15/III 71

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 5569

М.К. Волков

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ СВОЙСТВА СУПЕРПРОПАГАТОРА

1971

Р2 - 5569

М.К. Волков

РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ СВОЙСТВА СУПЕРПРОПАГАТОРА

Направлено в "Commun. Math. Phys"

§1. Введение

В последние годы проблема построения конечной квантовой теории поля с неполиномиальным лагранжианом привлекает к себе внимание все большего числа физиков [1]. Помимо интенсивного изучения теорий с существенно нелинейными по полю лагранжианами, такими, как , например, киральные лагранжианы [2] или лагранжианы с экспоненциальной зависимостью от скалярного поля [3], некоторые авторы пытаются вводить существенно нелинейную зависимость от скалярного поля в обычные полиномиальные лагранжианы и с помощью этой операции строить затем конечную теорию поля [4]. Наиболее естественной и интересной попыткой такого рода, на наш взгляд, является попытка построить конечную электродинамику с учётом нелинейности по гравитационному полю. Подобная работа в настоящее время ведется А. Саламом совместно с его сотрудниками [5]. Несмотря на многие еще неразрешенные трудности это направление представляется безусловно интересным.

Конечность результатов во всех вышеуказанных теориях достигается за счёт использования специфических качеств суперпропагатора - двухточечной функции Грина поля, нелинейно входящего в лагранжиан. Эта функция не только сама остается конечной как в конфигурационном, так и в импульсном пространствах, но кроме того может регуляризовать степенные расходимости в амплитудах рассеяния, соответствующих обычным полиномиальным лагранжианам, если она будет стоять под знаком интеграла. Таким образом, суперпропагатор выступает в качестве некоторого формфактора. В этой связи определенный интерес приобретает вопрос – каковы регуляризующие возможности суперпропагатора в различных теориях? Любую ли расходимость можно устранить с его помощью или лишь некоторые? Оказывается, в различных теориях регуляризующие возможности суперпропагатора довольно сильно различаются. Выяснению поставленных выше вопросов и посвящена данная статья.

Во втором параграфе будут рассмотрены локализуемые взаимодействия, т.е. взаимодействия, при описании которых можно удовлетворить принцип микропричинности теории. В третьем параграфе будут рассмотрены нелокализуемые взаимодействия, где можно удовлетворить лишь принцип макропричинности теории. И, наконец, в четвертом параграфе будет рассмотрена квантовая электродинамика с учётом гравитации.

§2. Локализуемые взаимодействия

Напомним, что суперпропагатор в x -пространстве записывается в виде ряда

$$\Phi^{\pm}(x) = i\sum_{1}^{\infty} C(n)\left(\pm i\Delta^{c}(x)\right)^{n}, \qquad (2.1)$$

где $\Delta^{c}(x)$ – пропагатор свободной частицы. Для локализуемых взаимодействий коэффициенты $C(n)$ удовлетворяют условию /6/

$$\lim_{n\to\infty} |C(n)|^{1/n} = 0. \qquad (2.2)$$

В импульсном пространстве для безмассовых частиц суперпропагатор $\tilde{\tilde{\Phi}}^{(+)}(p)$ можно записать в следующей интегральной форме /7/

$$\tilde{\tilde{\Phi}}^{(+)}(p) = \frac{i}{2^{5}\pi}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz\, \frac{\left(\frac{|p^{2}|}{(4\pi)^{2}}\right)^{z-2}}{\sin^{2}\pi z}\, \frac{C(z)}{\Gamma(z-1)\Gamma(z)}, \qquad (2.3)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $p^{2} < 0$, $0 < a < 1$.

Форма (2.3) очень удобна для выявления регуляризующих свойств суперпропагатора. Это видно из следующего рассуждения.

