Д-339

20/I-70

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-4837

Р.Т. Денчев

ОБ ОСТАТОЧНОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р5-4837

Р.Т. Денчев

ОБ ОСТАТОЧНОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Направлено в журнал "Известия на математическия институт на БАН"

Рассмотрим область Ω, показанную на рис. 1 (см. /1/, стр.296). Она обладает следующим свойством: в каждой точке $x=(x_1, x_2)$ границы $\partial\Omega$ единичная внешняя нормаль $\nu(x)=(\nu_1(x), \nu_2(x))$ удовлетворяет соотношениям

$$|\nu_1(x)| \leqq |\nu_2(x)|, \quad x_1 \nu_1(x) \geqq 0.$$

Введем некоторые обозначения. Через $\overset{\circ}{W}{}_2^r(\Omega)$ обозначим x/ пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^r(\Omega)$ с метрикой $W_2^r(\Omega)$. Пусть

$$\mathcal{A} = 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad \mathcal{B} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Определим операторы:

$$A_2 : \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \ni u \to \mathcal{A} u \in L_2(\Omega),$$

$$B_2 : \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \ni u \to \mathcal{B} u \in L_2(\Omega).$$

---

x/ $W_2^r(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^r(\Omega)$ – пространства Соболева (см. /1/ стр. 29 и 34). Они Гильбертовы и скалярное произведение в $W_2^r(\Omega)$ определено следующим образом:

$$(u,v)_r = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,dx + \sum_{|\alpha|=r} \int_\Omega (D^\alpha u)(x)\overline{(D^\alpha u)(x)}\,dx, \quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n.$$

Через $(.,.)$ обозначим скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

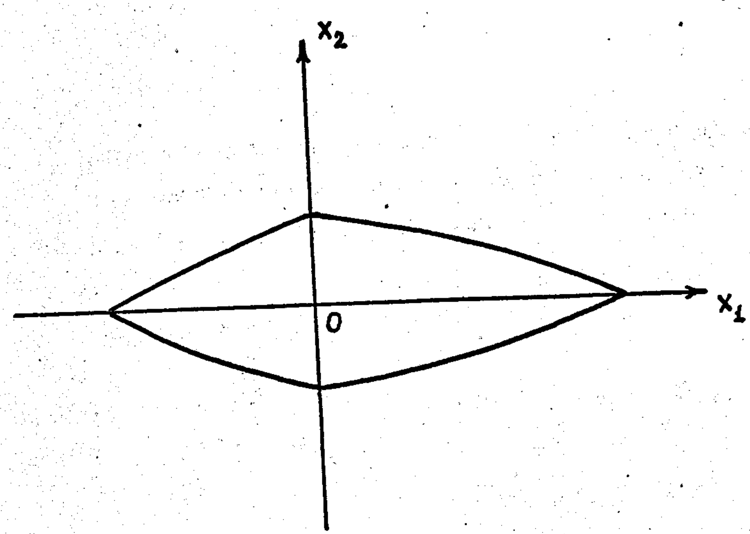

Рис. 1.

Как известно (см., например /1/, стр. 176), операторы A_2 и B_2 являются гомеоморфизмами между пространствами $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Следовательно, оператор

$$S_2 = B_2^{-1} A_2$$

отображает гомеоморфно $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ на себя. Цель настоящей работы – доказать наличие остаточного спектра у S_2. Обозначим через S_0 замыкание S_2 по метрике $L_2(\Omega)$. Можно показать, что S_0 является гомеоморфизмом $L_2(\Omega)$ на себя. Сформулируем некоторые вспомогательные предложения.

<u>Лемма 1. Имеет место равенство</u>

$$S_0^* = A_2 B_2^{-1}.$$

<u>Доказательство</u>. Обозначим через $G(x;y)$ функцию Грина для оператора B_2. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $B_2^{-1} f \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и имеем

$$(A_2 B_2^{-1} f, u) = \int_\Omega (A_2 B_2^{-1} f)\,\bar{u}\,dx = \int_\Omega (B_2^{-1} f)\,\overline{A_2 u}\,dx =$$

$$= \int_\Omega \overline{A_2 u}\,dx \int_\Omega G(x;y) f(y)\,dy = \int_\Omega f(y)\,dy \int_\Omega G(x;y)\,\overline{(A_2 u)(x)}\,dx = \tag{1}$$

$$= \int_\Omega f(y)\,dy \int_\Omega G(y;x)(A_2 u)(x)\,dx = \int_\Omega f(y)\,\overline{(B_2^{-1} A_2 u)(y)}\,dy =$$

$$= (f, B_2^{-1} A_2 u) = (f, S_0 u).$$

Так как $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и S_0 непрерывен в $L_2(\Omega)$, то из (1) следует лемма 1.

Лемма 2. Существует окрестность точки 3/2, принадлежащая спектру оператора S_2, но не содержащая собственных значений S_2.

Это утвеждение следует непосредственно из работ /1/ (стр. 289, 295) и /2/.

Лемма 3. Задача

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad u / \partial\Omega = 0 \tag{2}$$

имеет ненулевое слабое решение из $L_2(\Omega)$, т.е. существует функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что для каждого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ выполнено

$$(u, \Box v) = 0. \tag{3}$$

При этом при достаточно малых изменениях x/ области Ω это свойство сохраняется.

Доказательство этой леммы содержится в /1/ (стр. 302).

Теорема 1. Существует окрестность точки 3/2, каждая точка которой является собственным значением оператора S_0.

