ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 4840

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Р.Т. Денчев

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

1969

P5 - 4840

8206/2 ир

Р.Т. Денчев

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Направлено в журнал
"Годишник на Софийския университет"

Денчев Р.Т. P5-4840

Собственные функции одного сингулярного интегрального оператора

Рассматривается оператор $S = B^{-1}A$, где

$$A: \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \ni u \to \mathcal{A} u \in L_2(\Omega),$$

$$B: \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \ni u \to \mathcal{B} u \in L_2(\Omega),$$

$$\mathcal{A} = 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad \mathcal{B} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

$W_2^2(\Omega)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ - пространства Соболева.

Находится явное выражение собственных функций оператора S в случаях, когда Ω - эллипс или трехмерный эллипсоид.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1969

Denchev R.T. P5-4840

Eigenfunctions of a Singular Integral Operator

An operator $S = B^{-1}A$, where

$$A: \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \ni u \to \mathcal{A} u \in L_2(\Omega),$$

$$B: \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \ni u \to \mathcal{B} u \in L_2(\Omega),$$

$$\mathcal{A} = 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad \mathcal{B} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

$W_2^2(\Omega)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ - are the Sobolev's spaces, is considered.

An explicit expression for the eigenfunctions of the operator S for the cases, when Ω is an ellipse or three-dimensional ellipsoid, is found.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1969

Пусть Ω – эллипсоид в n -мерном евклидовом пространстве E_n. Заданы дифференциальные выражения

$$\mathcal{A} = 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad \mathcal{B} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Определим операторы x/

$$A : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \ni u \to \mathcal{A} u \in L_2(\Omega),$$

$$B : W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Известно (см., например, /1/ стр. 170), что существует непрерывный обратный оператор B^{-1}. Рассматриваем оператор

$$S = B^{-1} A.$$

В /2/ доказано, что S имеет полную систему собственных функций, являющихся полиномами. Настоящая работа посвящена нахождению явного выражения этих собственных функций при $n = 2$ и $n = 3$.

1. Пусть $n = 2$. Явное выражение для собственных функций в случае, когда Ω – круг, было найдено Р.А.Александряном /3/. Укажем здесь другой способ нахождения собственных функций в этом случае.

---

x/ $W_2^2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – пространства Соболева (см. /1/, стр. 29–34).

Если u – собственная функция оператора S_f, то очевидно

$$(2-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+(1-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0, \quad u/_{\partial\Omega}=0. \tag{1}$$

Таким образом, нам нужно найти ненулевые решения задачи (1).

Воспользуемся тем, что эллипс можно отобразить в прямоугольник преобразованием, не меняющим волнового уравнения. Действительно, нетрудно проверить, что преобразование

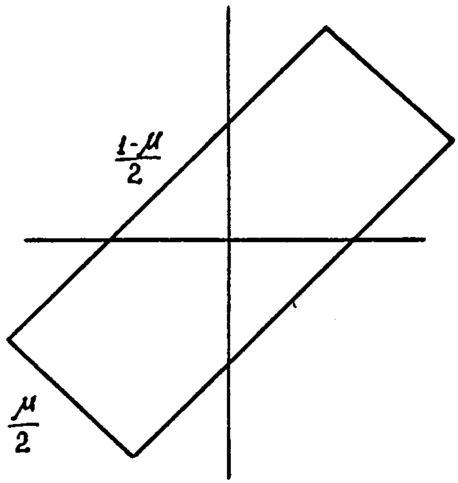
$$\begin{aligned} x_1' &= \sin 2\sqrt{2}\,\pi x_1, \\ x_2' &= \sin 2\sqrt{2}\,\pi x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

отображает прямоугольник со сторонами $\frac{\mu}{2}$ и $\frac{1-\mu}{2}$, наклоном сторон к координатным осям 45° и центром в начале координат (см. рисунок) в эллипс

