СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р5 - 4928

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

А.А. Арсеньев

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯХ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ

1970

P5 - 4928

8251/2 пр

А.А. Арсеньев

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯХ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ

Арсеньев А.А. P5-4928

Об эквивалентных регуляризациях задачи рассеяния на сильно сингулярных потенциалах

В работе предложен новый метод сведения задачи рассеяния на сингулярном потенциале к уравнению Фредгольма с несингулярным ядром. Доказано, что в качестве регуляризирующей функции можно брать преобразование Лапласа любой функции $\mu(\beta)$ из достаточно широкого класса и доказано, что решение задачи рассеяния есть гладкая функция вне точек сингулярности потенциала.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований

Дубна, 1970

Arseniev A.A. P5-4928

On Equivalent Regularizations of the Scattering Problem on Strongly Singular Potentials

A new method is suggested for reducing the problem of scattering on the singular potential to the Fredgholm equation with a nonsingular nucleus. It is proved that the Laplace transformations of any function $\mu(\beta)$ from a rather wide group can be used as a regularizing function and the solution of the problem is a smooth function beyond the singular potential points.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1970

1. Мы назовем потенциал $V(x),\ x \in R$, $N \geq 3$ сингулярным, если множество $\Omega = \{x ; V(x) = \infty\}$ не пусто. Задача рассеяния на сингулярном потенциале и, в частности, потенциале, имеющем твердую сердцевину (т.е. в случае $\mathrm{mes}\,\Omega > 0$), изучалась многими авторами /1-3/ ввиду ее важности и для ядерной физики, и как модельной задачи в теории поля в связи с методом ператизации. Наша цель состоит в том, чтобы задачу рассеяния на сингулярном потенциале свести к интегральному уравнению Фредгольма, ядро которого не имело бы особенностей.

Оказывается, это можно сделать многими способами.

2. Пусть $V_M(x) = \min\{V(x), M\}$. В дальнейшем мы предполагаем, что функция $V(x)$ удовлетворяет условиям A :

$$A_1).\ V_M(x) \equiv M,\quad M \leq 0$$

$A_2).\ V_M(x)$ локально удовлетворяет условию Гельдера при $V(x) \in R_N$.

A_3). существуют такие константы $R_0 < \infty$, $C < \infty$, $a > 0$, что $V(x) < C|x|^{-N-a}$, $|x| > R_0$.

3. Пусть H_M –самосопряженное расширение в $L^2(R_N)$ оператора, определенного в C_0^∞ формулой

$$H_M u = -\Delta u + V_M(x)\,u . \tag{1}$$

Пусть $G_M(x,y,\beta)$, $\beta > 0$ – ядро полугруппы $\exp(-\beta H_M)$.

Это ядро определяет интегральный оператор $G_M(\beta) \in [L^p \to L^p, 1 \leq p \leq \infty]$.

<u>Лемма 1.</u> При $\forall \beta > 0$ и $M \to \infty$ последовательность $G_M(\beta)$ в сильной топологии $[L^p \to L^p, 1 \leq p < \infty]$ сходится к оператору $G(\beta)$ с ядром

$$G(x,y,\beta) = \lim_{M \to \infty} G_M(x,y,\beta) . \tag{2}$$

Предел в (2) существует при $\forall x, y \in R_N$, $\beta > 0$.

Доказательство. В силу известной /4/ формулы

$$G_M(x,y,\beta) = G_0(x,y,\beta) \quad \mathcal{E}\{\exp(-\beta \int_0^1 V_M(2\sqrt{\beta}(x(\tau)-\tau x(1))+x+(y-x)\tau)d\tau\} \quad (3)$$

последовательность $G_M(x,y,\beta)$ монотонно убывает и ограничена снизу, отсюда следует существование предела (2). Сходимость оператора $G_M(\beta)$ к $G(\beta)$ следует из оценки

$$0 \le G_M(x,y,\beta) \le G_0(x,y,\beta). \quad (4)$$

В дальнейшем индекс M мы будем опускать, если $M = \infty$.

