СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р4 - 5332

Б.Н. Захарьев, В.П. Пермяков, Ю.И. Фенин

ОДНОСТОРОННИЕ ГРАНИЦЫ
ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ РАССЕЯНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P4 - 5332

Б.Н. Захарьев, В.П. Пермяков, Ю.И. Фенин

ОДНОСТОРОННИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ РАССЕЯНИЯ

В в е д е н и е

Хорошо известно, что вариационный метод в задачах на собственные значения дает приближенные величины для уровней энергии, лежащие строго с одной стороны (сверху) от точных. Это связано с возможностью свести в данном случае решение уравнения Шредингера к задаче на минимум функционала, имеющего смысл искомой энергии. В задачах непрерывного спектра ситуация резко меняется: вариационные принципы носят лишь характер условия стационарности функционала, дающего значение амплитуды рассеяния /1,2/. Точному значению амплитуды соответствует не экстремум, а лишь "точка перегиба" функционала. Причина такого различия заключается в том, что соответствующий функционал в первом случае обладает знакоопределенностью в пространстве пробных функций, а во втором - нет. В свою очередь, это свойство знакоопределенности связано со следующим обстоятельством: лежат ли значения энергии E для всех возможных состояний системы только с одной стороны от энергии E_0, при которой мы ищем решение (и тогда при переборе пространства пробных функций знак функционала не меняется), или по обе стороны от E_0.

Знакоопределенность во втором случае может быть все же достигнута, если добавить условия ортогональности пространства пробных функций всем состояниям, лежащим с одной стороны от искомого. Этим условиям можно удовлетворить, когда число таких состояний конечно, как это имеет место в задаче на связанные состояния и в предельном случае задачи рассеяния - определении длины рассеяния, когда ниже состояния с $k=0$ располагается лишь дискретный спектр, если он существует.

Именно поэтому односторонние оценки в задаче рассеяния сначала были получены для $k=0$ /3/. В случае же $k>0$ ситуация существенно усложняется тем, что ниже состояния $k>0$ располагается бесконечное число состояний - часть непрерывного спектра. В решение этой задачи внесли важный вклад Spruch с сотрудниками /4/. Они доказали теорему об односторонних оценках на K-матрицу для рассеяния без перераспределения частиц. В данной работе аналогичная теорема доказывается для реакций с изменением состава частиц.

Постановка задачи

Для простоты изложения ограничимся примером системы трех тел. При меньшем числе частиц реакции с перераспределением просто невозможны, а добавление к системе четвертой, пятой и т.д. частиц не вносит ничего принципиально нового в данную проблему.

Рассмотрим случай, когда взаимодействия между частицами и энергия системы таковы, что открыты лишь два канала, отличающиеся составом фрагментов (группировкой частиц): 1+(23) и 2+(13). Для процессов более общего типа односторонние оценки на K-матрицу проводятся аналогично.

Асимптотические условия на волновую функцию системы будем задавать в виде стоячих волн, - например, в i-ом открытом канале (с группировкой частиц α:

$$\Psi \approx \frac{1}{r(\alpha)}\left[a_i^{(\alpha)} \sin\left(k_i^{(\alpha)} r^{(\alpha)} - \frac{\ell\pi}{2}\right) + b_i^{(\alpha)} \cos\left(k_i^{(\alpha)} r^{(\alpha)} - \frac{\ell\pi}{2}\right)\right] Y_{\ell m}(\Omega_{r(\alpha)})\Phi_i^{(\alpha)} . \quad (1)$$

Здесь $r^{(\alpha)}$ и $k_i^{(\alpha)}$ - координаты и волновое число относительного движения фрагментов, а $\Phi_i^{(\alpha)}$ - функция их внутреннего состояния.

