее, связанную с ней следующим соотношением функцию  $I_{\kappa_1, \kappa_2}$ :

$$\langle E_{\kappa}^T E_{\kappa_1}^T E_{\kappa_2}^T \rangle = I_{\kappa_1, \kappa_2} \delta(\kappa' + \kappa_1 + \kappa_2). \quad (3.1)$$

Оно имеет вид

$$I_{\kappa_1, \kappa_2} = \frac{-4\pi i}{(\omega_1 + \omega_2)(\epsilon(-\kappa_1 - \kappa_2) + \epsilon^N(-\kappa_1 - \kappa_2))} \left\{ I_{\kappa_1} \int d\kappa'_1 \sum'(-\kappa_1 - \kappa_2, -\kappa_1, \kappa'_1, -\kappa_2 - \kappa'_1) \cdot \right. \\ \left. \cdot I_{\kappa'_1, -\kappa_2 - \kappa'_1} + I_{\kappa_2} \int d\kappa'_2 \sum'(-\kappa_1 - \kappa_2, -\kappa_2, \kappa'_2, -\kappa_1 - \kappa'_2) I_{-\kappa'_2, -\kappa_1 - \kappa'_2} \right\} + \quad (3.2) \\ + \frac{8\pi i S(\kappa', -\kappa_1, -\kappa_2) I_{\kappa_1} I_{\kappa_2}}{(\omega_1 + \omega_2)(\epsilon^\ell(-\kappa_1 - \kappa_2) + \epsilon^N(-\kappa_1 - \kappa_2))}.$$

Здесь введена нелинейная поправка к диэлектрической проницаемости плазмы, представляющая собой коэффициент при  $I_\kappa$  в членах, соответствующих индуцированным процессам.

$$\epsilon^N(\kappa) = \frac{4\pi i}{\omega} \int \sum'(\kappa, \kappa_1) I_{\kappa_1} d\kappa_1. \quad (3.3)$$

$\sum'(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$  соответствует (2.6), (см. также (5) прилож. 1), а

$$\sum''(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \sum'(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) + \sum'(\kappa, \kappa_3, \kappa_1, \kappa_2) + \sum'(\kappa, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_1).$$

Интегральное уравнение (3.2) можно решить с требуемой нам точностью.

Действительно, необходимость учета малых членов  $\approx I_\kappa$  в знаменателях (3.2) связана с тем, что при  $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_{\kappa_1 + \kappa_2}^\ell$  тензор  $\epsilon^\ell(\kappa_1 + \kappa_2)$  близок к нулю. Если же возникают выражения вида  $1/\epsilon^\ell(\kappa'')$ , где

$\kappa''$ —любое, но не совпадающее с  $\kappa_1 + \kappa_2$ , то поскольку они не имеют особенностей, в них учет поправок порядка  $I_\kappa$  не нужен.

Уравнение (3.2) будем решать методом итераций. Пренебрегая вначале интегральным членом в правой части (3.2), получим

$$I_{\kappa_1, \kappa_2} = \frac{8\pi i I_{\kappa_1} I_{\kappa_2} S(\kappa', -\kappa_1, -\kappa_2)}{(\omega_1 + \omega_2)(\epsilon^\ell(-\kappa_1 - \kappa_2) + \epsilon^N(-\kappa_1 - \kappa_2))}. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в интегральный член (3.2), убеждаемся, что возникают выражения вида  $1/\epsilon(\kappa_2)$ , при этом по  $\kappa_2$ , согласно (2.3), производится интегрирование, а заинтегрированное  $1/\epsilon$  особенностей не содержит. Методом индукции можно убедиться, что этот результат справедлив и для последующих приближений. Таким образом, решение уравнения (3.2) имеет вид (3.4), в котором числитель есть ряд по малому параметру  $W/p T_0$ . Ограничиваясь с необходимой точностью первым членом этого ряда (т.е. формулой (3.4)) и учитывая формулу (3.3), из (2.3) получим окончательно

$$\omega(\epsilon^{\ell}(\kappa) + \epsilon^N(\kappa)) I_{\kappa} = 32\pi^2 \int \frac{|S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2)|^2 I_{\kappa_1} I_{\kappa_2} d\lambda}{\omega(\epsilon^{\ell}(-\kappa) + \epsilon^N(-\kappa))}. \quad (3.5)$$

Это уравнение представляет собой сложное интегральное уравнение для корреляционной функции, решения которого могут быть найдены лишь в конкретных случаях. Ограничимся здесь исследованием лишь некоторых общих свойств этого уравнения. Для этого, учитывая, что  $\epsilon(-\kappa) = \epsilon^*(\kappa)$ , запишем его в виде

$$I_{\kappa} = \frac{32\pi^2}{\omega^2} \int \frac{|S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2)|^2 I_{\kappa_1} I_{\kappa_2} d\lambda}{|\epsilon^{\ell}(\kappa) + \epsilon^N(\kappa)|^2}. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что, во-первых,  $I_{\kappa} \geq 0$ , как и должно быть по определению этой величины. Во-вторых, поскольку числитель (3.6) и  $\epsilon^N(\kappa)$  при  $\omega \rightarrow \omega_k^{\ell}$  являются слабоменяющимися функциями  $\omega$  и  $k$  (причем  $\epsilon^N(\kappa)$  не проходит через нуль), можно считать, что корреляционная функция  $I_{\kappa}$  имеет следующую структуру:

$$I_{\kappa} = \frac{a_{\kappa}}{(\omega - \omega_{\kappa}^N)^2 + (\gamma_{\kappa}^N)^2}, \quad (3.7)$$