Лемма 2. $\forall y \in R_N$, $\beta > 0$ справедливо равенство

$$\text{mes}\,\{\, x,\ V(x) = \infty,\quad G(x,y,\beta) \neq 0 \,\} = 0.$$

Доказательство. Следует из леммы 1 и равенства

$$\int_0^\beta d\tau [\int G_0(x,\xi,t-\tau)\, V_M(\xi)\, G_M(\xi,y,\tau)\, d\xi] = G_0(x,y,\beta) - G_M(x,y,\beta).$$

Лемма 3. Пусть $\phi(x) \in L^\infty$, $\phi(x,\beta) = (G(\beta)\phi)(x)$; S – открытое множество с гладкой компактной границей $S \cap \text{гр.}\Omega = \emptyset$. Тогда при $\forall \beta_0 > 0$ функция $\phi(x,\beta)$ есть решение смешанной задачи

$$\begin{cases} \partial_\beta \phi = \Delta\phi - V(x)\phi, \quad \beta > \beta_0, \quad x \in S,\ \phi(x,\beta) \in L^\infty(S). \\ \phi(x, \beta_0 + 0) = \phi(x,\beta_0),\ x \in S \\ \phi(x,\beta) = \int G(x,y,\beta)\phi(y)\,dy,\ x \in \text{гр.}\ S. \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $O(\bar S)$ – такая окрестность $\bar S$, что $O(S) \cap \Omega = \emptyset$, гр. $O(S) \cap$ гр. $S = \emptyset$.

Найдем такое $M_0 < \infty$, что при $M \ge M_0$ справедливо равенство $V_M(x) \equiv V(x)$ при $x \in \bar O(S)$. Функция $\phi_M(x,\beta) = G_M(\beta)\phi$, непрерывная по $x \in R_N$ при $\beta > 0$, и есть решение задачи

$$\begin{cases} \partial_\beta \phi_M = \Delta\phi_M - V(x)\phi_M,\ \beta > \beta_0,\ x \in O(S). \\ \phi_M(x,\beta_0+0) = \phi_M(x,\beta_0),\ x \in O(\bar S) \\ \phi_M(x,\beta) = \int G(x,y,\beta)\,\phi(y)\,dy,\ x \in \text{гр.}\bar O(\bar S). \end{cases} \quad (5')$$

Из леммы 1 следует, что $\forall x: \phi_M(x,\beta_0) \to \phi(x,\beta_0)$, $M \to \infty$, в смысле поточечной сходимости, причем $\|\phi_M\|_\infty \le \|\phi\|_\infty$. Отсюда следует, что

$$\sup_{M,\, x \in \bar S} |\nabla_x \phi_M(x,\beta)| < \infty;\quad \beta > \beta_0,$$

поэтому $\phi(x,\beta)$ непрерывна по x в S при $\beta > \beta_0$. Так как S и β_0 произвольны, то $\phi(x,\beta) \in C(R_N \setminus \Omega)$, $\forall \beta > 0$. Но тогда решение задачи (5) существует и единственно, причём оно есть предел функций $\phi_M(x,\beta)$ при $M \to \infty$, а этот предел равен $\phi(x,\beta)$.

Из леммы 1 и неравенства (3) следует, что операторы $G(\beta)$ образуют полугруппу ограниченных операторов в $[L^p \to L^p,\ 1 \le p \le \infty]$. Пусть

$$P(\Omega)u = \begin{cases} u(x), & x \in R_N \setminus \Omega \\ 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

A_0 – инфинитезимальный оператор полугруппы $G(\beta)$. Положим по определению

$$Hu = -A_0 P(\Omega) u,\quad D(H) = \{ u,\ u \in L^p,\ P(\Omega)u \in D(A_0) \subset L^p \}.$$

Из леммы 3 вытекают следующие следствия:

1. Оператор H есть расширение оператора, заданного в $C_0^\infty(R_N \setminus \Omega)$ формулой (1) при $M = \infty$.

2. Полугруппа $G(\beta)$ принадлежит классу C_0 в $L^p(R_N \setminus \Omega)$, $1 \le p < \infty$.

