10/II-70

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 4836

Р.Т. Денчев

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р5 - 4836

Р.Т. Денчев

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

8176/2 нр

Направлено в журнал "Известия на математический институт на БАН"

Пусть Ω –параллелепипед с ребрами a_1, a_2, a_3, параллельными координатным осям. Границу параллелепипеда обозначим через $\partial\Omega$. Рассматриваем задачу

$$\Box U = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x_1, x_2, x_3) \in L_2(\Omega), \; u/_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1)$$

Решением задачи (1) будем называть функцию $u \in W_2^1(\Omega)$ x/, обращающуюся в нуль на $\partial\Omega$ и удовлетворяющую соотношению

$$\int_\Omega u \Box\phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx$$

для любой $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ xx/.

В /2/ доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(\Omega)$

$$f = \sum_{jk\ell} f_{jk\ell} \sin \frac{j\pi}{a_1} x_1 \sin \frac{k\pi}{a_2} x_2 \sin \frac{\ell\pi}{a_3} x_3 ,$$

где ряд справа сходится в L_2.

---

x/ $W_2^{r}(\Omega)$ – пространство Соболева (см. /1/).

xx/ $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне некоторых компактных множеств, содержащихся в Ω (для каждой функции свое множество).

Если ряд

$$\sum \frac{\dfrac{j^2}{a_1^2}+\dfrac{k^2}{a_2^2}+\dfrac{\ell^2}{a_3^2}}{\left(\dfrac{j^2}{a_1^2}-\dfrac{k^2}{a_2^2}-\dfrac{\ell^2}{a_3^2}\right)^2} f_{jk\ell}^2 \qquad (2)$$

сходится, то задача (1) имеет решение, представляющееся рядом

$$\sum \frac{f_{jk\ell}}{\pi^2\left(-\dfrac{j^2}{a_1^2}+\dfrac{k^2}{a_2^2}+\dfrac{\ell^2}{a_3^2}\right)} \sin\frac{j\pi}{a_1}x_1 \sin\frac{k\pi}{a_2}x_2 \sin\frac{\ell\pi}{a_3}x_3 .$$

Ряд этот сходится в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Сходимость ряда (2) зависит, очевидно, от "быстроты убывания" знаменателей $\dfrac{j^2}{a_1^2}-\dfrac{k^2}{a_2^2}-\dfrac{\ell^2}{a_3^2}$ и коэффициентов $f_{jk\ell}$.

Относительно убывания знаменателей сделаем предположение, что существует константа C и целое число p такие, что для всех достаточно больших целых j, k, ℓ

$$\left|\frac{j^2}{a_1^2}-\frac{k^2}{a_2^2}-\frac{\ell^2}{a_3^2}\right| > \frac{C}{M^p},$$

где $M=\max(j,k,\ell)$. Продолжим функцию $f(x_1,x_2,x_3)$ вне параллелепипеда Ω , требуя, чтобы она была нечетной и периодической по каждому из переменных с периодами соответственно $2a_1, 2a_2, 2a_3$. В дальнейшем, говоря о функции $f(x_1,x_2,x_3)$, будем иметь в виду именно эту продолженную функцию.

Предположим, что продолженная функция $f(x_1,x_2,x_3)$ дифференцируема $p+2$ раза и $p+2$ – и е производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha, \frac{1}{2}<\alpha\leq 1$. Тогда задача (1) разрешима, так как ряд (2) сходится. Действительно,

$$f_{jk\ell}=O\left(\frac{1}{M^{p+2+\alpha}}\right)$$

и члены ряда имеют порядок $O\left(\frac{1}{M^{2+2\alpha}}\right)$. Число членов ряда с заданным M имеет порядок M^2. Таким образом, имеем

$$\sum_{jk\ell} \frac{\frac{j^2}{a_1^2}+\frac{k^2}{a_2^2}+\frac{\ell^2}{a_3^2}}{\frac{j^2}{a_1^2}-\frac{k^2}{a_2^2}-\frac{\ell^2}{a_3^2}} f_{jk\ell}^2 = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{\substack{jk\ell \\ \max(j,k,\ell)=M}} O\left(\frac{1}{M^{2+2\alpha}}\right) = \sum_{M=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{M^{2\alpha}}\right) < \infty .$$

Последний ряд сходится, так как $2\alpha > 1$.

Требования на гладкость $f(x_1, x_2, x_3)$ могут быть ослаблены. Для этой цели нам понадобятся некоторые оценки, по существу, арифметического характера.

Докажем сначала следующую лемму, обобщающую одну теорему Харди и Литлвуда /3/.