где  $a_{\kappa}$ ,  $\omega_{\kappa}^N$ ,  $\gamma_{\vec{k}}^N$  — суть медленно меняющиеся функции  $\omega$  и  $\vec{k}$ . При  $\omega$ , близком к  $\omega_{\vec{k}}^{\ell}$ , используя разложение (2.7), можно определить

$$\omega_{\kappa}^N = \omega_{\vec{k}}^{\ell} - \frac{\operatorname{Re} \epsilon^N(\kappa)}{\frac{\partial \epsilon^{\ell}(\kappa)}{\partial \omega}} \Big|_{\omega = \omega_{\vec{k}}^{\ell}}, \quad \gamma_{\vec{k}}^N = - \frac{\operatorname{Im}(\epsilon^{\ell}(\kappa) + \epsilon^N(\kappa))}{\frac{\partial \epsilon^{\ell}(\kappa)}{\partial \omega}} \Big|_{\omega = \omega_{\vec{k}}^{\ell}} \quad (3.8)$$

Из (3.7) видно, что возникает нелинейный сдвиг частоты и уширение спектра. Корреляционная ширина характеризуется, во-первых, величиной  $\gamma_{\vec{k}}^N$ , связанной с мнимой частью нелинейного тензора диэлектрической проницаемости, во-вторых, разбросом по  $\omega$  вблизи  $\omega_{\vec{k}}^N$ , обусловленным тем, что нелинейный сдвиг частоты носит интегральный характер. Поэтому для выбранного  $\vec{k}$  этот сдвиг различен для различных частот, что находит свое отражение в зависимости  $\omega_{\kappa}^N$  от частоты  $\omega^{\chi/}$ .

В рассматриваемом нами случае квазистационарной турбулентности  $\frac{d}{dt} I_{\kappa} = 0$ , поэтому полный инкремент  $\gamma_{\vec{k}}^N$  близок к нулю, если пренебречь распадным процессом. Следовательно, при оценке  $\gamma_{\vec{k}}^N$  следует иметь в виду, что уравнение баланса дает компенсацию положительных и отрицательных  $\gamma_{\vec{k}}^N$  (для каждого значения  $\vec{k}$ ), в результате чего величина  $\gamma_{\vec{k}}^N$  меньше входящих в нее отдельных членов линейных и нелинейных и имеет порядок нелинейного инкремента распадного процесса.

Вернемся к уравнению (3.6). Правая часть его описывает распадный процесс, поскольку она содержит  $\delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2)$ . Возможен случай, когда распадный процесс трех волн сильно запрещен, например, для ленгмюровских пульсаций  $\omega_{\vec{k}}^{\ell} \neq \omega_{\vec{k}_1}^{\ell} + \omega_{\vec{k}_2}^{\ell}$  при любых фазовых

---

<sup>x/</sup> Возможность такого уширения корреляционной функции в пренебрежении спонтанными процессами подробно обсуждалась в работе авторов /5/.

скоростях волн. Поэтому при составлении уравнения для корреляций ленгмюровских пульсаций необходимо учитывать токи 4 и 5 порядков по полю, описывающие 4-плазменные взаимодействия. Заметим кстати, что эти взаимодействия часто играют определяющую роль в формировании спектра ленгмюровской турбулентности /3,4/.

Итак, будем исходить из уравнения

$$\omega \epsilon^{\ell}(\kappa) E_{\kappa}^T = -4 \pi i (j_{\kappa}^{T(2)} + j_{\kappa}^{T(3)} + j_{\kappa}^{T(4)} + j_{\kappa}^{T(5)}).$$

Поступая вышеупомянутым образом, выделим члены, соответствующие индуцированным эффектам, и объединим их с линейными. Оставшийся член, содержащий расходимость вида  $1/\epsilon(\kappa)$ , следует уточнить. Опуская подробности расчетов (см. приложение 1), приведем результат

$$I_{\kappa} = \frac{32\pi^2}{\omega^2} \int \frac{|\Sigma^{\ell}(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)|^2}{|\epsilon^{\ell}(\kappa) + \epsilon^N(\kappa)|^2} I_{\kappa_1} I_{\kappa_2} I_{\kappa_3} \delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (3.10)$$

Здесь в  $\epsilon^N(\kappa)$  включена та часть эффектов 4-плазменных взаимодействий, которая соответствует индуцированным процессам. Поэтому корреляционная ширина  $\Delta\omega$  будет включать также и эффекты 4-плазменных взаимодействий.