Рассмотрим диаграмму с двумя вершинами. При добавлении к такой диаграмме линии, соответствующей суперпропагатору, в математическом выражении, описывающем эту диаграмму, появится еще один четырехмерный интеграл по импульсу, а общая степень импульса в подинтегральном выражении уменьшится на $2(2-z)$. Отсюда ясно, что если $\mathrm{Re}\, z$ будет меньше нуля, тогда добавление линии, отвечающей (2.3), будет улучшать поведение подинтегрального выражения, соответствующего рассматриваемой диаграмме, при бесконечных импульсах. Регуляризация будет тем сильнее, чем меньше можно сделать $\mathrm{Re}\, z$, т.е. чем дальше налево можно сдвинуть контур интегрирования в выражении (2.3). Возможность сдвига контура определяется видом коэффициента $C(z)$, т.е. видом взаимодействия. Сейчас мы рассмотрим некоторые из них и каждый раз будем находить, как далеко можно сдвинуть контур интегрирования в (2.3). Тем самым мы выясним вопрос – какими регуляризующими свойствами обладают суперпропагаторы при различных взаимодействиях.

Начнем рассмотрение с локализуемых взаимодействий. Наиболее типичным локализуемым взаимодействием является экспоненциальное /3/. Лагранжиан такого взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_e(\phi) = G : \exp\{ g\,\phi(x) \} : , \tag{2.4}$$

где $\phi(x)$ – скалярное поле, g и G – константы связи. Двухточечная функция Грина (второй порядок по константе G, две внешние линии) равна

$$\Phi_e(x) = i\,(gG)^2 \exp\{ -ig^2 \Delta^c(x) \} . \tag{2.5}$$

Полагая $g^2 < 0$ и выделяя из $\tilde{\tilde{\Phi}}_e(p)$ дельта-функцию, приходим в импульсном пространстве к выражению для $\tilde{\Phi}_e(p)$, подобному (2.3). Отсюда находим для коэффициента $C_e(Z)$

$$C_e(z) = -G^2 \frac{|g^2|^{z+1}}{\Gamma(z+1)} . \tag{2.6}$$

Нетрудно убедиться, что контур интегрирования в (2.3) при таком коэффициенте $C_e(z)$ можно сдвигать влево неограниченно далеко, откуда следует, что суперпропагатор, описывающий взаимодействие (2.4), обладает неограниченными регуляризующими возможностями. (В окончательных результатах необходимо сделать аналитическое продолжение по g^2 до положительных значений этой величины, см., например, /7,8/).

Рассмотрим теперь лагранжиан общего вида

$$\mathcal{L}_{об}(\phi) = G : \sum_0^\infty \frac{u(n)}{n!} (g\,\phi(x))^n : \tag{2.7}$$

Двухточечная функция Грина здесь будет следующая

$$\Phi_{об}(x) = i\,(gG)^2 \sum_0^\infty g^{2n} \frac{u^2(n+1)}{n!} [-i\,\Delta^c(x)]^n . \tag{2.8}$$

Коэффициент $C_{об}(z)$ равен

$$C_{об}(z) = -G^2 (-g^2)^{z+1} \frac{u^2(z+1)}{\Gamma(z+1)} . \tag{2.9}$$

Из формулы (2.9) видно, что для того, чтобы контур интегрирования можно было сдвигать влево, необходимо отсутствие особенностей у функции $u^2(z+1)$ в левой полуплоскости, за исключением простых полюсов в целочисленных точках. В случае же наличия каких-либо иных особенностей контур интегрирования в (2.3) можно сдвигать влево до ближайшей из них. Константу g^2 опять следует считать отрицательной, чтобы представление (2.3) было законным, а в конце расчётов необходимо сделать аналитическое продолжение к физическим значениям константы связи $g^2 > 0$.

§3. Нелокализуемые взаимодействия

Рассмотрение нелокализуемых взаимодействий естественно начать с граничного случая, когда

$$\lim_{n\to\infty} |C(n)|^{1/n} = a , \tag{3.1}$$

где a – некоторая постоянная величина. К двухточечной функции с такого рода коэффициентами пришли, например, Файнберг и Пайс, исследуя слабое взаимодействие фермионов с векторными мезонами /9/.