3. A_0 и H в $L^2(R_N \setminus \Omega)$ самосопряжены, замкнуты и

$$Hu = \int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda, H) P(\Omega) u,\quad G(\beta) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\beta)\, dE(\lambda, H)\, P(\Omega),$$

где $E(\lambda, H)$ –разложение единицы относительно $L^2(R_N \setminus \Omega)$.

<u>Определение</u>. Функция $u(x,k)$ называется решением задачи рассеяния для оператора H, если она удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} Hu = \lambda u,\quad \lambda = k^2 > 0,\quad u(x,k) \in D(H) \subset L^\infty. & (6) \\[2ex] u(x,k) = \exp(ikx) + \phi(x,k); & (7) \\[2ex] \phi(x,k) = O\left(|x|^{\frac{1-N}{2}}\right),\ \left(\dfrac{\partial}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda}\right)\phi(x,k) = o\left(|x|^{\frac{1-N}{2}}\right)\ |x| \to \infty. & (8) \end{cases}$$

Лемма 4. Функция $u(x,k)$ в том и только в том случае удовлетворяет уравнению (6), если она при каком-нибудь $\beta > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\exp(-\lambda\beta)\,u = G(\beta)\,u\,, \qquad (9)$$

причём, если $u(x,k) \in L^{\infty}$ и удовлетворяет (9) при каком-нибудь $\beta = \beta_0 > 0$, то она удовлетворяет (9) при всех $\beta > 0$.

Доказательство. Достаточно доказать лишь последнее утверждение. Введем вспомогательное банахово пространство, состоящее из функций, равных нулю на Ω. Норму в нем зададим формулой

$$\| f \|_{B} = \int \exp(-|x|)\,|f(x)|\,dx\,.$$

Из оценки (3) и леммы 3 следует, что $G(\beta)$ в B есть полугруппа класса C_0. Положим

$$S(\beta) = \exp(\lambda\beta)\,G(\beta)\,,\quad I_n = \beta_0^{-1}\int_0^{\beta_0} \exp(2\pi i n/\beta_0)\,S(\beta)\,d\beta\,.$$

Пусть $u(x,k) \in L^{\infty}$ и удовлетворяет (9) при $\beta = \beta_0$. Тогда /5/

$$S(\beta)\,u = (C,1)\sum_n \exp(-2\pi i n\beta/\beta_0)\,I_n u\,;\ 0 \le \beta \le \beta_0\,, \qquad (10)$$

где функции $(I_n u)(x)$ таковы, что

$$\exp[-(\lambda + 2\pi i n/\beta_0)\,\beta]\,I_n u = G(\beta)\,I_n u\,, \qquad (11)$$

$$H I_n u = (\lambda + 2\pi i n/\beta_0) I_n u\,. \qquad (12)$$

Из (11) и леммы 3 следуют оценки:

$$(I_n u()(x) = O(1)\,,\quad |\nabla_x (I_n u)(x)| = O(1)\,,\quad |x| \to \infty\,, \qquad (13)$$

а из (12) и (13) в силу условий A следует, что $(I_n u)(x) = O(|x|^{-N-\alpha})$, $|x| \to \infty$, $n \neq 0$, поэтому $(I_n u)(x) \in L^2$, $n \neq 0$, но тогда из (11) следует, что $(I_n u) \equiv 0$, $n \neq 0$ и из (10) следует доказываемое утверждение.

Итак, мы установили, что (9) эквивалентно (6). Из лемм 3 и 4 вытекает

<u>Следствие.</u> Решение задачи рассеяния $u(x,k) \in C^2(R_N \setminus \Omega)$. Теперь нам нужно из решений уравнения (9) выделить те, которые удовлетворяют (7) и (8).