#### §4. Некоторые следствия уравнения (3.6)

Обсудим некоторые качественные следствия уравнения (3.6). Нас будет интересовать вопрос о влиянии корреляций на взаимодействие турбулентных пульсаций. Поскольку (3.6) описывает распадный процесс, целесообразно рассмотреть влияние корреляционных эффектов на взаимодействие пульсаций, для которых распады запрещены слабо, так что

малые изменения частот пульсаций могут разрешить распадный процесс. Это, в первую очередь, относится ко всем пульсациям с приближенно линейным законом дисперсии:

$$\omega_{\vec{k}} = k u_{ph}.$$

Таковыми колебаниями являются ионный звук, альвеновские и магнитогиродинамические волны и др. Так как в действительности спектр не является строго линейным, распады запрещены. Уширение и сдвиг спектра пульсаций из-за эффектов их корреляций может разрешить распад, если выполнение распадных условий в (3.6) требуется с точностью до величин  $\approx \Delta\omega \approx \gamma_{\vec{k}}^N$ .

Другим важным следствием уравнения (3.6) является наличие турбулентных пульсаций в области низких частот. Как уже отмечалось выше, формула (3.6) и связанная с ней (3.7) описывают форму резонансной кривой  $I_{\vec{k}, \omega}$  вблизи основной частоты  $\omega_{\vec{k}}^l$  (т.е. вблизи ее основного максимума). Но крылья резонансной кривой могут заходить в область частот, много меньших  $\omega_{\vec{k}}^l$ . Турбулентные пульсации, соответствующие таким частотам, могут не иметь какой-либо однозначной связи частоты и волнового вектора. Их относительная амплитуда мала (грубо - как  $(\gamma_{\vec{k}}^N)^2 / (\omega - \omega_{\vec{k}}^N)^2 + (\gamma_{\vec{k}}^N)^2 \approx (\gamma_{\vec{k}}^N / \omega_{\vec{k}}^N)^2 \ll 1$ , при  $\omega \ll \omega_{\vec{k}}^N$ ). Однако их абсолютная величина может существенно превосходить уровень тепловых шумов, если интенсивность колебаний в резонансной области достаточно велика.

В области низких частот (нерезонансной), где  $\epsilon^l(k)$  достаточно велико, можно пользоваться формулой (2.5), переписав ее в виде

$$I_{\vec{k}}^L = 32 \pi^2 \int \frac{|S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2)|^2 I_{\kappa_1} I_{\kappa_2}}{\omega^2 |\epsilon^l(\kappa_1 + \kappa_2)|^2} d\lambda. \quad (4.1)$$

Это соотношение получается также из (3.6), если положить  $\epsilon^N \ll \epsilon^L$ . Из (4.1) следует, что величина  $I_{\kappa}^L$  существенно возрастает, если  $\kappa_1 + \kappa_2$  приближается к одной из собственных мод колебаний плазмы. Следует заметить, что корреляционная кривая не обязательно непрерывна, и могут существовать области, в которых пульсации отсутствуют.

Такова, по-видимому, ситуация для строго нераспадных (во втором порядке по  $W$ ) спектров, например, ленгмюровских пульсаций в области малых фазовых скоростей  $x/$ .

Если рассматривать частоты порядка  $\omega_{pe}$ , то интеграл (4.1) будет близок к нулю. Для частот порядка разности частот ленгмюровских пульсаций величина  $I_{\kappa}^L$  становится достаточно большой, так как вклад в интеграл вносят максимумы в спектрах  $I_{\kappa_1}^H$  и  $I_{\kappa_2}^H$ . Такой эффект возбуждения пульсаций с частотами, равными или меньшими разности частот в.ч. пульсаций, наблюдался экспериментально <sup>/6,7/</sup>. Это следует иметь в виду при анализе проблемы турбулентного нагрева. Действительно, основная масса частиц плазмы может быть нерезонансной с в.ч. пульсациями в области центра корреляционной кривой (3.7), но будет резонансной с низкочастотными пульсациями (4.1). Следовательно, в.ч. пульсации могут нагревать плазму посредством возбуждения пульсаций низкой частоты. Как было показано в <sup>/5/</sup>, окончательным итогом такого взаимодействия в уравнениях баланса для частиц (которые и определяют нагрев) при учете всех членов одного и того же порядка малости по  $W/p_0 T_0$  является нагрев за счет индуцированного рассеяния плазмонов на частицах плазмы  $xx/$ , или, что то же самое, — за счет поглощения частицами плазмы пульсаций низкой частоты (биений).

---

<sup>x/</sup>Требование малости фазовых скоростей ленгмюровских пульсаций вытекает из условий пренебрежимости 4-плазмонными взаимодействиями (подробнее см. ниже).

<sup>xx/</sup>Подчеркнем еще раз, что высказанное утверждение справедливо в условиях квазистационарной турбулентности плазмы <sup>/3-5/</sup> и не имеет отношения к нагреву за счет различного рода нестационарных процессов (квазилинейной релаксации, стохастизации колебаний и др.) <sup>/8-10/</sup>.

Наконец, для строго нераспадного спектра наличие в.ч. пульсаций (4.1) может привести эффективно к тому, что правая часть (3.6) станет не равной нулю. Если в (3.6) одну из частот  $\omega$  считать низкой и подставить в (3.6) выражение (4.1), то получим правую часть, пропорциональную третьей степени энергии в.ч. пульсаций. Очевидно, что последовательный учет всех отброшенных членов того же порядка приведет в результате к формуле (3.10).