<u>Лемма 1. Пусть Θ_1 и Θ_2 – вещественные числа и для некоторого $h \geq 2$</u>

$$N_{n_1 n_2}^{h} \{ \Theta_1 n_1 + \Theta_2 n_2 \} > \gamma > 0 \tag{3}$$

<u>при всех достаточно больших целых n_1 и n_2</u>. <u>Здесь</u> $N_{n_1 n_2} = \max(n_1, n_2)$, $\{a\}$ <u>означает расстояние числа</u> a <u>до ближайшего целого числа. Тогда</u>

$$U_m = \sum_{n_1, n_2 = 1}^{m} u_{n_1, n_2} = \sum_{n_1, n_2 = 1}^{m} \frac{1}{N_{n_1, n_2}^{h} \{ \Theta_1 n_1 + \Theta_2 n_2 \}} = O(\log^2 m). \tag{4}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $h_{n_1 n_2}$ – числа, определяемые равенствами

$$N_{n_1 n_2}^{h_{n_1 n_2}} \{ \Theta_1 n_1 + \Theta_2 n_2 \} = \gamma . \tag{5}$$

Тогда в силу (3)

$$h_{n_1 n_2} < h . \tag{6}$$

Рассмотрим сумму

$$T_m = \sum_{n_1, n_2 = m}^{2m} \frac{1}{N_{n_1, n_2}^{h} \{ n_1 \Theta_1 + n_2 \Theta_2 \}} = \frac{1}{\gamma} \sum_{n_1, n_2 = m}^{2m} \frac{1}{N_{n_1 n_2}^{h - h_{n_1 n_2}}} .$$

Сумма членов в T_m, для которых $h_{n_1 n_2} < h - 2$, есть

$$0 \Big(\sum_{n_1, n_2 = m}^{2m} \frac{1}{N_{n_1 n_2}^{2}} \Big) = 0\Big(\frac{1}{m^2} m^2 \Big) = 0(1).$$

Разобьем остальные члены T_m на классы следующим образом. Вводим числа

$$h_r = h - 2 + \frac{r}{\eta}, \quad r = 0, 1, \dots, 2\eta - 1, \tag{7}$$

η -произвольное целое число. Будем говорить, что некоторый член $U_{n_1 n_2}$ из T_m принадлежит классу r, если

$$h_r \leqq h_{n_1 n_2} < h_{r+1} . \tag{8}$$

Подсчитаем, сколько членов класса r имеется в T_m. Если $U_{n_1 n_2}$ принадлежит классу r, то из (5) и (8) получаем:

$$\{ \Theta_1 n_1 + \Theta_2 n_2 \} \leqq \gamma N_{n_1 n_2}^{-h_r} . \tag{9}$$

Если s_1 и s_2 такие, что

$$0 < N_{s_1 s_2} < \frac{1}{2} N_{n_1 n_2}^{\frac{h_r}{h}} , \tag{10}$$

то из (5) и (6) получаем

$$\{\Theta_1 s_1 + \Theta_2 s_2\} = \gamma N_{s_1 s_2}^{-h_{s_1 s_2}} > \gamma N_{s_1 s_2}^{-h} > 2\gamma N_{n_1 n_2}^{-h_r} . \tag{11}$$

Из (9) и (11) следует

$$\{(n_1+s_1)\Theta_1 + (n_2+s_2)\Theta_2\} > \gamma N_{n_1 n_2}^{-h_r} \geqq \gamma N_{n_1+s_1, n_2+s_2}^{-h_r} .$$

Но в силу (5)

$$\{(n_1+s_1)\Theta_1 + (n_2+s_2)\Theta_2\} = \gamma N_{n_1+s_1, n_2+s_2}^{-h_{n_1+s_1, n_2+s_2}} ,$$

так что

$$h_{n_1+s_1, n_2+s_2} < h_r ,$$

и член $u_{n_1+s_1, n_2+s_2}$ не относится к классу r. Число всех таких членов – это число пар (s_1, s_2), удовлетворяющих (10). Его порядок

$$\left(\frac{1}{2} N_{n_1, n_2}^{\frac{h_r}{h}}\right)^2 > \frac{1}{4} m^{\frac{2h_r}{h}} .$$

Значит вместе с каждым членом T_m, принадлежащим к классу r, имеется больше, чем $\frac{1}{4} m^{\frac{2h_r}{h}}$ членов, не принадлежащих r. Всего в T_m имеется m^2 членов, так что число членов класса r не превышает

$$\frac{m^2}{\frac{1}{4} m^{\frac{2h_r}{h}}} = O\left(m^{2\left(1-\frac{h_r}{h}\right)}\right).$$