Функция $C_\Phi(z)$ в этом случае будет простой показательной функцией

$$C_\Phi(z) = a^z \ . \qquad (3.2)$$

Контур в (2.3) сдвигается налево неограниченно далеко и суперпропагатор может регуляризовать любую степенную расходимость.

Следующий интересный случай - это случай кирально-симметричных лагранжианов[2]. Для примера приведем здесь лагранжиан Вайнберга для π-мезонов[2]

$$\mathfrak{L}_B(\phi) = G \frac{(\partial_\nu \phi(x))^2}{(1+g^2\phi^2(x))^2} \ . \qquad (3.3)$$

Оказывается, что суперпропагаторы, возникающие при рассмотрении таких лагранжианов, уже не обладают неограниченными регуляризующими свойствами, а могут подавлять лишь некоторые, часто весьма немногие степенные расходимости. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вместо (3.3) более простой лагранжиан того же типа

$$\mathfrak{L}_K(\phi) = G : \frac{(\phi(x))^\ell}{(1+g\ \phi(x))^m} : \ . \qquad (3.4)$$

Здесь мы ввели знак нормального произведения в лагранжиан. Мы не будем обсуждать, насколько правомочна такая операция, а сразу приступим к определению функции $C(z)$. Разлагая лагранжиан (3.4) в ряд по степеням поля $\phi(x)$, найдем коэффициенты разложения $u_K(n)$ (см. (2.7))

$$u_K(n) = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+m-\ell)}{(-g)^\ell\,\Gamma(n-\ell+1)\,\Gamma(m)} \ . \qquad (3.5)$$

Отсюда для функции $C_K(z)$ находим

$$C_K(z) = -G^2 \frac{(-g^2)^{z+1}}{g^{2\ell}} \left[\frac{\Gamma(z+m-\ell+1)}{\Gamma(z-\ell+2)\,\Gamma(m)} \right]^2 (z+1)\ \Gamma(z+2) \ . \qquad (3.6)$$

Контур в (2.3) лежит в полосе $\ell-2 < \mathrm{Re}\, z < \ell-1$ (g^2 опять считаем отрицательной величиной).

Здесь целесообразно заметить, что метод, развитый нами в работе[7], непосредственно можно применять к описанию выражений типа (2.1) лишь в том случае, если суммирование начинается с числа $n \leq 2$. В данном случае взаимодействия (3.4) и функции Грина с двумя внешними концами это приводит к ограничению на ℓ : $\ell \leq 3$. В случае больших значений ℓ необходимо к выражению типа (2.1) добавить и вычесть конечное количество членов так, чтобы суммирование начиналось опять с двойки. Тогда бесконечную сумму можно будет вновь описывать методом[7], а оставшиеся члены (их будет конечное количество) - обычными методами квантовой теории поля. (Это замечание относится, в частности, к статье[10], в которой содержится некорректная критика нашего метода, которая теряет силу, если учесть указанное обстоятельство).

Подставляя выражение (3,6) в (2.3), мы видим, что если $m-\ell > 0$, то контур интегрирования в (2.3) можно сдвинуть влево до $\mathrm{Re}\, z = \ell - m - 1 + \epsilon$. Если $m = \ell$ или $m = \ell - 1$, контур можно сдвинуть влево до $\mathrm{Re}\, z = -2 + \epsilon$. И если $\ell - m > 1$, то опять контур сдвигается до $\mathrm{Re}\, z = \ell - m - 1 + \epsilon$ (здесь ϵ - бесконечно малая положительная величина).