### §5. Оценки ширины корреляционной кривой в условиях слабой ленгмюровской турбулентности

Приведем некоторые конкретные значения величин уширения корреляционных кривых в условиях слабой ленгмюровской турбулентности плазмы. Здесь мы будем использовать обозначения и результаты работы <sup>/5/</sup>. Подробности расчетов содержатся в приложении 2.

В изотермической плазме распады запрещены (в пренебрежении акустическими колебаниями) и корреляции пульсаций связаны, в основном, с 4-плазмонным взаимодействием. Влияние длинноволновых колебаний с  $k \gg k_* = \sqrt{m_e / m_i} \omega_{pe} / v_{Te}$  ( $\omega_{pe}$  - плазменная частота,  $v_{Te}$  - тепловая скорость электронов,  $m_e$  - масса,  $m_i$  - масса ионов) на корреляционные эффекты сильно ослаблено компенсацией двух типов 4-плазменных взаимодействий, и  $\gamma_k^N$  имеет оценку <sup>/11/</sup>:

$$\gamma_k^N = \frac{\omega_{pe}}{4} \left(\frac{k_*}{k}\right)^4 \left(\frac{\omega_{pe}}{k v_{Te}}\right)^2 \left(\frac{W_{k > k_*}}{n_0 T_e}\right)^2 \approx \nu_e \frac{W}{n_0 T_e} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{3/5} \left(\frac{k_*}{k}\right)^6. \quad (5.1)$$

Здесь  $\nu_e$  - частота парных соударений электронов с ионами. Выражение (5.1) получено в предположении, что разность частот ленгмюровских волн определяется тепловым движением, которое справедливо, если  $\gamma_k^N < \omega_{pe} m_e k^2 / m_i k_*^2$  или



$$\frac{W}{n_0 T_e} \ll \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^2 \frac{\omega_{pe}}{\nu_e} \left( \frac{k}{k_*} \right)^3 \left( \frac{k_*}{k_0} \right)^2 \quad (5.2)$$

Последнее заведомо выполняется, если  $N_D > L (m_i/m_e)^2$  ( $L$  - кулоновский логарифм,  $N_D$  - число частиц в дебаевской сфере).

Рассмотрим теперь корреляции пульсаций при  $k \ll k_*$ , где, как, правило, сосредоточена основная масса энергии турбулентности. В этом случае  $\tilde{\gamma}_k^N$  имеет оценку (см. приложение 2):

$$\tilde{\gamma}_k^N = \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}}{k k_0 \nu_e^2 T_e} \left( \frac{W}{n_0 T_e} \right)^2 \xi \quad (5.3)$$

Здесь  $k_0$  - основной масштаб турбулентности, определяемой из формулы (12),

$$k_0 = k_* \left( \frac{Q_*}{Q} \right)^{\frac{1}{2(\nu-1)}}$$

где  $Q = \nu_e W$  - плотность мощности генерации ленгмюровской турбулентности,  $Q_* = \frac{24}{\pi} (\nu_e / \omega_{pe}) \nu_e n_0 T_e \approx \nu_e W_T$ , а  $W_T$  соответствует уровню тепловых шумов.

$\nu$  - показатель спада спектра  $W_k$  в сторону больших  $k$  в асимптотической области  $k \gg k_0$ , где  $W_k \approx (k_0/k)^\nu$ . Кроме того

$$\xi = \frac{\pi (\nu-1)^2 (8\nu+5)}{96 \nu (\nu - \frac{1}{2}) (\frac{\nu}{2} + 1)} = \begin{matrix} 0.06, & \nu = 3 \\ 0.025, & \nu = 4 \end{matrix} \quad (5.4)$$

(как показано в <sup>3,4/</sup>  $\nu$  изменяется в пределах  $2.84 < \nu < 4$ ).

Уравнение баланса, использованное в работах /5,6/ при вычислении спектра квазистационарной ленгмювской турбулентности плазмы, справедливо, если  $\frac{\gamma}{k} \approx N$  не превосходит разности частот взаимодействующих пульсаций (дисперсия линейна). Если считать, что уровень турбулентности достаточно высок, так что кривая имеет резкий максимум при  $k = k_0$ , то это условие можно записать как  $\gamma_k^N < k_0^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}$  или

$$k_0 > k_* \left( \frac{W}{n_0 T_e} \frac{m_1}{m_e} \right)^{1/2} = k_* \left( \frac{Q}{Q_*} \frac{24}{\pi} \frac{m_1 \nu_e}{m_e \omega_{pe}} \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Если  $k_0 \ll k_*$ , то  $W / n_0 T_e \ll \frac{m_e}{m_1}$  или

$$Q_* < Q < Q_* \left( \frac{m_e}{m_1} \frac{\omega_{pe}}{\nu_e} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu}},$$

что может выполняться лишь при

$$N_D > L \frac{m_1}{m_e}. \quad (5.6)$$

Это неравенство выполняется в большинстве астрофизических приложений, но не всегда в условиях лабораторного эксперимента. Если условие (5.6) нарушается, то при расчете квазистационарного спектра турбулентных пульсаций плазмы необходимо учитывать сдвиг и уширение резонансной линии, описываемых формулой (3.6). Однако примерно в этих же условиях на спектрах турбулентности сказываются парные соударения частиц, так как разность этих частот будет порядка частоты соударений.