Для величины каждого из этих членов в силу (8) имеем

$$\frac{1}{N_{n_1 n_2}^{h-h_{n_1 n_2}}} \leqq \frac{1}{N_{n'_1 n_2}^{h-h_{r+1}}},$$

так что сумма всех членов класса r из T'_m имеет порядок

$$O(m^{2(1-\frac{h_r}{h})-(h-h_{r+1})}).$$

Но в силу (7)

$$2(1-\frac{h_r}{h})-(h-h_{r+1})=\frac{1}{\eta}-(2-\frac{r}{\eta})(1-\frac{2}{h})<\frac{1}{\eta}.$$

Всего классов 2η, так что

$$T_m=O(2\eta m^{\frac{1}{\eta}}).$$

Полагая $\eta=[\log m]$, имеем

$$T_m=O(2\log m\ m^{\frac{1}{\log m}})=O(\log m).$$

Пусть ν - целое положительное такое, что

$$a \leqq \frac{m}{2^\nu} \leqq 2d, \tag{12}$$

d - фиксированное натуральное число. Имеем:

$$\begin{aligned} U_m &\leqq \sum_{n_1, n_2=1}^{2d} u_{n_1, n_2} + T_{[\frac{m}{2^\nu}]} + T_{[\frac{m}{2^{\nu-1}}]} + \ldots + T_{[\frac{m}{2}]} = \\ &= O(1)+O(\log\frac{m}{2^\nu}+\cdots+\log\frac{m}{2}) = \\ &= O(1)+O[\nu\log m-(\nu+\nu-1+\ldots+1)\log 2] = \\ &= O(1)+O[\nu\log m-\frac{\nu(\nu+1)}{2}\log 2]. \end{aligned} \tag{13}$$

Но из (12) следует

$$\log d \leqq \log m - \nu \log 2 \leqq \log 2d$$

$$\frac{\log m - \log 2d}{\log 2} \leqq \nu \leqq \frac{\log m - \log d}{\log 2}$$

и, значит, $\nu = O(\log m)$. Подставляя в (13), получаем (4). Лемма доказана.

Пусть q – верхняя грань всех чисел ω, для которых

$$\lim_{N_{n_1 n_2} \to \infty} N^{\omega}_{n_1 n_2} \{ n_1 \Theta_1 + n_2 \Theta_2 \} = 0. \tag{14}$$

Будем говорить в этом случае, что (Θ_1, Θ_2) имеет тип q.

<u>Лемма 2. Если (Θ_1, Θ_2) имеет тип $q \geqq 2$, то ряд</u>

$$\sum_{n_1, n_2 = 1}^{\infty} \frac{1}{N^{q+\epsilon}_{n_1 n_2} \{ n_1 \Theta_1 + n_2 \Theta_2 \}} \tag{15}$$

<u>сходится при любом $\epsilon > 0$</u>.

<u>Доказательство.</u> Введем обозначения

$$s_{n_1, n_2} = \sum_{j,k=1}^{n_1, n_2} \frac{1}{N^{\lambda + \frac{\epsilon}{2}}_{jk} \{ j \Theta_1 + k \Theta_2 \}},$$

$$a_{n_1, n_2} = \frac{1}{N^{\epsilon/2}_{n_1 n_2}}.$$

Тогда ряд (15) можно записать в виде

$$\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} a_{n_1 n_2}(s_{n_1 n_2} - s_{n_1-1,n_2} - s_{n_1,n_2-1} + s_{n_1-1,n_2-1}) =$$

$$= \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} s_{n_1 n_2}(a_{n_1 n_2} - a_{n_1+1,n_2} - a_{n_1,n_2+1} + a_{n_1+1,n_2+2}). \tag{16}$$

Здесь $s_{n_1 n_2}$ считаем нулем, если один из индексов нуль. Если $n_1 \neq n_2$, скажем, $n_1 > n_2$, то

$$a_{n_1 n_2} - a_{n_1+1,n_2} - a_{n_1,n_2+1} + a_{n_1+1,n_2+1} = \frac{1}{n_1^{\epsilon/2}} - \frac{1}{(n_1+1)^{\epsilon/2}} - \frac{1}{n_2^{\epsilon/2}} - \frac{1}{(n_2+1)^{\epsilon/2}} = 0,$$

так что в (16) остаются только члены с $n_1 = n_2$, т.е. ряд (16) превращается в простой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_{nn}(a_{nn} - a_{n+1,n} - a_{n,n+1} + a_{n+1,n+1}). \tag{17}$$

Здесь

$$a_{n,n} - a_{n+1,n} + a_{n+1,n+1} - a_{n,n+1} = \frac{1}{n^{\epsilon/2}} - \frac{1}{(n+1)^{\epsilon/2}} = O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon/2}}\right). \tag{18}$$

С другой стороны, из (14) следует, что существует константа γ такая, что

$$N^{q+\epsilon/2}\{n_1\Theta_1 + n_2\Theta_2\} > \gamma$$

при всех достаточно больших целых n_1, n_2. Тогда из доказанной леммы вытекает

$$s_{nn} = O(\log^2 n). \tag{19}$$

Из (18) и (19) видно, что ряд (17) сходится, а, значит, сходится и ряд (15).