Отсюда видно, что регуляризующие возможности суперпропагаторов, возникающих при описании киральных лагранжианов, весьма ограничены. Так, например, если $m = 4$ и $\ell = 2$, то суперпропагатор, соответствующий такому лагранжиану, может регуляризовать степенные расходимости не выше пятой степени, а если нет внешних скалярных концов, то не выше третьей степени. (Если нет внешних скалярных концов, соответствующих полю $\phi(x)$, то контур интегрирования в (2.3) можно сдвигать влево до $\mathrm{Re}\, z = \ell - m + \epsilon$, а если $\ell = m$, то до $\mathrm{Re}\, z = -1 + \epsilon$).

§4. Лагранжианы с гравитационными полями

В последнее время А. Саламом и его сотрудниками интенсивно изучаются лагранжианы с неполиномиальной зависимостью от гравитационных полей /5/. С помощью метода, подобного методу /7/, делается попытка построить конечную теорию поля, в частности, конечную квантовую электродинамику. Работа эта далека от завершения и в ней имеется целый ряд до сих пор еще не разрешенных трудностей. Однако само направление весьма интересно и было бы любопытно, на наш взгляд, посмотреть, каковы регуляризующие свойства у суперпропагаторов, используемых упомянутыми авторами.

Наше рассмотрение мы начнем с суперпропагатора, полученного Р. Дельбурго и А.П. Хантом /11/. Они исходили из следующего лагранжиана

$$\mathcal{L}(h) = [\, -\mathrm{Det}\, (\eta^{\alpha\beta} + \kappa\, h^{\alpha\beta}(x))\,]^{-1/2}, \tag{4.1}$$

где $\eta^{\alpha\beta} = (1, -1, -1, -1)$ - метрический тензор в пространстве Минковского, а $h^{\alpha\beta}(x)$ - гравитационное поле. Пропагатор свободного гравитационного поля равен

$$\overbrace{h^{\alpha\beta}(x)\, h}^{}{}^{\gamma\delta}(y) = -\frac{i}{2}[\,\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}\,]\,\Delta^c(x-y). \tag{4.2}$$

Предполагалось, что множитель (4.1) может появляться в каждой вершин обычного полиномиального взаимодействия некоторых полей. Тогда гравитационный суперпропагатор в x -пространстве имеет вид

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) \tag{4.3}$$

$$\Phi_1(x) = -4 \sum_{0}^{\infty} (-1)^n (n+1)\, \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(-n-1/2)}\, [\, i\kappa^2 \Delta^c(x)\,]^{2n+1} \tag{4.3'}$$

$$\Phi_2(x) = -4 \sum_{0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(-n-1/2)}\, [\, i\kappa^2 \Delta^c(x)\,]^{2n}. \tag{4.3''}$$

Используя метод /7/, получаем в импульсном пространстве ($p^2 < 0$)

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_1(p) = \frac{2\pi\kappa^2}{|p^2|} \int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} dz\, \frac{\left(\kappa^2 \frac{|p^2|}{64\pi^2}\right)^{2z}}{\sin^2 \pi z}\, \frac{(z+1)(z+1/2)^2}{\Gamma(z)\,\Gamma(z+1)}$$

(4.4)

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_2(p) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) + \frac{2^7 \pi^3}{|p^2|^2} \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz\, \frac{\left(\kappa^2 \frac{|p^2|}{64\pi^2}\right)^{2z}}{\sin^2 \pi z}\, \frac{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})^2}{\Gamma(z)\,\Gamma(z)}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что контуры в обоих интегралах можно сдвинуть влево неограниченно далеко, т.е. суперпропагатор (4.3) обладает неограниченной регуляризующей способностью.

Несколько иной гравитационный суперпропагатор получен А. Саламом и Ж. Стразди[5]. Вместо метрического тензора $g^{\alpha\beta}(x) = \eta^{\alpha\beta} + \kappa h^{\alpha\beta}(x)$ они использовали релятивистскую тетраду $L_{\alpha a}(x)$, связанную с метрическим тензором соотношением

$$g_{\alpha\beta}(x) = L_{\alpha a}(x)\, L_{\beta b}(x)\, \eta^{ab} . \tag{4.5}$$

Релятивистскую тетраду можно представить в форме

$$L^{\alpha a}(x) = \eta^{\alpha a} + \frac{\kappa}{2}\phi^{\alpha a}(x) , \tag{4.6}$$

где поле $\phi^{\alpha a}(x)$ можно считать квантованным полем. Его пропагатор равен (4.2).