## §6. Резюме

Сформулируем кратко основные результаты проведенного исследования.

1. Получены уравнения, адекватно описывающие корреляционные эффекты.

2. Доказано, что форма корреляционных кривых вблизи резонансных частот имеет вид лоренцевой кривой  $I_k = \frac{a_k}{(\omega - \omega_k^N)^2 + (\gamma_k^N)^2}$ .

3. Ширина резонансной кривой связана как со спонтанными процессами распада, определяющими величину  $\gamma_k^N$ , так и с интегральными характеристиками нелинейного сдвига частоты  $\omega_k^N$ , что находит свое отражение в зависимости  $\omega_k^N$  от  $\omega$  /5/.

4. Получены конкретные выражения для оценки ширины корреляционных функций ленгмюровских пульсаций и условия, при которых реализуется спектр  $W_k$ , рассчитанный в работах /3,4/. Они сводятся к

$$N_D > L \frac{m_i}{m_e}.$$

### Приложение 1

Для дальнейшего целесообразно разбить турбулентное поле  $E^T$  на высоко-  $E^H$  и низкочастотную  $-E^L$  части. Высокочастотному полю  $E^H$ , спектр которого здесь мы будем считать распадным, соответствует частота  $\omega^H$  порядка частот исследуемых турбулентных пульсаций, полю  $E^L$  - частота  $\omega^L$  порядка их разности  $\omega^L \approx \omega_1^H - \omega_2^H$ . В первом приближении для в.ч. полей можно записать

$$E_{\kappa}^{TL} = -\frac{4\pi i}{\omega \epsilon^l(\kappa)} \int S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2) (E_{\kappa_1}^{TH} E_{\kappa_2}^{TH} - \langle E_{\kappa_1}^{TH} E_{\kappa_2}^{TH} \rangle) d\lambda \quad (1)$$

Поскольку нас интересует уравнение, содержащее средние от квадратичных комбинаций лишь в.ч. полей, величины  $E_{\kappa}^{TL}$  с помощью (1) из теории должны быть исключены. Рассмотрим  $\langle E_{\kappa}^T E_{\kappa_1}^T E_{\kappa_2}^T \rangle$ . Считая поле  $E_{\kappa}^T$  высокочастотным, имеем

$$\begin{aligned} \langle E_{\kappa}^T E_{\kappa_1}^T E_{\kappa_2}^T \rangle &= \langle E_{\kappa}^{TH} E_{\kappa_1}^{TH} E_{\kappa_2}^{TH} \rangle + \langle E_{\kappa}^{TH} E_{\kappa_1}^{TL} E_{\kappa_2}^{TH} \rangle + \\ &+ \langle E_{\kappa}^{TH} E_{\kappa_1}^{TH} E_{\kappa_2}^{TL} \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Последние два члена в (2) с помощью (1) преобразуются в член, пропорциональный  $S$  в  $\Sigma'$  (см. формулу (2.6)). Первый дает особенность вида  $1/\epsilon^l(-\kappa)$ . Запишем уравнение для  $E_{\kappa}^{TH}$  более точно

$$\begin{aligned} \epsilon^l(\kappa') E_{\kappa'}^{TH} &= -\frac{4\pi i}{\omega'} \int S(\kappa', \kappa'_1, \kappa'_2) (E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TH} + E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TL} + E_{\kappa'_1}^{TL} E_{\kappa'_2}^{TH} - \\ &- \langle E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TH} + E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TL} + E_{\kappa'_1}^{TL} E_{\kappa'_2}^{TH} \rangle) d\lambda' - \frac{4\pi i}{\omega'} \int \Sigma(\kappa', \kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3) \cdot \\ &\cdot (E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TH} E_{\kappa'_3}^{TH} - E_{\kappa'_1}^{TH} \langle E_{\kappa'_2}^{TH} E_{\kappa'_3}^{TH} \rangle - \langle E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TH} E_{\kappa'_3}^{TH} \rangle) \delta(\kappa' - \kappa'_1 - \kappa'_2 - \kappa'_3) \cdot \\ &\cdot d\kappa'_1 d\kappa'_2 d\kappa'_3, \quad d\lambda' = \delta(\kappa' - \kappa'_1 - \kappa'_2) d\kappa'_1 d\kappa'_2. \end{aligned} \quad (3)$$

В последнем члене пренебрегается н.ч. полями, т.к. согласно (1) они дают более высокие степени в.ч. полей. Умножая (3) на  $E_{\kappa_1}^{TH} E_{\kappa_2}^{TH}$  и вычисляя среднее значение  $\langle E_{\kappa}^{TH} E_{\kappa_1}^{TH} E_{\kappa_2}^{TH} \rangle$ , получим