K -матрица связывает известные коэффициенты a_i, задаваемые произвольно (с одним условием $\Sigma a_i^2 = 1$) с амплитудами b_i, которые определяются из решения уравнения Шредингера:

$$b_j = K_{ji} a_i . \quad (2)$$

Для описания реакций в рамках теории сильной связи каналов воспользуемся формализмом, развитым в работе /5/: выделяем в Ψ в явном виде асимптотику канала с одним составом частиц "α" $\Psi^{(\alpha)} = (M+Nb^{(\alpha)})\Phi^{(\alpha)}$, а остаток $X = \Psi - \Psi^{(\alpha)}_{асс}$, разлагаем по собственным функциям гамильтониана внутреннего движения фрагментов $\Phi_i^{(\beta)}$ с другим составом частиц $\beta \neq \alpha$:

$$\Psi = (M + Nb^{(\alpha)})\Phi^{(\alpha)} + \sum_i F_i^{(\beta)}(r^{(\beta)})\Phi_i^{(\beta)} . \quad (3)$$

Здесь, согласно условиям задачи, все члены под знаком суммы, кроме первого, соответствуют закрытым каналам.

Наша цель - выяснить, как влияет учет этих закрытых каналов на K -матрицу. Ниже будет показано, что обрыв разложения в (3) приводит к одностороннему сдвигу некоторых комбинаций элементов K -матрицы.

Чтобы наши рассуждения не были слишком громоздкими, проведем доказательство соответствующей теоремы для случая, когда под знаком суммы в (3) имеется лишь два члена (один открытый и один закрытый каналы); т.е. выясним влияние одного закрытого канала. Доказательство в общем случае проводится аналогично. Имея в виду получить уравнения для $b^{(\alpha)}$; $F_1^{(\beta)}(r^{(\beta)})$; $F_2^{(\beta)}(r^{(\beta)})$, подставляем (3) в уравнение Шредингера; сначала умножаем полученное уравнение слева на $N\Phi^{(\alpha)}$ и интегрируем по всем переменным : $(N\Phi^{(\alpha)}, \ldots\ldots)$. Два другие уравнения получаются умножением уравнения Шредингера на $\Phi_1^{(\beta)}$ и $\Phi_2^{(\beta)}$ и интегрированием по тем переменным, от которых зависят $\Phi_1^{(\beta)}$ и $\Phi_2^{(\beta)}$, причем по $r^{(\beta)}$ интегрирование не производится: $(\Phi_1^{(\beta)}, \ldots)_\beta$. Таким образом, получаем алгебраическое уравнение для $b^{(\alpha)}$ и дифференциальные уравнения на $F_1^{(\beta)}$ и $F_2^{(\beta)}$:

$$(N\Phi^{(\alpha)}, (H-E)(F_1^{(\beta)}\Phi_1^{(\beta)} + F_2^{(\beta)}\Phi_2^{(\beta)} + M\Phi^{(\alpha)} + b^{(\alpha)} N\,\Phi^{(\alpha)})_\alpha = 0$$

$$[L_1 \equiv -\frac{1}{2M}\Delta_{r^{(\beta)}} - (E-\epsilon_1)]F_1^{(\beta)}(r^{(\beta)}) + V_{11}F_1^{(\beta)} + V_{12}F_2^{(\beta)} = J_1(r_1^{(\beta)}) \qquad (4)$$

$$[L_2 \equiv -\frac{1}{2M}\Delta_{r^{(\beta)}} - (E-\epsilon_2)]F_2^{(\beta)}(r^{(\beta)}) + V_{22}F_2^{(\beta)} + V_{21}F_1^{(\beta)} = J_2(r_1^{(\beta)}),$$

где

$$J_i = (\Phi_i^{(\alpha)}, (E-H)(M + b^{(\alpha)}N)\,\Phi^{(\alpha)})_\beta ;$$

$$V_{ij} = (\Phi_i^{(\beta)}, V^{(\beta)}\Phi_j^{(\beta)})_\beta ;$$

$V^{(\beta)}$ – взаимодействие между фрагментами в каналах "β". Специфика описания реакций с перераспределением частиц состоит в том, что в системе (4) появляется алгебраическое уравнение. Для задач без перераспределения /4/ имеются только дифференциальные уравнения.