Положим

$$\begin{cases} g_M(x,y,\beta) = G_0(x,y,\beta) - G_M(x,y,\beta) \\ T_M^{\pm}(\lambda) = -[\exp(-(\lambda \pm i0)\beta) - G_0(\beta)]^{-1} g_M . \end{cases} \tag{14}$$

Подставив (7) и (14) в (9), мы получим:

$$[\exp(-\lambda\beta) - G_0(\beta)]\phi = -g[\exp(ikx) + \phi]. \tag{15}$$

Изучим операторы g и $[\exp(-(\lambda \pm i0)\beta) - G_0(\beta)]^{-1}$.

<u>Лемма 5.</u> Справедливы следующие оценки:

1) $0 < g(x,y,\beta) < G\ (x,y,\beta),\ \forall x,y \in R\ ,\ \beta > 0$.

2) $\int g_M(x,y,\beta)\,dy \le \begin{cases} 1, & |x| \le R_0 \\ C_1[\exp(-|x|^2/8\beta) + \beta|x|^{-N-\alpha}], & |x| > 8R_0. \end{cases}$

3) $|\nabla_x \int g_M(x,y,\beta)\phi(y)\,dy| \le C_2(\beta)\,\|\phi\|_\infty\,|x|^{-N-\alpha},\ |x| > 8R_0$,

где C_1 и C_2 от M не зависят, C_1 не зависит от β.

<u>Доказательство.</u> Оценки (1) и (2) при $|x| < 8R_0$ тривиальны. Пусть $|x| > 8R_0$. Из (2) следует:

$$\int g_M(x,y,\beta)\,dy = 1 - \mathcal{E}\{\exp(-\beta\int_0^1 V_M(2\sqrt{\beta}\,x(\tau) + x)\,d\tau)\} =$$

$$= 1 - \mathcal{E}_{\substack{\sup|2\sqrt{\beta}x(\tau)| \le 0,5|x| \\ 0\le\tau\le1}}\{\ldots\ldots\} - \mathcal{E}_{\substack{\sup|2\sqrt{\beta}x(\tau)| > 0,5|x| \\ 0\le\tau\le1}}\{\ldots\} \le$$

$$< \beta\,\mathcal{E}_{\sup|2\sqrt{\beta}x(\tau)| \le 0,5|x|}\{\int_0^1 V\ (2\sqrt{\beta}\,x(\tau) + x)\,d\tau\} +$$

$$+ 2\mathcal{E}\{\sup|2\sqrt{\beta}\,x(\tau)| > 0,5|x|\} < C_1[\beta|x|^{-N-\alpha} + \exp(-|x|^2/8\beta)].$$

Оценка (3) вытекает из леммы 3.

Следствие. Оператор $g \in [L^p \to L^q, 1 \le p \le \infty, 1 \le g q \le \infty]$ и вполне непрерывен при $1 < p \le \infty$, $1 \le q < \infty$.

6. Пусть $\mu(\beta) \in L^\infty(0, \infty)$ и такова, что

$$\int_0^\infty \mu(\beta)\, d\beta = 1, \quad \exists \epsilon > 0: \int_0^\infty \exp(\epsilon\beta)\mu(\beta)\, d\beta < \infty, \ \mu(\beta) \ge 0. \tag{16}$$

Пусть

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\beta)\mu(\beta)\, d\beta.$$

Определим[5] оператор $F(-\Delta) \in [L^p \to L^p]$ формулой:

$$F(-\Delta)\phi = \int_0^\infty G_0(\beta)\phi\ \mu(\beta)\, d\beta. \tag{17}$$

Интеграл в (17) понимается в смысле Бохнера. Фиксируем точку $\lambda_0 \in (0,\infty)$, пусть $O(\lambda_0)$ достаточно малая окрестность точки λ_0, пусть $\lambda \in O(\lambda_0)$ и $\operatorname{Im}\lambda \ne 0$. Тогда

$$(F(\lambda) - F(-\Delta))^{-1} = F(\lambda)^{-1}[E + K_F(\lambda)],$$

где

$$K_F(\lambda) = (2\pi i)^{-1} \int_C F(\nu)[F(\lambda) - F(\nu)]^{-1} R(\nu, -\Delta)\, d\nu.$$