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\ell}(\kappa') \langle E_{\kappa'}^{\text{TH}} E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} \rangle &= -\frac{4\pi i}{\omega'} \int S(\kappa', \kappa'_1, \kappa'_2) (\langle E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} E_{\kappa'_1}^{\text{TH}} E_{\kappa'_2}^{\text{TH}} \rangle - \\
&- \langle E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} \rangle \langle E_{\kappa'_1}^{\text{TH}} E_{\kappa'_2}^{\text{TH}} \rangle) d\lambda' - \frac{8\pi i}{\omega'} \int S(\kappa', \kappa'_1, \kappa'_2) (\langle E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} E_{\kappa'_1}^{\text{TH}} E_{\kappa'_2}^{\text{TL}} \rangle - \\
&- \langle E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} \rangle \langle E_{\kappa'_1}^{\text{TH}} E_{\kappa'_2}^{\text{TL}} \rangle) d\lambda' - \frac{4\pi i}{\omega'} \int \Sigma(\kappa', \kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3) (\langle E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} E_{\kappa'_1}^{\text{TH}} E_{\kappa'_2}^{\text{TH}} E_{\kappa'_3}^{\text{TH}} \rangle - \\
&- \langle E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} \rangle \langle E_{\kappa'_1}^{\text{TH}} E_{\kappa'_2}^{\text{TH}} E_{\kappa'_3}^{\text{TH}} \rangle - \langle E_{\kappa'_2}^{\text{TH}} E_{\kappa'_3}^{\text{TH}} \rangle \langle E_{\kappa'_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} \rangle) \cdot \\
&\cdot \delta(\kappa' - \kappa'_1 - \kappa'_2 - \kappa'_3) d\kappa'_1 d\kappa'_2 d\kappa'_3.
\end{aligned}$$

Разобьем средние от произведения четырех полей на парные, от пяти - на всевозможные произведения средних от трех и двух полей (остальные содержат  $\langle E^{\text{T}} \rangle$ , которое по определению равно нулю). Используя (1), получим

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\ell}(\kappa') \langle E_{\kappa'}^{\text{TH}} E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} \rangle &= -\frac{8\pi i}{\omega'} S(\kappa', -\kappa_1, -\kappa_2) I_{\kappa_1} I_{\kappa_2} \delta(\kappa' + \kappa_1 + \kappa_2) - \\
&- \frac{4\pi i}{\omega'} \langle E_{\kappa'}^{\text{TH}} E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} \rangle \int \Sigma'(\kappa', \kappa'_1) I_{\kappa'_1} d\kappa'_1 - \frac{4\pi i}{\omega'} I_{\kappa_1} \int \tilde{\Sigma}'(\kappa', -\kappa_1, \kappa'_2, \kappa'_3) \cdot \\
&\cdot \langle E_{\kappa_2}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} E_{\kappa'_3}^{\text{TH}} \rangle \delta(\kappa' + \kappa_1 - \kappa'_2 - \kappa'_3) d\kappa'_2 d\kappa'_3 - \frac{4\pi i}{\omega'} I_{\kappa_2} \int \tilde{\Sigma}'(\kappa', -\kappa_2, \kappa'_2, \kappa'_3) \cdot \\
&\cdot \langle E_{\kappa_1}^{\text{TH}} E_{\kappa_2}^{\text{TH}} E_{\kappa'_3}^{\text{TH}} \rangle \delta(\kappa' + \kappa_2 - \kappa'_2 - \kappa'_3) d\kappa'_2 d\kappa'_3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$\Sigma'(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{1}{2} [\Sigma(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) + \Sigma(\kappa, \kappa_1, \kappa_3, \kappa_2)] -$$

$$\frac{8\pi i S(\kappa_2 + \kappa_3, \kappa_2, \kappa_3) S(\kappa, \kappa_1, \kappa_2 + \kappa_3)}{(\omega_2 + \omega_3) \epsilon(\kappa_2 + \kappa_3)}, \quad (5)$$

$$\tilde{\Sigma}'(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \Sigma'(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) + \Sigma'(\kappa, \kappa_3, \kappa_1, \kappa_2) + \Sigma'(\kappa, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_1).$$

Введем понятие нелинейной проницаемости  $\epsilon^N(\kappa)$ , определив ее

$$\epsilon^N(\kappa) = \frac{4\pi i}{\omega} \int \Sigma'(\kappa, \kappa_1) I_{\kappa_1} d\kappa_1. \quad (6)$$

Из уравнения (4) следует, что

$$\langle E_{\kappa'}^{TH} E_{\kappa_1}^{TH} E_{\kappa_2}^{TH} \rangle = I_{\kappa_1, \kappa_2} \delta(\kappa' + \kappa_1 + \kappa_2),$$