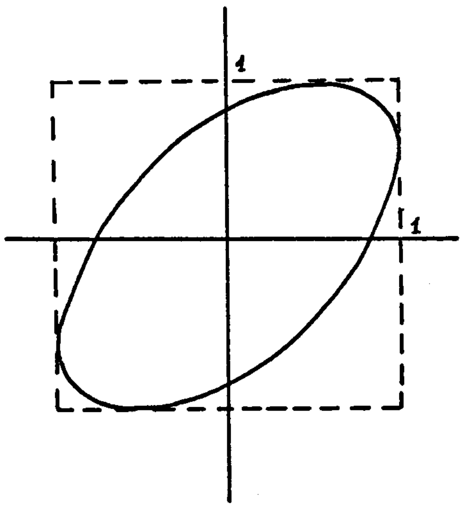
$$\begin{aligned} x_1 &= \cos 2\pi\left(t+\frac{1}{2}\right), \\ x_2 &= \sin 2\pi\left(t+\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

так, что если на прямоугольнике возьмем за параметр длину дуги, отсчитываемую от левого угла, то точки прямоугольника и эллипса, соответствующие друг другу при отображении, имеют одинаковые значения параметра. При этом преобразование (2) не меняет вида волнового уравнения.

Найдем сейчас собственные функции и собственные значения для круга $x_1^2+x_2^2=1$. Последовательными преобразованиями Ψ_1, Ψ_2,



$\frac{1-\mu}{2}$
$\frac{\mu}{2}$



1
1

Ψ_3 , Ψ_4 , Ψ_5 отобразим его в прямоугольник:

$$\Psi_1 : \begin{cases} x_1 = x_1', \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda-1}{2-\lambda}}\, x_2', \end{cases}$$

$$\Psi_2 : \begin{cases} x_1^{I} = \dfrac{1}{2}(x_1^{II} + x_2^{II}), \\ x_2^{I} = \dfrac{1}{2}(x_1^{II} - x_2^{II}), \end{cases}$$

$$\Psi_3 : \begin{cases} x_1^{II} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\, x_1^{III}, \\ x_2^{II} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\, x_2^{III}, \end{cases}$$

$$\Psi_4 : \begin{cases} x_1^{III} = \sin 2\sqrt{2}\,\pi x_1^{IV}, \\ x_2^{III} = \sin 2\sqrt{2}\,\pi x_2^{IV}, \end{cases}$$

$$\Psi_5 : \begin{cases} x_1^{IV} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1^{V} + x_2^{V}), \\ x_2^{IV} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1^{V} - x_2^{V}). \end{cases}$$

Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 , выполненные последовательно, преобразуют единичную окружность в эллипс (3) (см. рисунок), где

$$\cos \pi\mu = 2\lambda - 3, \quad 0 < \mu < 1 . \tag{4}$$

Ψ_4 преобразует этот эллипс в прямоугольник, представленный на рисунке, а Ψ_5 поворачивает этот прямоугольник на 45°.

В результате единичный круг преобразуется в прямоугольник Ω_μ со сторонами $\frac{\mu}{2}$ и $\frac{1-\mu}{2}$, параллельными координатным осям. Соответственно уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\vee 2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\vee 2}} = 0 \tag{5}$$

и наша задача сводится к вопросу о том, при каких значениях μ уравнение (5) имеет нетривиальное решение, обращающееся в нуль на границе прямоугольника Ω_μ. Эту задачу можно решить разделением переменных. Ищем решение в виде

$$u = f(x_1)\,g(x_2)$$

и находим для μ значения

$$\mu = \frac{k}{k+\ell}, \tag{6}$$

где k и ℓ – целые неотрицательные. Соответствующие собственные функции будут:

$$\begin{aligned}
&\sin 2\pi(k+\ell)x_1^{\vee} \sin 2\pi(k+\ell)x_2^{\vee}, && \text{если } k \text{ чётно и } \ell \text{ четно,}\\
&\sin 2\pi(k+\ell)x_1^{\vee} \cos 2\pi(k+\ell)x_2^{\vee}, && \text{если } k \text{ четно и } \ell \text{ нечетно,}\\
&\cos 2\pi(k+\ell)x_1^{\vee} \sin 2\pi(k+\ell)x_2^{\vee}, && \text{если } k \text{ нечетно и } \ell \text{ четно,}\\
&\cos 2\pi(k+\ell)x_1^{\vee} \cos 2\pi(k+\ell)x_2^{\vee}, && \text{если } k \text{ нечетно и } \ell \text{ нечетно,}
\end{aligned} \tag{7}$$