Ядро оператора $K_F(\lambda)$ легко подсчитать с помощью формулы

$$R(-\nu, -\Delta) = \int_0^\infty \exp(-\nu\beta) G_0(\beta)\, d\beta.$$

Простая выкладка дает:

$$K_F(\lambda)(x,y) = \mp\frac{i}{4}\frac{F(\lambda)}{F'(\lambda)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi|x-y|}\right)^{\frac{N}{2}-1} H^{(3\mp1)/2}_{\frac{N}{2}-1}(|x-y|\sqrt{\lambda}) + A(\lambda, |x-y|); \tag{18}$$

$$A(\lambda,|x-y|) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\Big\{\int_{C^+}[F(\lambda)-F(\rho^2)]^{-1} F(\rho^2) H^{(1)}_{\frac{N}{2}-1}(|x-y|\rho)\rho^{\frac{N}{2}}\, d\rho +$$

$$+ \int_{C^-}[F(\lambda) - F(\rho^2)]^{-1} F(\rho^2) H^{(2)}_{\frac{N}{2}-1}(|x-y|\rho)\rho^{\frac{N}{2}}\, d\rho\Big\}|x-y|^{1-\frac{N}{2}}. \tag{19}$$

В (18) знак $(-)$ берется в случае $\arg\lambda > 0$, $(+)$ – в случае $\arg\lambda < 0$; в (19) контуры C^+ и C^- выходят из 0, при достаточно больших $|\rho|$ совпадают с лучами $\arg\rho = \pm\epsilon$ и выбраны так, что между ними лежит точно один нуль функции $[F(\lambda) - F(\rho^2)]$.

Положим $K_F^{\pm}(\lambda) = K_F(\lambda \pm i0)$.

<u>Лемма 6.</u> 1) $\forall\ \lambda>0 : K_F(\lambda + i\epsilon) \in [L^1 \cap L^\infty \to L^q,\ q > 2N/N-1]$ и непрерывен по ϵ в окрестности $\epsilon = 0$ в сильной топологии.

2) $\forall\ \phi \in L^1 \cap L^\infty : [F(\lambda) - F(-\Delta)]F(\lambda)^{-1}[E + K_F^{\pm}(\lambda)]\phi = \phi$.

3) Если $\phi \in L^\infty$ $\phi(x) = O(|x|^{-N-a})$, $|x| \to \infty$, то функция $(K_F^{+}\phi)(x)$ удовлетворяет условиям излучения и для нее справедлива асимптотика:

$$(K_F^{+}\phi)(x) = C(\lambda,\beta)\,|x|^{\frac{1-N}{2}} \exp i|x|\sqrt{\lambda})\int \exp(-i(n,y)\sqrt{\lambda})\,\phi(y)\,dy +$$

$$+\ O(|x|^{\frac{1-N}{2}-a/4}),\quad |x| \to \infty\ ;\ C(\lambda,\beta) \neq 0.$$

Для доказательства леммы достаточно воспользоваться формулой (18) и заметить, что функция $A(\lambda, |x-y|)$ аналитична по λ при $\lambda \in O(\lambda_0)$ и такова, что

$$A(\lambda, |x-y|) = \begin{cases} O(|x-y|^{-N+2}) & |x-y| \to 0 \\ O(|x-y|^{-N-2}), & |x-y| \to \infty . \end{cases}$$

Положив[x/] $K^{\pm}(\lambda) = K^{\pm}_{\exp(-\lambda\beta)}(\lambda)$, $\beta > 0$,

получим

$$T_M^{\pm}(\lambda) = -\exp(\lambda\beta)[E + K^{\pm}(\lambda)]\,g_M. \qquad (20)$$

[x/] Доказательство леммы 6 опирается на следующие два свойства функции $F(\lambda)$:

$F(\lambda) > 0$, $\lambda \in (0,\infty)$ и $F(\lambda) = O(1/|\lambda|)$, $|\lambda| \to \infty$), $|\arg\lambda| < \pi/2$.