Далее исследовалась электродинамика в квантовом гравитационном поле. Часть лагранжиана взаимодействия, в которую входит электромагнитное поле A_α, имеет вид

$$\mathfrak{L}_{\text{эд}}(\psi, A_\alpha) = e\,\frac{L^{\alpha a}(x)}{\operatorname{Det} L(x)}\,\bar{\psi}(x)\,\gamma_a\,\psi(x)\,A_\alpha(x). \tag{4.7}$$

Гравитационный суперпропагатор, возникающий здесь, равен

$$D^{\alpha a,\beta b}(x) = \langle 0|\, T\left(\frac{L^{\alpha a}(x)}{\operatorname{Det} L(x)}\,\frac{L^{\beta b}(0)}{\operatorname{Det} L(0)}\right)|0\rangle . \tag{4.8}$$

Для него вышеупомянутые авторы нашли следующее интегральное представление:

$$D^{\alpha a,\beta b}(x) = \frac{i}{2}\int\limits_{-a+i\infty}^{-a-i\infty}\frac{dz}{\sin\pi z}\Big[\eta^{\alpha a}\eta^{\beta b}D^{(0)}(z) + \frac{1}{2}\left(\eta^{\alpha\beta}\eta^{ab} + \eta^{\alpha b}\eta^{\beta a} - \eta^{\alpha a}\eta^{\beta b}\right)D^{(1)}(z)\Big] \times \left[-i\kappa^2\,\overset{\circ}{\Delta}(x)\right]^z , \tag{4.9}$$

где

$$D^{(0)}(z) = D(z) - \frac{19z+53}{36}D(z-1) + \frac{5}{36}(z+2)^2 D(z-2),$$

$$D^{(1)}(z) = -\frac{z+8}{9}D(z-1) + \frac{(z+2)^2}{18}D(z-2), \tag{4.10}$$

а

$$D(z) = \frac{\Gamma(z+4)}{2^{z+2}}\int\limits_0^1 dv\,(1-v^2)^{1/2}\Big[\frac{v^{z+3}}{(1+v)^2}\cos\pi z + \frac{v^{z+3}}{(1-v)^2} - \frac{4v}{(1-v^2)^2} + \frac{2v(z+3)}{1-v^2}\Big]. \tag{4.11}$$

Поскольку

$$D(-1) = D(-2) = D(-3) = 0 , \tag{4.12}$$

в чем нетрудно убедиться из формулы (4.11), числитель подинтегрального выражения в (4.9) обращается в нуль в точках $z = -1$ и $z = -2$. Поэтому контур можно сдвинуть налево до линии $\operatorname{Re} z > -3 + \epsilon$.

Тем самым гравитационный суперпропагатор (4.8) может регуляризовать степенные расходимости вплоть до пятой степени, т.е. заведомо регуляризует все раходимости, встречающиеся в обычной электродинамике даже без учета градиентной инвариантности.

Основное возражение против выбора лагранжиана, учитывающего существенно нелинейное взаимодействие с гравитационным полем, в форме (4.7) заключается в следующем. Если считать, что в выбранном таким образом лагранжиане нет знака нормального произведения по гравитационному полю, то тогда эквивалентным преобразованием спинорного поля[x/]

$$\psi'(x) = \psi(x)\,(\mathrm{Det}\,L(x))^{-1/2} \tag{4.13}$$

можно избавиться от нелинейности по гравитационному полю и тем самым мы придем к прежней теории со всеми ее старыми трудностями. В этом отношении нам кажется более интересным выбор лагранжиана в форме, использованной В.И. Огиевецким и И.В. Полубариновым[/12/].