Из (4) и (6) находим, что искомые собственные значения будут равны:

$$\lambda_{k\ell} = 1 + \cos^2 \frac{k}{k+\ell}\frac{\pi}{2}.$$

Выражая $\overset{\vee}{x}_1$ и $\overset{\vee}{x}_2$ через x_1 и x_2, получаем

$$\overset{\vee}{x}_1 = \frac{1}{4\pi}\left[\arcsin\left(\sqrt{\lambda-1}\,x_1 + x_2\sqrt{2-\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. + \arcsin\left(x_1\sqrt{\lambda-1} - x_2\sqrt{2-\lambda}\right)\right],$$

$$\overset{\vee}{x}_2 = \frac{1}{4\pi}\left[\arcsin\left(x_1\sqrt{\lambda-1} + x_2\sqrt{2-\lambda}\right) - \right.$$

$$\left. - \arcsin\left(x_1\sqrt{\lambda-1} - x_2\sqrt{2-\lambda}\right)\right].$$

Подставляя результат в (7), после несложных преобразований получаем следующее выражение для собственных функций:

$$u = T_{k+\ell}\left(x_1\cos\frac{k}{k+\ell}\frac{\pi}{2} + x_2\sin\frac{k}{k+\ell}\frac{\pi}{2}\right) + (-1)^{k+1}\,T_{k+\ell}\left(x_1\cos\frac{k}{k+\ell}\frac{\pi}{2} - x_2\sin\frac{k}{k+\ell}\frac{\pi}{2}\right),$$

где T_n – полиномы Чебышева.

Случай эллипса

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \quad . \qquad (8)$$

сводится к случаю круга преобразованием

$$x_1 = a_1 x_1^{I} \quad ,$$

$$x_2 = a_2 x_2^{I} \quad .$$

При этом уравнение (1) преобразуется в

$$(2-\lambda)\frac{1}{a_1^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2}-(\lambda-1)\frac{1}{a_2^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2}=0 ,$$

и мы получаем:

Теорема 1. Если Ω -эллипс (8), то оператор S имеет собственные значения

$$\lambda_{k,\ell}=1+\frac{a_2}{a_1}\cos^2\frac{k}{k+\ell}\ \frac{\pi}{2}$$

и собственные функции

$$T_{k+\ell}\left(\frac{x_1}{a_1}\cos\frac{k}{k+\ell}\ \frac{\pi}{2}+\frac{x_2}{a_2}\sin\frac{k}{k+\ell}\ \frac{\pi}{2}\right)+(-1)^{k+1}\,T_{k+\ell}\left(\frac{x_1}{a_1}\cos\frac{k}{k+\ell}\ \frac{\pi}{2}-\frac{x_2}{a_2}\sin\frac{k}{k+\ell}\ \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Пусть $n = 3$ и Ω – эллипсоид

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-1=0. \tag{9}$$

Пусть $u(x_1, x_2, x_3)$ – собственная функция, соответствующая некоторому собственному значению λ. Тогда /2/ u есть полином, обращающийся в нуль на границе и удовлетворяющий уравнению

$$\frac{2-\lambda}{\lambda-1}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0. \tag{10}$$

Введем обозначение:

$$\mu=\sqrt{\frac{\lambda-1}{2-\lambda}} ,$$

сделаем замену переменных:

$$z_1=i\mu x_1 ,$$
$$z_2=x_2 ,$$
$$z_3=x_3 ,$$
$$v(z_1, z_2, z_3)=u\left(\frac{1}{i\mu}z_1, z_2, z_3\right).$$