Для исследования влияния обрыва в (4) третьего уравнения используем прием "непрерывного включения" закрытого канала, предложенный в /4/. С этой целью в системе уравнений (4) в коэффициенты, осуществляющие зацепление первых двух уравнений с третьим, вводится множитель $\lambda^{1/2}$. При $\lambda = 1$ имеем систему (4), при $\lambda = 0$ уравнения для b и F_1 отделяются от F_2. Меняя λ непрерывно от 1 до 0, мы делаем процедуру такого расцепления системы также непрерывной. Благодаря этому можно разбить процесс расцепления на бесконечное число этапов, на каждом из которых λ меняется на бесконечно малую величину $d\lambda$. Влияние же такого малого изменения оказывается значительно проще исследовать. Ниже будет показано, что <u>для каждого</u> λ при замене его на $\lambda + d\lambda$ величина $\bar{a}\cdot K\bar{a}$, где $\bar{a}$ вектор-

амплитуд a (см. (1)), будет меняться <u>все время в одну сторону</u>:
$[\frac{d}{d\lambda}(\bar{a}\cdot K_\lambda\,\bar{a}) > 0 \quad ; \qquad 0 \le \lambda \le 1\,]$. Таким образом можно сделать вывод, что и при замене значения $\lambda = 1$ на $\lambda = 0$ произойдет изменение $\bar{a}\cdot K\bar{a}$ в ту же сторону, так что величина $\bar{a}\cdot K_0\,\bar{a}$, получаемая при вычислении оборванной системы, служит нижней границей для $\bar{a}\cdot K_1\bar{a}$.

Доказательство теоремы об односторонней оценке на $\bar{a}\cdot K\bar{a}$

Перепишем систему (4) с множителями, зависящими от λ:

$$(N\Phi^{(\alpha)}, (H-E)(F_1^{(\beta)}(\lambda, r^{(\beta)})\Phi_1^{(\beta)} + \lambda^{1/2}F_2^{(\beta)}(\lambda, r^{(\beta)})\Phi_2^{(\beta)} + M\Phi^{(\alpha)} + b_\lambda^{(\alpha)} N\Phi^{(\alpha)}))_\alpha = 0$$

$$L_1F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) + V_{11}F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) + \lambda^{1/2}V_{12}F_{12}^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) = J_1(\bar{r}^{(\beta)}, \lambda) \qquad (5)$$

$$L_2F_2^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) + \lambda V_{22}F_2^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) + \lambda^{1/2}V_{21}F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) = \lambda^{1/2}(\Phi_2^{(\beta)}, (E-H)(M + b_\lambda^{(\alpha)}N)_\beta\,\Phi^{(\alpha)}.$$

Для доказательства теоремы удобно преобразовать систему (5) следующим образом: выразим $F_2^{(\beta)}$ формально из третьего уравнения через $b^{(\alpha)}$ и $F_1^{(\beta)}$:

$$F_2^{(\beta)} = \frac{\lambda^{1/2}}{L_2 + \lambda V_{22}}[(\Phi_2^{(\beta)}, (E-H)(M + b_\lambda^{(\beta)}N)\Phi^{(\alpha)})_\beta - V_{21}F_1^{(\beta)}] \qquad (6)$$

и подставим в первые два уравнения в (5):

$$
\begin{aligned}
&(N\Phi^{(\alpha)},(H-E)\{F_1^{(\beta)}\Phi_1^{(\beta)}+\Phi_2^{(\beta)}\frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}}[(\Phi_2^{(\beta)},(E-H)\cdot\\
&\cdot(M+b_\lambda^{(\alpha)}N)\Phi^{(\alpha)})_\beta-V_{21}F_1^{(\beta)}]+(M+b_\lambda^{(\alpha)}N)\Phi^{(\alpha)}\})_\alpha=0\\
&L_1F_1^{(\beta)}+V_{11}F_1^{(\beta)}+V_{12}\frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}}[-V_{21}F_1^{(\beta)}+\\
&+(\Phi_2^{(\beta)},(E-H)(M+b_\lambda^{(\alpha)}N)\Phi^{(\alpha)})_\beta]=J_1(\lambda)\ .
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Нас интересует величина $\frac{d}{d\lambda}(\bar{a}\cdot K_\lambda\bar{a})=\frac{d}{d\lambda}(\bar{a}\cdot\bar{b}_\lambda)$. Чтобы ее исследовать, рассмотрим ее связь с коэффициентами, осуществляющими зацепление уравнений в системе (7) (Приложение (П3)):

$$(\bar{a}\cdot\frac{d}{d\lambda}K_\lambda\bar{a})=\langle M^+\hat{C}M\rangle\ .$$

В написанном соотношении среднее от оператора в правой части по некоторым функциям ϕ можно, используя свойство сопряженности операторов M и M^+, свести к среднему от $\hat{C}$ по функциям $M\phi$. Тем самым, для знакоопределенности $\frac{d}{d\lambda}K_\lambda$ достаточно установить таковую для $\hat{C}$.