$$\mathfrak{L}(\psi,A,h) = \Big\{\frac{i}{2}\, r^{\mu\nu}(x)\,[\bar\psi\gamma_\mu(\partial_\nu - \Gamma_\nu - ieA_\nu)\psi - \bar\psi(\overleftarrow{\partial}_\nu + \Gamma + ieA_\nu)\gamma_\mu\psi] - m\bar\psi\psi\Big\}(\mathrm{Det}\,g)^{-1/2}, \tag{4.14}$$

где $r^{\mu\nu}(x)$ определяется разложением в ряд корня

$$r^{\mu\nu}(x) = \sqrt{\eta^{\mu\nu} + \kappa h^{\mu\nu}(x)} = \eta^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}(x) - \frac{\kappa^2}{8}h^{\mu a}(x)h^{a\nu}(x) + \ldots, \tag{4.15}$$

[x/] Мы будем считать, что такое преобразование законно.

$h^{\mu\nu}(x)$ – квантованное поле с коммутатором, равным (4.2), а $\Gamma_\nu(x)$ также представляет собой ряд по степеням гравитационного поля (см.[/12/]). Эквивалентным преобразованием

$$\psi'(x) = \psi(x)\,(\mathrm{Det}\,g(x))^{-1/4} \tag{4.16}$$

можно убрать детерминант метрического тензора из лагранжиана (4.14). Но тем не менее неполиноминальная зависимость лагранжиана от гравитационного поля остается.

Интересно посмотреть, какими регуляризующими свойствами обладает суперпропагатор, построенный на основе спаривания двух операторов $r^{a\beta}(x)$ и $r^{\mu\nu\prime}(y)$. В общем виде в импульсном пространстве этот суперпропагатор имеет форму

$$R^{a\beta,\mu\nu}(p) = \eta^{a\beta}\eta^{\mu\nu}\Big[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p) + \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz\,\frac{e^{-i\pi z}\kappa^{2z}A(z)}{\sin^2\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z-1)}(p^2+i\epsilon)^{z-2}\Big] +$$

$$+ (\eta^{a\mu}\eta^{\beta\nu} + \eta^{a\nu}\eta^{\beta\mu})\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz\,\frac{e^{-i\pi z}\kappa^{2z}C(z)}{\sin^2\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z-1)}(p^2+i\epsilon)^{z-2}. \tag{4.17}$$

К сожалению, определение вида функций $A(z)$ и $C(z)$ представляется довольно сложной задачей. Но чтобы в общих чертах выяснить регуляризующие возможности такого суперпропагатора, можно рассмотреть упрощенную задачу, когда

$$r^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu}\sqrt{1 + \kappa\, h(x)}\ , \tag{4.18}$$

$$\overbrace{h(x)\, h}(y) = i\Delta^{c}(x-y)\ . \tag{4.19}$$

Тогда

$$R^{\alpha\beta,\mu\nu}(x) = \overbrace{r^{\alpha\beta}(x)\, r}^{\mu\nu}(0) = \eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\frac{1}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}[i\kappa^{2}\Delta^{c}(x)]^{n} \tag{4.20}$$

а в импульсном пространстве имеем ($p^2 < 0$)

$$\tilde{\tilde{R}}^{\alpha\beta,\mu\nu}(p) = \eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\left[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p) + \frac{\kappa^4}{2^5\pi^2}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty} dz\, \frac{\left(\frac{\kappa^2|p^2|}{(4\pi)^2}\right)^{z-2}}{\sin^2\pi z}\, \frac{(\Gamma(z+\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(z-1)\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\right]. \tag{4.21}$$

Из этого выражения видно, что такой суперпропагатор может регуляризовать лишь логарифмические расходимости (контур сдвигается налево до $\mathrm{Re}\, z = -\frac{1}{2} + \epsilon$).