а  $I_{\kappa_1, \kappa_2}$  удовлетворяет искомому уравнению (3.2)

$$I_{\kappa_1, \kappa_2} = \frac{8\pi i S(\kappa', -\kappa_1, -\kappa_2) I_{\kappa_1} I_{\kappa_2}}{(\omega_1 + \omega_2) (\epsilon^\ell(-\kappa') + \epsilon^N(-\kappa'))} -$$

$$\frac{4\pi i}{(\omega_1 + \omega_2) (\epsilon^\ell(-\kappa') + \epsilon^N(-\kappa'))} \{ I_{\kappa_1} \int \Sigma'(-\kappa_1 - \kappa_2, -\kappa_1, \kappa'_2, -\kappa_2 - \kappa'_1) I_{\kappa'_2 - \kappa_2 - \kappa'_1} d\kappa'_1 +$$

$$+ I_{\kappa_2} \int \tilde{\Sigma}'(-\kappa_1 - \kappa_2, -\kappa_2, \kappa'_1, -\kappa_1 - \kappa'_1) I_{-\kappa'_1, -\kappa_1 - \kappa'_1} d\kappa'_1 \}.$$

Перейдем к получению уравнения для корреляционных функций ленгмюровских пульсаций (спектр нераспадный для трех волн). Учтем эффек-

ты 4- плазмонных взаимодействий. Уравнение для турбулентного поля имеет вид (см. (2.1)-(2.2)):

$$\begin{aligned} \epsilon^{\ell}(\kappa) E_{\kappa}^T E_{\kappa'}^T = & -\frac{4\pi i}{\omega} E_{\kappa} \cdot (j_{\kappa}^{T(2)} + j_{\kappa}^{T(3)}) - \frac{4\pi i}{\omega} \int \Sigma^{(4)}(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \\ & E_{\kappa}^T (E_{\kappa_1}^T E_{\kappa_2}^T E_{\kappa_3}^T E_{\kappa_4}^T - \langle E_{\kappa_1} E_{\kappa_2} E_{\kappa_3} E_{\kappa_4} \rangle) \delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3 d\kappa_4 - \\ & - \frac{4\pi i}{\omega} \int \Sigma^{(5)}(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) E_{\kappa}^T (E_{\kappa_1}^T E_{\kappa_2}^T E_{\kappa_3}^T E_{\kappa_4}^T E_{\kappa_5}^T - \langle E_{\kappa_1}^T E_{\kappa_2}^T E_{\kappa_3}^T E_{\kappa_4}^T E_{\kappa_5}^T \rangle) \cdot \\ & \cdot \delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4 - \kappa_5) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3 d\kappa_4 d\kappa_5. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь учтены токи, пропорциональные четвертой и пятой степенями по турбулентному полю. Как и в случае распадного спектра, выделим низко- и высокочастотные составляющие, учитывая, что для последних  $\kappa \neq \kappa_1 + \kappa_2$ . Структура корреляционных функций связана с уточнением в.ч. поля (см. формулу (3)).

$$\begin{aligned} \epsilon(\kappa') E_{\kappa'}^{TH} = & -\frac{4\pi i}{\omega'} \int S(\kappa', \kappa'_1, \kappa'_2) (E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TL} + E_{\kappa'_1}^{TL} E_{\kappa'_2}^{TH} - \langle E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TL} + E_{\kappa'_1}^{TL} E_{\kappa'_2}^{TH} \rangle) d\lambda' - \\ & - \frac{4\pi i}{\omega'} \int \Sigma(\kappa', \kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3) (E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TH} E_{\kappa'_3}^{TH} - E_{\kappa'_1}^{TH} \langle E_{\kappa'_2}^{TH} E_{\kappa'_3}^{TH} \rangle - \\ & - \langle E_{\kappa'_1}^{TH} E_{\kappa'_2}^{TH} E_{\kappa'_3}^{TH} \rangle) \delta(\kappa' - \kappa'_1 - \kappa'_2 - \kappa'_3) d\kappa'_1 d\kappa'_2 d\kappa'_3. \end{aligned} \quad (9)$$

В первом члене правой части (9) можно удовлетворить  $\delta(\kappa' - \kappa'_1 - \kappa'_2)$ , если одно из полей низкочастотное. Выражая  $E^{TL}$  с помощью (1), приведем правую часть к виду, который имеет второй член, где теперь вместо  $\Sigma$  будет входить  $\Sigma'$  от четырех аргументов (5). Выражение

(9) для  $E^{TH}$  следует использовать лишь в членах с  $j^{T(2)}$  и  $j^{T(3)}$ , так как в остальных это приводит к степеням более высоким, нежели шестая по  $E^{TH}$ , а 4-плазмонные эффекты описываются членами, пропорциональными кубу интенсивности турбулентности или шестой степени полей. Поступая описанным выше образом, можно видеть, что члены, в которых не использовалось соотношение (9), пропорциональны  $I_k$  и должны быть включены в нелинейную проницаемость  $\tilde{\epsilon}^N(k)$ , которая теперь учитывает индуцированные процессы 4-плазмонных взаимодействий. В результате получим уравнение (3.10)

$$I_k = \frac{32\pi^2}{\omega^2} \int \frac{|\sum'(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)|^2}{|\epsilon^l(\kappa) + \tilde{\epsilon}^N(\kappa)|^2} I_{\kappa_1} I_{\kappa_2} I_{\kappa_3} \delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3.$$