Положительность $\langle\hat{C}\rangle$ следует (см. (П6), (П7), (П8)) из того, что среднее от L_2 по функциям, ортогональным $\Phi_1^{(\beta)}$, положительно, и из дополнительного требования ортогональности $\Psi^{(\alpha)}_{\text{асс.}}$ к $\Phi_1^{(\beta)}$.

Заключение

Метод получения границ на параметры рассеяния, предложенный в /4/ и обобщенный в данной работе, не решает окончательно задачу строгих оценок на параметры рассеяния. Такие величины, как, например, фазовый сдвиг δ, определяются лишь с точностью до $n\pi$, и утверждение, что δ увеличивается, не является достаточно определенным, т.к. неизвестны критерии того, переходит ли при этом δ через значение, кратное π. Этот факт должен стимулировать продолжение исследований в данном направлении.

Нужно также отметить, что рассмотренный метод не дает границы для всех элементов K-матрицы, а лишь на независимые комбинации ее элементов $(\bar{a}\cdot K\bar{a})$, получаемые при различном выборе $\bar{a}$.

Проблему фиксирования неопределенности результатов в многоканальной теории рассеяния можно пытаться решить и другим путем /7/.

Доказанную теорему можно распространить на метод K-гармоник в задачах непрерывного спектра /6/. Причем при энергии, недостаточной для развала системы $(E<0)$, к одностороннему сдвигу будет приводить отбрасывание любого члена разложения Ψ по гиперсферическим функциям, т.к. соответствующий оператор L_2 будет положителен на любых функциях. Этот вопрос будет позднее /8/ рассмотрен более подробно.

Представляется заманчивым использовать рассмотренную в /4/ и в этой работе процедуру "непрерывного отцепления" каналов (введение параметра λ) для анализа физических свойств сложных многочастичных систем.

Авторы выражают благодарность В.П. Жигунову, дискуссии с которым в значительной степени стимулировали исследования в данном направлении, а также О. Лхагва, В.Л. Шмонину, С.А. Ниязгулову, В.А. Дуну за полезные обсуждения.

П р и л о ж е н и е

Заменим в первом уравнении в (7) первую функцию N на $(M+b^{(\beta)}_{\lambda+d\lambda}N)$, вычтем из него аналогичное уравнение, в котором только произведена замена $\lambda \to \lambda + d\lambda$. Сложим полученное уравнение с уравнением, построенным с помощью дифференциального уравнения в (7) следующим образом /4/: умножим второе уравнение в (7) на $F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, r^{(\beta)})$ и проинтегрируем по $d\bar{r}^{(\beta)}$; вычтем из него такое же уравнение, но с заменой $\lambda \to \lambda + d\lambda$:

$$\Big\{ \int\Big[-F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, r^{(\beta)}) \frac{\Delta_{\bar{r}^{(\beta)}}}{2M} F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) + F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) \frac{\Delta_{\bar{r}^{(\beta)}}}{2M} F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, r^{(\beta)})\Big] d\bar{r}^{(\beta)} +$$

$$+((M+b^{(\alpha)}_{\lambda+d\lambda}N)\Phi^{(\alpha)}, (H-E)(M+b^{(\alpha)}_{\lambda}N)\Phi^{(\alpha)})_\alpha -$$

$$-((M+b^{(\alpha)}_{\lambda}N)\Phi^{(\alpha)}, (H-E)(M+b^{(\alpha)}_{\lambda+d\lambda})\Phi^{(\alpha)})_\alpha +$$