Таким образом, мы видим, что если оставить в лагранжиане $\mathrm{Det}\, g$, то регуляризующие свойства суперпропагатора усилятся. Однако поскольку эквивалентным преобразованием этот детерминант всегда можно устранить, то возникает вопрос – надо ли учитывать этот детерминант в лагранжиане? Тем более, что имеются определенные основания считать, что знак нормального произведения не следует относить к гравитационным полям в лагранжиане, а при этом эквивалентные преобразования становятся вполне законной операцией. На последнее обстоятельство (опускание знака нормального произведения по гравитационному полю в лагранжиане) указывает, в частности, такой факт. Если даже мы будем считать, что знак нормального произведения относится к гравитационным полям в (4.14) и тем самым устранены гравитационные петли, в которых линии выходят и входят в одну и ту же точку, подобные петли все равно появятся в дальнейших вычислениях по теории возмущений благодаря членам с производной в лагранжиане (4.14)

$$\frac{i}{2}\, r^{\mu\nu}(x)\, \bar{\psi}(x)\, \gamma_{\mu}\, \overleftrightarrow{\partial}_{\nu}\, \psi(x)\ . \tag{4.22}$$

Поэтому, поскольку нормальное произведение по гравитационному полю в (4.14) не избавляет теорию от появления такого рода петель и связанных с ними расходимостей, то не ясно, целесообразно ли вводить нормальное произведение в лагранжиан с самого начала.

Вопросы выбора лагранжиана в той или иной форме через посредство эквивалентных преобразований, а также вида нормального произведения следует решать в тесной связи с еще одной, весьма важной проблемой, заключающейся в следующем. Как следует из работ Фейнмана, Фаддеева и Попова, Мандельштама, Де-Витта, Фрадкина и Тютина, Хонеркампа и др. /13/, в случае прообраза гравитации-полей Янга-Миллса и в случае киральной динамики, помимо диаграмм Фенймана, определяемых из взаимодействия в гайзенберговском представлении, возникают еще дополнительные замкнутые петли. Возникновение такого же рода петель можно ожидать и в случае гравитации, и они могут сыграть определяющую роль в вопросах эквивалентности и формы записи S -матрицы. Без учета этих петель все результаты, связанные с попыткой построения конечной теории поля, нельзя считать окончательными.

Очень серьезным вопросом является вопрос сохранения градиентной инвариантности теории. Можно ли, используя методы нелинейной квантовой теории, удовлетворить условию градиентной инвариантности в конечном порядке по константе κ ? На наш взгляд, ответ здесь может быть только отрицательным. Рецепт, предложенный П. Будини и Г. Калуци[/5/] для приближенного сохранения градиентной инвариантности, также, по нашему мнению, не приводит к успеху. Эти авторы предложили в каждом порядке по электромагнитной константе e рассматривать независимо группы диаграмм, имеющих одно и то же количество суперпропагаторов. В сумме вся эта группа диаграмм будет, действительно, удовлетворять условию градиентной инвариантности теории. Однако, если не все вершины будут попарно соединены суперпропагаторами, а лишь некоторые, как это имеет место в упомянутом рецепте, то в теории появятся опять старые трудности, связанные с наличием обычных полюсных расходимостей.

Если бы удалось просуммировать все порядки по κ в данном порядке по e , то тогда бы градиентная инвариантность, очевидно, восстановилась. Но эта задача крайне сложна. Так что вопрос, связанный с сохранением градиентной инвариантности, следует считать пока не решенным в изучаемой здесь теории.

С другой стороны, если не учитывать сохранения градиентной инвариантности, тогда регуляризующей мощности суперпропагатора (4.21) не хватает для подавления всех расходимостей в электродинамике (квадратичная расходимость при вычислении поляризации вакуума не будет подавлена). Таким образом, вопрос сохранения градиентной инвариантности оказывается связанным с вопросом о возможности построения конечной теории на основе лагранжиана (4.14)(без$(\mathrm{Det}\, g)^{-1/2}$).