Теперь мы уже в состоянии ослабить требование на гладкость функции $f(x_1, x_2, x_3)$ для разрешимости задачи Дирихле для волнового уравнения. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\left(\frac{a_1^2}{a_2^2}, \frac{a_1^2}{a_3^2}\right)$ типа $q \geqq 2$. Если $f(x_1, x_2, x_3)$ есть $2q+1$ раз дифференцируемая функция и $f^{(2q+1)}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем ϵ, то задача (1) имеет решение.

Доказательство. Мы покажем, что ряд

$$\sum_{j,k,\ell} \frac{\frac{j^2}{a_1^2} + \frac{k^2}{a_2^2} + \frac{\ell^2}{a_3^2}}{\left(\frac{j^2}{a_1^2} - \frac{k^2}{a_2^2} - \frac{\ell^2}{a_3^2}\right)^2} f_{jk\ell},$$

где $f_{jk\ell}$ – коэффициенты Фурье f, сходится.

Действительно, пусть

$$M = \max(j, k, \ell).$$

Тогда

$$f_{jk\ell} = O\left(\frac{1}{M^{2q+1+\epsilon}}\right),$$

$$\frac{\frac{j^2}{a_1^2} + \frac{k^2}{a_2^2} + \frac{\ell^2}{a_3^2}}{\left(\frac{j^2}{a_1^2} - \frac{k^2}{a_2^2} - \frac{\ell^2}{a_3^2}\right)^2} f^2_{jk\ell} = O\left(\frac{1}{M^{4q+2\epsilon}\left(\frac{j^2}{a_1^2} - \frac{k^2}{a_2^2} - \frac{\ell^2}{a_3^2}\right)^2}\right).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{jk\ell} \frac{1}{M^{4q+2\epsilon}\left(j^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2}k^2 - \frac{a_1^2}{a_3^2}\ell^2\right)^2}. \tag{20}$$

Пусть $j_{k\ell}$ обозначает то значение j, для которого $\left| j^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2} k^2 - \frac{a_1^2}{a_3^2} \ell^2 \right|$ имеет минимум при фиксированных k, ℓ и пусть

$$M_1 = \max(k \ \ell).$$

Тогда ряд (20) можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{k,\ell} \frac{1}{M^{4q+2\epsilon} \left(j_{k,\ell}^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2} k^2 - \frac{a_1^2}{a_3^2} \ell^2\right)^2} + \sum_{k,\ell} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_{k\ell}}}^{\infty} \frac{1}{M^{4q+2\epsilon} \left(j^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2} k^2 - \frac{a_1^2}{a_3^2} \ell^2\right)^2} \tag{21}$$

$$\leq \sum_{k,\ell} \frac{1}{M_1^{4q+2\epsilon} \left\{ \frac{a_1^2}{a_2^2} k^2 + \frac{a_1^2}{a_3^2} \ell^2 \right\}^2} + \sum_{k,\ell} \frac{1}{M_1^{4q+2\epsilon}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_{k,\ell}}}^{\infty} \frac{1}{\left(j^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2} k^2 - \frac{a_1^2}{a_3^2} \ell^2\right)^2}$$

Оба последних ряда сходятся. Первый потому, что это только часть сходящегося ряда

$$\sum_{n_1, n_2} \frac{1}{N_{n_1 n_2}^{2q+\epsilon} \left\{ \frac{a_1^2}{a_2^2} n_1 + \frac{a_1^2}{a_3^2} n_2 \right\}^2}, \quad (N_{n_1, n_2} = \max(n_1, n_2)).$$

Этот ряд сходится, так как его члены являются квадратами членов сходящегося на основании доказанного выше ряда. Второй ряд в (21) сходится потому, что

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_{k\ell}}}^{\infty} \frac{1}{\left(j^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2} k^2 - \frac{a_1^2}{a_3^2} \ell^2\right)^2} < C,$$

где C не зависит от k и ℓ. Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. ЛГУ, Ленинград, 1950.

2. Р. Денчев. ДАН СССР (1959), 127, 3, 501-504.

3. G.Hardy, J.Littlewood. Abhandl. Math. Sem. Hamburg Univ. 1, 212 (1922).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1969 года.