## Приложение 2

Используем результаты работы /3/. Поскольку  $\gamma_k^N$  определяется лишь индуцированными процессами, следует вместо формул (2.10) записать (обозначения см. /3/):

$$v'(\xi, \eta) = \frac{\xi^{\frac{\nu}{2}+1} - \eta^{\frac{\nu}{2}+1} - (1+\xi-\eta)^{\frac{\nu}{2}+1}}{\eta^{\frac{\nu}{2}+2} \xi^{\frac{\nu}{2}+2} (1+\xi-\eta)^{\frac{\nu}{2}+2}} \quad (10)$$

$$u'(\xi, \eta) = \frac{(\xi+\eta-1)^{\frac{\nu}{2}+1} - \xi^{\frac{\nu}{2}+1} - \eta^{\frac{\nu}{2}+1}}{\eta^{\frac{\nu}{2}+2} \xi^{\frac{\nu}{2}+2} (\xi+\eta-1)^{\frac{\nu}{2}+2}},$$

поскольку член с единицей соответствует спонтанным процессам. Тогда вместо (2.8) будем иметь



$$\gamma_k^N = \frac{\pi}{6} \omega_{pe} \left( \frac{W^\ell}{8n_0(T_e + T_i)} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^2 (\nu-1)^2}{k_0^2 \nu_{Te}^2} \xi_0^\nu (G'_1 + G'_2 + G'_3), \quad (11)$$

где  $G'_1, G'_2, G'_3$  отличаются от соответствующих интегралов  $G_1, G_2, G_3$  заменой  $\nu$  и  $\mu$  на  $\nu'$  и  $\mu'$ . Однако теперь, как нетрудно видеть, лишь область малых  $\xi \approx \xi_0$  и  $\eta \approx \eta_0$  дает вклад в  $G'_1$ . Производя замену переменных в  $G'_3$   $\eta' = \xi + \eta - 1$ , легко убеждаемся, что существенны лишь  $\xi \approx \xi_0$  и  $\eta' \approx \xi_0$ , кроме того,  $G'_3 = 2G'_1$ .

Далее

$$G'_1 + G'_2 + G'_3 \approx G'_1 + G'_3 \approx 3G'_1 = - \frac{8(8\nu+5)}{5\xi^{\nu-\sqrt{2}} \nu (\frac{\nu}{2}+1)(\frac{\nu}{2}-1)}, \quad (12)$$

откуда легко получить выражение для  $\xi$  (5.4).

#### Л и т е р а т у р а

1. А.К. Березин, Я.Б. Файнберг, Л.И. Болотин, Г.П. Березина, И.А. Безъязычный, Ю.М. Ляпкало, В.В. Лившиц. In Plasma Phys. and Control. Nucl. Fusion Research (Proc. Conf. Culham, 1965), 1, IAEA, (Vienna 1966) 515.  
Е.А. Корнилов, Я.Б. Файнберг, О.Ф. Ковпик. Письма ЖЭТФ 4, 147, 1966.
2. Ю.Г. Яременко, В.М. Деев, Р.Л. Слабовик, И.Ф. Харченко. Атомная энергия (АЭ) 25, 213; 1967.
3. С.Б. Пикельнер, В.Н. Цытович. ЖЭТФ, 55, 977, 1968.
4. V.G. Makhankov, V.N. Tsytovich, E.P. Zhidkov, Che ze Hen. Preprint JINR P9-4464, Dubna, 1969; Plasma Phys. (in print).

5. В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович. Препринт ОИЯИ Р9-4044, Дубна, 1968; АЭ, 27, 53, 1969.
6. И.Ф. Харченко, Я.Б. Файнберг, Р.М. Николаев, Е.А. Корнилов, Е.И. Луценко, Н.С. Педенко. ЖТФ, 31, 761, 1961; Е.А. Корнилов, О.Ф. Ковник, Я.Б. Файнберг, И.Ф. Харченко. В сб. "Физика плазмы и проблемы упр. термояд. синтеза", стр. 145, Наукова думка, Киев, 1965.
7. В.Д. Федорченко, В.И. Муратов, Б.Н. Руткевич. 4, 300, 1964; ЖТФ, 35, 2021, 1965; ЖТФ, 36, 1964, 1966. С.М. Левитский, В.З. Шаповал, И.П. Шашурин. ЖТФ, 39, 465, 1969.
8. Ф.Г. Басс, Я.Б. Файнберг, В.Д. Шапиро. ЖЭТФ, 49, 329, 1965. P.A. Starrock. Phys.Rev., 141, 186 1966.
9. Г.М. Заславский, Н.Н. Филоненко. ЖЭТФ, 54, 1590, 1968.
10. Б.Б. Кадомцев. Вопросы теории плазмы, т.4, М., Атомиздат, 1964. (Engl. transl. "Plasma Turbulence" in v. Progress in Plasma Phys. New-York).
11. В.А. Липеровский, В.Н. Цытович, Изв. ВУЗов "Радиофизика", 12, 823, 1969.
12. В.А. Липеровский, В.Н. Цытович. ЖЭТФ, 57, 1252, 1969. E.P. Jidkov, V.A. Liperovsky, V.G. Makhankov, S.B. Pikelner, Che ze Hen, V.N. Tsytoovich. In Phenomena in Ionized Gases (Contr. Papers. Conf. Bucharest, 1969). Bucharest, Romania, p.525, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел

9 декабря 1969 года.