§5. Заключение

Подводя итоги проведенному здесь рассмотрению регуляризующих свойств суперпропагаторов при различных взаимодействиях полей, мы приходим к выводу, что наиболее благополучная ситуация имеет место при взаимодействиях с экспоненциальной зависимостью от поля. Возникающие здесь суперпропагаторы в состоянии подавить любую степенную расходимость. Для кирально симметричных лагранжианов эти качества суперпропагатора уже довольно ограничены и целиком определяются разностью степеней, в которых поле входит в знаменатель и числитель лагранжиана. Чем быстрее лагранжиан стремится к нулю при $\phi \to \infty$, тем сильнее регуляризующие возможности соответствующего ему суперпропагатора.

Наконец, следует отметить, что много сложных и нерешенных до сих пор проблем возникает при попытке построения конечной квантовой электродинамики с неполиномиальной зависимостью от гравитационных полей. Ряд этих трудностей был отмечен уже раньше А. Саламом и Ж. Стразди (см.[/5/]). Центральными и весьма принципиальными вопросами, остающимися открытыми до сих пор, являются вопросы, связанные с эквивалентными преобразованиями и выбором лагранжиана в той или иной форме, выбором вида нормального произведения и учёта дополнительных замкнутых петель. Все эти вопросы должны решаться в тесной связи друг с другом и представляют собой весьма сложную и нетривиальную проблему. До сих пор не решена и проблема, связанная с сохранением градиентной инвариантности теории.

В заключение автор выражает глубокую признательность проф. Д.И. Блохинцеву за постоянный интерес к работе и д-ру В.И. Огиевецкому за полезные обсуждения.

Литература

1. См. ссылки в работе М.К. Волков, препринт ОИЯИ Е2-5198, Дубна, 1970.
2. J. Schwinger. Phys.Lett., 24B, 473 (1967);
   S. Coleman, I. Wess and B. Zumino. Phys.Rev., 177, 2239 (1969);
   S. Weinberg. Phys.Rev.Lett., 18, 188 (1967).
3. M.K. Volkov. Commun.Math.Phys., 7, 289 (1968);
   Препринт ИТФ-69-5, Киев (1969).
   T.D. Lee. Nuovo Cim., 59A, 579 (1969);
   G. Shafi. Preprint ICTP/69/22 (1970);
   N. Christ. Preprint NYO-1932(2)-174, New York (1970).
4. Г.В. Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 (1963),
   E.S. Fradkin. Nucl.Phys., 49, 624 (1963);
   D.I. Fivel and P.K. Mitter. Phys.Rev., D, v. 1, N 12, 3270 (1970).
5. A. Salam and J. Strathdee. Preprint IC/70/38 (1970),
   P. Budini and G. Calucci. Preprint IC/70/37 (1970),
   C.J. Isham, A. Salam and J. Strathdee. Preprint IC/70/ 131 (1970).
6. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966 (1964),
   G.V. Efimov. Commun.Math.Phys., 7, 138 (1968).
7. M.K. Volkov. Ann.Phys. (NY) 49, 202 (1968).
8. M.K. Volkov. Commun.Math.Phys., 7, 289 (1968).
9. G. Feinberg and A. Pais. Phys.Rev., 131, 2724 (1963); 133B, 477 (1964).
10. C.G. Bollini and J.J. Giambiugi. Lett.Nuovo Cim., v. 4, N 15, 711 (1970).
11. R. Delbourgo and A.P. Hunt. Preprint ICTP/69/18, London (1970).

12. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 48, 1625 (1965).
13. R.P. Feynman. Acta Phys. Polon. 24, 697 (1963).
    L.D. Fadeev and V.N. Popov. Phys.Letters., 25B, 29 (1967).
    B.S. De-Witt. J.Math.Phys., 3, 1073 (1962).
    S. Mandelstam. Phys.Rev., 175, 1580 (1968).
    J. Honerkamp and K. Meetz. Preprint Bonn Univ., PI 2-83 (1970).
    E.S. Fradkin and I.V. Tytin. Preprint IC/70/1 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 января 1971 года.