Легко показать, что для оператора $K^{\pm}(\lambda)$ справедливы утверждения леммы 6, поэтому из леммы 5 следует

Лемма 7. Оператор $T^{\pm}_{M}(\lambda) \in [L^{p} \to L^{q}, 1 < p \le \infty, \frac{2N}{N-1} < q < \infty]$ и вполне непрерывен.

Лемма 8. Для того, чтобы функция $u(x, k) = \exp(ikx) + \phi(x,k)$ была решением задачи (6–8), необходимо и достаточно, чтобы $\phi(x,k)$ удовлетворяла уравнению

$$\phi(x,k) = T^{+}(\lambda)[\exp(ikx) + \phi(x,k)]. \tag{21}$$

Доказательство. Достаточность. Умножив (21) на $[\exp(-\lambda\beta) - G_0(\beta)]$, получим, что $\phi(x,k)$ удовлетворяет (15), откуда следует, что $u(x,k)$ удовлетворяет (9), а потому и (6). Условия (8) следуют из равенства (21), леммы 5 и 6. Необходимость. Если $u(x,k)$ есть решение (6–8), то $\phi(x,k)$ удовлетворяет (15). Умножив обе части (15) на $[\exp(-(\lambda+i\epsilon)\beta) - G_0(\beta)]^{-1}$ и воспользовавшись тем фактом, что в силу условий излучения

$$\epsilon(K^{+}(\lambda + i\epsilon)\phi)(x) \to 0, \quad \epsilon \to +0,$$

мы получим требуемое утверждение.

Заметим, что ядро интегрального уравнения (21) не имеет сингулярностей независимо от потенциала $V(x)$ и размерности пространства N. Пусть Ω_1 – связная компонента множества $R_N \setminus \Omega$, содержащая бесконечно-удаленную точку, $\Omega_2 = R_N \setminus (\Omega \cup \Omega_1)$.

Лемма 9. Если $\phi(x,k)$ удовлетворяет уравнению (9), условиям излучения (8) и при $|x| \to \infty$ имеет асимптотику

$$\phi(x,k) = \gamma(\vec{n}) \exp(i|x|\sqrt{\lambda})|x|^{\frac{1-N}{2}} + O(|x|^{\frac{1-N}{2}-\epsilon}); \; n = x/|x|,$$

то $\phi(x,k) \equiv 0$ при $x \in \Omega_1$.

Доказательство. Из (9) и (8) следует, что $\phi(x,k)$ удовлетворяет уравнению

$$\phi(x,k) = T^{+}(k^2)\,\phi(x,k), \tag{22}$$

поэтому

$$\gamma(n) = C(\lambda, \beta) \int \exp(-i(n,y)\sqrt{\lambda})(g\phi)(y)\,dy.$$

Умножив (22) на $(g\phi^*)(x,k)$, проинтегрировав по x и вычтя комплексно-сопряженное выражение[x/], получим:

$$0 = \int (g\phi^*)(x,k)\,[K^+(\lambda,|x-y|) - K^-(\lambda,|x-y|)]\,(g\phi)(y,k)\,dx\,dy =$$

$$= C'(\lambda,\beta)\int |\gamma(n)|^2\,dn\ ;\quad C'(\lambda,\beta)\neq 0\,,$$

откуда следует, что $\gamma(n)\equiv 0$. Поэтому $\phi(x,k) = O(|x|^{\frac{1-N}{2}-\epsilon})$, так как $\phi(x,k)$ удовлетворяет (6), то в силу теоремы Т.Като $\phi(x,k)\equiv 0,\ x\in\Omega_1$. Пусть $\mu(\beta)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условиям (16), $F(\lambda)$ определена равенством (17),

$$F(H) = \int_0^\infty G(\beta)\mu(\beta)\,d\beta\,,\quad T^{\pm}(\lambda,F) = -F(\lambda)^{-1}\,[E+K_F^{\pm}(\lambda)]\,\Gamma(g)\,,$$

$$\Gamma(g) = \int_0^\infty g(x,y,\beta)\mu(\beta)\,d\beta\,.$$

<u>Лемма 10.</u> $\Gamma(g)\in[L^p\to L^q,\ 1\le q<\infty,\ 1\le p\le\infty]$ и вполне непрерывен, $T^{\pm}(\lambda,F)\in[L^p\to L^q,\ 1\le p<\infty,\ \frac{2N}{N-1}<q<\infty]$ и вполне непрерывен. Эта лемма следует из лемм 5 и 6.