$$+\int F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) \cdot J_1(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) d\bar{r}^{(\beta)} - \int F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) \cdot J_1(\lambda+d\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) d\bar{r}^{(\beta)} +$$

$$+((M+b^{(\alpha)}_{\lambda+d\lambda}N)\Phi^{(\alpha)}, (H-E)F_1^{(\beta)}(\lambda, r^{(\beta)})\Phi_1^{(\beta)})_\alpha -$$

$$-((M+b^{(\alpha)}_{\lambda}N)\Phi, (H-E)F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, r^{(\beta)})\Phi_1^{(\beta)})_\alpha \Big\} -$$

$$-\int F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) V_{12} \frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}} V_{21} F^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) d\bar{r}^{(\beta)} +$$

$$+\int F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) V_{12} \frac{\lambda+d\lambda}{L_2+(\lambda+d\lambda)V_{22}} V_{21} F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) d\bar{r}^{(\beta)} -$$

$$-((M+b^{(\alpha)}_{\lambda+d\lambda}N)\Phi^{(\alpha)}(H-E)\Phi_2^{(\beta)} \frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}} V_{21} F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}))_\alpha +$$

$$+((M+b^{(\alpha)}_{\lambda}N)\Phi^{(\alpha)}(H-E)\Phi_2^{(\beta)} \frac{\lambda+d\lambda}{L_2+(\lambda+d\lambda)V_{22}} V_{21} F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, \bar{r}^{(\beta)}))_\alpha -$$

$$-\int F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) V_{12} \frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}} (\Phi_2^{(\beta)}, (H-E)(M+b^{(\alpha)}_{\lambda}N)\Phi^{(\alpha)})_\beta d\bar{r}^{(\beta)} +$$

$$+\int F_1^{(\beta)}(\lambda, \bar{r}^{(\beta)}) V_{12} \frac{\lambda+d\lambda}{L_2+(\lambda+d\lambda)V_{22}} (\Phi_2^{(\beta)}, (H-E)(M+b^{(\alpha)}_{\lambda+d\lambda}N)\Phi^{(\alpha)})_\beta d\bar{r}^{(\beta)} -$$

$$-((M+b^{(\alpha)}_{\lambda+d\lambda}N)\Phi^{(\alpha)}, (H-E)\Phi_2^{(\beta)} \frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}} (\Phi_2^{(\beta)}, (H-E)(M+b^{(\alpha)}_{\lambda}N)\Phi^{(\alpha)})_\beta)_\alpha +$$

$$+((M+b^{(\alpha)}_{\lambda}N)\Phi^{(\alpha)}, (H-E)\Phi_2^{(\beta)} \frac{\lambda+d\lambda}{L_2+(\lambda+d\lambda)V_{22}} (\Phi_2^{(\beta)}, (H-E)(M+b^{(\alpha)}_{\lambda+d\lambda}N) \cdot \Phi^{(\alpha)})_\beta)_\alpha .$$

В выражении в фигурных скобках в (П.1) первый член дает $a^{(\beta)}\frac{d}{d\lambda}b_\lambda^{(\beta)}$ /4/, во втором и третьем вклад $a^{(\alpha)}\frac{d}{d\lambda}b_\lambda^{(\alpha)}$ дают (не сокращаются) лишь члены, содержащие оператор $\Lambda_{r(\alpha)}$, четвертый член сокращается с шестым, а пятый с седьмым. Таким образом, эта часть (П.1) дает $(\bar{a}\cdot\frac{d}{d\lambda}K_\lambda\bar{a})$. Оставшуюся часть (П.1) можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}\int d\bar{r}^{(\beta)} F_1^{(\beta)}(\lambda+d\lambda, r^{(\beta)}) \\ \int d\bar{r}^{(\alpha)}(M+b^{(\alpha)}_{\lambda+d\lambda}N)\end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} V_{12} & 0\\ 0 & \int d\bar{\rho}^{(\alpha)}\Phi^{(\alpha)}(H-E)\Phi_2^{(\beta)}\end{pmatrix}\times \quad (\text{П}.2)$$

$$\times\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}} & \frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}}\\ \frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}} & \frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}V_{21}&0\\0&\int d\bar{\rho}^{(\alpha)}\Phi_2^{(\beta)}(H-E)\Phi^{(\alpha)}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}F_1(\lambda, r^{(\beta)})\\ M+b_\lambda^{(\alpha)}N\end{pmatrix} - \left\{\begin{array}{c}\text{Аналогичное}\\ \text{выражение}\\ \text{с заменой}\\ \lambda\to\lambda+d\lambda\end{array}\right\}$$