Доказательство. Покажем, что если u – слабое решение задачи (2), то оно является собственной функцией оператора S_0, соответствующей собственному значению 3/2. Действительно, равенство (3) можно записать в виде

$$(u, (A_2 - \frac{3}{2} B_2) v) = 0. \tag{4}$$

x/ Область Ω' называем близкой к Ω, если ее граница $\partial\Omega'$ близка к $\partial\Omega$ в смысле равномерной близости функций, задающих поверхность вместе с первыми их производными.

Обозначим

$$B_2 v = g . \tag{5}$$

Тогда $g \in L_2(\Omega)$ и

$$v = B_2^{-1} g . \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), получаем

$$(u, A_2 B_2^{-1} g - \frac{3}{2} g) = 0. \tag{7}$$

Из (7) и леммы 1 следует

$$(S_0 u - \frac{3}{2} u, g) = 0. \tag{8}$$

Соотношение (8) справедливо для любого $g \in L_2(\Omega)$, так как (4) справедливо для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и (5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Значит, из (8) следует

$$S_0 u - \frac{3}{2} u = 0,$$

т.е. u – собственная функция оператора S_0 с собственным значением 3/2. Так как, согласно лемме 3, существование слабых решений задачи (2) сохраняется при достаточно малых изменениях области Ω, то можно построить собственные функции оператора S_0 с собственными значениями, заполняющими некоторую окрестность точки 3/2. Теорема доказана.

Лемма 4. Существуют A^{*-1}_2, B^{*-1}_2 и имеют место равенства

$$A^{*-1}_2 = S^{-1}_0 (B_2 + B^{-1}_2), \quad B^{*-1}_2 = B_2 + B^{-1}_2 . \tag{9}$$

Доказательство. Так как A_2 и B_2 отображают гомеоморфно $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$, то A^*_2 и B^*_2 существуют и отображают гомеоморфно $L_2(\Omega)$ на $\overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$. Значит, существуют A^{*-1}_2 и B^{*-1}_2. Пусть $v \in \overset{\circ}{W}{}^4_2(\Omega)$. Тогда $B_2 v \in \overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$ и $B^{-1}_2 v \in \overset{\circ}{W}{}^6_2(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$ (см. /1/, стр. 170). Следовательно,

$$f = S^{-1}_0 (B_2 + B^{-1}_2) v = S^{-1}_2 (B_2 + B^{-1}_2) v = A^{-1}_2 B_2 (B_2 + B^{-1}_2) v \in \overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega). \tag{10}$$

Отсюда получаем

$$A_2 f = v + B^2_2 v . \tag{11}$$

Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega)$. Из (11) получаем

$$\int_\Omega (A_2 f)\,\bar{u}\,dx = \int_\Omega (v + B^2_2 v)\,\bar{u}\,dx . \tag{12}$$

После интегрирования по частям из (12) получаем

$$(f, A_2 u) = \int_\Omega v\bar{u}\,dx + \int_\Omega \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \Big) dx = (v, u)_2 . \tag{13}$$

Подставляя сюда f из (10), получаем

$$(S^{-1}_0 (B_2 + B^{-1}_2) v, A_2 u) = (v, u)_2 . \tag{14}$$

Последнее соотношение мы доказали только для $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Но так как $\overset{\circ}{W}{}_2^4(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ плотны в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и операторы A_2 и $S_0^{-1}(B_2+B_2^{-1})$ непрерывно отображают $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$, то (13) справедливо при любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Для любого $g \in L_2(\Omega)$ можем определить $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ так, чтобы $A_2 u = g$. Тогда из (14) получаем

$$(S_0^{-1}(B_2+B_2^{-1})\, v, g) = (v, A_2^{-1} g)_2 . \tag{15}$$

Из (15) следует первое соотношение (9). Аналогично можно доказать и второе равенство (9). Лемма 4 доказана.

Докажем основную теорему настоящей работы.

Теорема 2. Существует окрестность точки 3/2, содержащаяся в остаточном спектре оператора S_2.

Доказательство. Пусть ω – пересечение окрестностей, определенных в лемме 2 и теореме 1. Покажем, что каждая точка ω является точкой остаточного спектра оператора S_2. Пусть $\lambda \in \omega$. По теореме 1 λ – собственное значение S_0 и пусть g – соответствующая собственная функция. Имеем

$$S_0 g - \lambda g = 0. \tag{16}$$

Определим функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ из уравнения

$$B_2 u + B_2^{-1} u = g. \tag{17}$$

Это можно сделать следующим образом: определяем функцию $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$B_2 w + i w = g;\tag{18}$$

дальше определяем $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$B_2 v - i v = w;\tag{19}$$

тогда $u = B_2 v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет (17); действительно, так как $w / \partial\Omega = 0$, то, согласно (19),

$$(B_2 v - i v) / \partial\Omega = 0;\tag{20}$$

из (20) и $v / \partial\Omega = 0$ следует $u / \partial\Omega = (B_2 v) / \partial\Omega = 0$; из (18) и (19) следует (17).

Из (16) и (17) следует

$$B_2 u + B_2^{-1} u - \lambda S_0^{-1} (B_2 u + B_2^{-1} u) = 0.\tag{21}$$

Сравнивая (21) и (9), получаем

$$B_2^{*\,-1} u - \lambda A_2^{*\,-1} u = 0.$$

Отсюда

$$S_2^* u - \lambda u = 0,\tag{22}$$

т.е. λ – собственное значение оператора S_2^*. С другой стороны, так как $\lambda \in \omega$, то, согласно лемме 2, λ не является собственным значением оператора S_2. Это показывает (см. /3/, стр. 621), что λ – точка остаточного спектра S_2. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Ю.М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд. "Наукова думка", Киев 1965.
2. R. Denchev. Preprint JINR, Dubna, E5-3615 (1967).
3. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц. Линейные операторы, т. 1, Изд. ин. лит. , Москва 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1969 года.