Рассмотрим интегральное уравнение (21) и

$$\phi(x,k) = T^+(\lambda,F)[\exp(ikx)+\phi(x,k)] \tag{21'}$$

<u>Теорема 1.</u> Уравнения (21) и (21') имеют единственное решение для всех $\lambda\in(0,\infty)$, за исключением тех точек $\{\lambda_i\}$, которые принадлежат дискретному спектру оператора H. Соответствующие собственные функции удовлетворяют однородным уравнениям:

$$T^+(\lambda_i)\psi = \psi(\ ,\lambda_i)\ ;\quad T^+(\lambda_i,F)\psi = \psi(\ ,\lambda_i)\,, \tag{23}$$

[x/] Этот прием был сообщен нам Л.Д.Фаддеевым.

причём $\operatorname{supp} \psi(x, \lambda) \subseteq \Omega_2$ и справедлива оценка

$$\sum_{\lambda_i \le \lambda} 1 \le \frac{\operatorname{mes} \Omega_2}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} \lambda^{\frac{N}{2}} + o(\lambda^{\frac{N}{2}}), \lambda \to \infty . \tag{24}$$

<u>Доказательство.</u> Так как $T'(\lambda)$ вполне непрерывен в L^p, то либо $(E - T^+(\lambda))^{-1} \in [L^p \to L^p, \frac{2N}{N-1} < p < \infty]$, и тогда (21) имеет единственное решение, либо первое из уравнений (23) имеет нетривиальное решение. Пусть $\psi(x, \lambda_i)$ это решение. Умножив обе части (23) на $[\exp(-\lambda\beta) - G_0(\beta)]$, мы получим, что $\psi(x, \lambda)$ удовлетворяет равенству (9)). Тогда в силу леммы 9 $\operatorname{supp} \psi(x, \lambda) \subset \Omega_2$, поэтому $\psi(x, \lambda) \in L^2$ и удовлетворяет (9) при всех $\beta > 0$, откуда следует (24), тем самым для (21) теорема доказана, откуда следует существование и единственность решения задачи (6-8) при $\lambda \notin \{\lambda_i\}$. Пусть $u(x,k)$ – решение (6-8). Тогда при всех $\beta > 0$ оно удовлетворяет (9), откуда следует, что

$$F(\lambda)\, u = F(H)\, u$$

и $\phi(x, k)$ удовлетворяет уравнению (21').

В силу леммы 10 либо (21') имеет единственное решение, либо второе из уравнений (23) имеет конечное число нетривиальных решений. Пусть $\psi(x, \lambda_i)$ это решение. Умножив обе части (23) на $F(\lambda) - F(-\Delta)$, мы получим, что $\psi(x, \lambda_i)$ удовлетворяет уравнению

$$F(\lambda)\psi = F(H)\psi ,$$

откуда в силу теоремы [16.6.2.(5)] следует, что $H\psi = \lambda\psi$, поэтому $\psi(x, \lambda_i)$ удовлетворяет условиям леммы 9 и $\operatorname{supp} \psi(x, \lambda_{ui}) \subseteq \Omega_2$, откуда следует, что $\psi(x, \lambda_i) \in L^2$. Теорема доказана.

Автор глубоко благодарен Н.Н.Говоруну за предоставленные условия для работы.

Литература

1. F.Calogero and M.B.De Stefano. Phys.Rev. 146 p. 1195(1966).
2. H.Cornille, Nuovo Cimento (10), 43A p. 786 (1966).
3. N.N.Khuri, A.Pais. Rev.Mod.Phys., 36, p.590 (1964).
4. R.H.Cameron, Ann. of Math., v. 59, p. 434 (1954).
5. Э.Хилле, Р.Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы, М. ИЛ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел

13 февраля 1970 года.