Тогда $v(z_1, z_2, z_3)$ – полином, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z_3^2} = 0 \tag{11}$$

и обращающийся в нуль на гиперболоиде

$$-\frac{z_1^2}{\mu^2 a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} - 1 = 0. \tag{12}$$

Ищем v в виде эллипсоидальной гармонической функции /4/

$$G_n^m(z_1, z_2, z_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} z_1, z_2 \cdot z_3 \\ 1, z_2, z_3 \cdot z_1, z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \\ z_3, z_1 \cdot z_2 \end{pmatrix} \prod_p \left(\frac{z_1^2}{\alpha_1^2+\Theta_p} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2+\Theta_p} + \frac{z_3^2}{\alpha_3^2+\Theta_p} - 1\right), \tag{13}$$

где α_1, α_2, α_3 – произвольные параметры, а Θ_p – нули функции Ламме $E_n^m(\Theta; \alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$. Подберем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, чтобы какой-нибудь из множителей произведения в (13) совпадал с левой частью (12). Посмотрим, при каких значениях это возможно. Пусть при некотором p имеет место

$$\alpha_1^2 + \Theta_p = -\mu^2 a_1^2,$$
$$\alpha_2^2 + \Theta_p = a_2^2,$$
$$\alpha_3^2 + \Theta_p = a_3^2.$$

Отсюда получаем

$$E_n^m(\Theta_p; -\mu^2 a_1^2 - \Theta_p, a_2^2 - \Theta_p, a_3^2 - \Theta_p) = 0.$$

Из последнего равенства вытекает

$$E_n^m(0; -\mu^2 a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2) = 0, \tag{14}$$

так как функции Ламме удовлетворяют соотношению

$$E_n^m(\Theta+\xi; a_1^2 - \xi;\ a_2^2 - \xi, a_3^2 - \xi) = E_n^m(\Theta; a_1^2, a_2^2, a_3^2).$$

Равенство (14) накладывает требуемое условие на μ .

Таким образом, если μ удовлетворяет (14), то эллипсоидальная гармоническая функция

$$v(z_1, z_2, z_3) = G_n^m(z_1, z_2, z_3; -\mu^2 a_1^2, a_2^2, a_3^2) \tag{15}$$

обращается в нуль на гиперболоиде (12), так как какой-нибудь из множителей в произведении (13) совпадает с левой частью (12). Кроме того, поскольку $v(z_1, z_2, z_3)$ – гармоническая функция, то она удовлетворяет уравнению (11). Из этого следует, что функция

$$u(x_1, x_2, x_3) = G_n^m(i\mu x_1, x_2, x_3; -\mu^2 a_1^2, a_2^2, a_3^2) \tag{16}$$

удовлетворяет (10) и обращается в нуль на эллипсоиде (9), т.е. является собственной функцией нашей задачи, соответствующей собственному значению

$$\lambda = \frac{1+2\mu^2}{1+\mu^2}. \tag{17}$$

Итак, получили следующий результат:

Теорема 2. Если μ - корень уравнения (14), то функция (16) - собственная функция оператора S_2, соответствующая собственному значению (17).

Так как все собственные значения оператора S_2 находятся в интервале (1,2), то μ^2 должно быть положительно. Получаем

Следствие. При любых вещественных a_1, a_2, a_3 корни уравнения (по ν)

$$E_n^m(0;\nu a_1^2, a_2^2, a_3^2)=0$$

отрицательны.

Остается открытым вопрос, получаем ли мы таким образом все собственные функции.

Литература

1. Ю.М.Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд. "Наукова думка", Киев, 1965.
2. Р.Т.Денчев. ДАН СССР, 126, №2 (1959).
3. Р.А.Александрян. Труды Моск. мат. общества, 9, 455 (1960).
4. Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс современного анализа, т. II, Физматгиз, Москва, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1969 года.