Здесь интегрирование производится по координатам внутреннего движения в каналах "α". Часть (П.2), которая не выписана явно, можно преобразовать так, что она будет отличаться от остального выражения лишь заменой $\lambda\to\lambda+d\lambda$ только в средней матрице. Используя формулу

$$\frac{d}{d\lambda}\,\frac{\lambda}{L_2+\lambda V_{22}} = \frac{1}{L_2+\lambda V_{22}}\,L\,\frac{1}{L_2+\lambda V_{22}},$$

получим:

$$(\bar{a}\cdot\frac{d}{d\lambda}K_\lambda\bar{a}) = \langle M^+\hat{C}M\rangle, \quad (\text{П}.3)$$

где

$$\hat{C} = \begin{pmatrix}L_2 & L_2\\ L_2 & L_2\end{pmatrix} \quad (\text{П}.4)$$

$$M = \begin{pmatrix}\frac{\bar{1}}{L_2+\lambda V_{22}}V_{21} & 0\\ 0 & \frac{1}{L_2+\lambda V_{22}}\int d\bar{\rho}^{(\alpha)}\Phi^{(\beta)}(H-E)\Phi^{(\alpha)}\end{pmatrix} \quad (\text{П}.5)$$

а M^+ – оператор, сопряженный M.

То, что из положительной определенности L_2 следует то же и для $\hat{C}$, можно показать так:

$$\langle\hat{C}\rangle = \begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix}L_2 & L_2\\ L_2 & L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} = \langle\chi_1 L_2\chi_2\rangle + \quad (\text{П}.6)$$

$$+\langle\chi_1 L_2\chi_2\rangle + \langle\chi_2 L_2\chi_1\rangle + \langle\chi_2 L_2\chi_2\rangle.$$

Разлагая $\chi_{1(2)}$ по полному ортонормированному набору $\{\phi_n\}$ собственных функций оператора L_2: $(L_2\phi_n = \epsilon_n^{(2)}\phi_n;\ \epsilon_n^{(2)} > 0)$

$$\chi_1 = \sum_n a_n\phi_n;\quad \chi_2 = \sum_n b_n\phi_n, \quad (\text{П}.7)$$

получаем

$$\langle \hat{C} \rangle = \sum_n \epsilon_n^{(2)} a_n^2 + \sum_n \epsilon_n^{(2)} a_n b_n + \sum_n \epsilon_n^{(2)} b_n a_n + \sum_n \epsilon_n^{(2)} b_n^2 = \sum_n \epsilon_n^{(2)} (a_n + b_n)^2 > 0 . \qquad (\Pi.8)$$

Литература

1. Ю.Н. Демков. Вариационные принципы в теории столкновений. Физматгиз, Москва, 1958.
2. Т.Г. Ефименко, Б.Н. Захарьев, О. Лхагва. Препринт ОИЯИ, Р4-4923, Дубна, 1970.
3. L. Spruch, L. Rosenberg, T. O'Malley. Phys.Rev., 119, 164 (1960).
4. Y. Hahn, T.E. O'Malley, L. Spruch . Phys.Rev., 134, B397 (1964).
   L. Spruch
   Доклад на V международной конференции по электронным и атомным столкновениям. Ленинград, 1967.
5. Т.Г. Ефименко, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев. Ann. of Phys., 47,275,1968.
6. Б.Н. Захарьев, В.В. Пустовалов, В.Д. Эфрос. ЯФ, 8, 406 (1968).
7. Б.Н. Захарьев, В.Л. Шмонин. Сообщение ОИЯИ, Р4-5149, Дубна, 1970.
8. О. Лхагва. Сообщение ОИЯИ, Р4-5366, Дубна, 1970

Рукопись поступила в издательский отдел
19 августа 1970 года.