СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5373

В.Н. Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1970

Р2 - 5373

В.Н. Стрельцов

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Возьмем нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в электромагнитном поле:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x\right)^2 - e\phi \ . \tag{1}$$

С целью упрощения последующего рассмотрения на основании известной замены

$$S_1 = S - mc^2 t \tag{2}$$

перейдем к уравнению для функции действия $S(x,t)$.

При этом будем иметь:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x\right)^2 - e\phi + mc^2 \ . \tag{3}$$

Докажем теперь, что данное уравнение (3) инвариантно относительно нерелятивистских пространственно-подобных ("фазовых") преобразований[1]:

$$x' = x\gamma_1 - \beta ct, \quad t' = \left(t - \frac{\beta}{c} x\right)\gamma_1 , \tag{4}$$

где $\gamma_1 = 1 + \beta^2/2$, а $\beta = v/c$,

при условии, что потенциалы электромагнитного поля подчиняются преобразованиям вида[2]:

$$A_x = (A'_x + \beta\phi')\gamma_1 \ , \ \phi = \phi'\gamma_1 + \beta A'_x \ . \tag{5}$$

После перехода к другой (штрихованной) системе отсчёта и отбрасывания заведомо малых (порядка β^4 и меньше) членов получим следующее выражение:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'} - \frac{e}{c}A'_x\right)^2 - e\phi' + mc^2 - \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial S'}{\partial t'} + \frac{\beta^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t'}\right)^2 +$$

$$+\frac{e\beta^2}{mc^2}\frac{\partial S'}{\partial t'}\phi' + \beta c\frac{\partial S'}{\partial x'} - \frac{\beta}{mc}\frac{\partial S'}{\partial t}\frac{\partial S'}{\partial x'} + \frac{e\beta}{mc}\frac{\partial S'}{\partial x'}\phi' +$$

$$+\frac{e\beta}{mc^2}\frac{\partial S'}{\partial t'}A'_x + \frac{e^2\beta}{mc^2}A'_x\phi' - e\beta A'_x - \frac{e\beta^2}{2}\phi' + \frac{e^2\beta^2}{2mc^2}\phi'^2 ,$$

которое может быть переписано в форме:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'} - \frac{e}{c}A'_x\right)^2 - e\phi' + mc^2 +$$

$$+\left(\frac{\partial S'}{\partial t'} + e\phi' - mc^2\right)\left(\frac{\beta^2}{2mc^2}\frac{\partial S'}{\partial t'} - \frac{\beta}{mc}\frac{\partial S'}{\partial x'} + \frac{e\beta}{mc^2}A'_x + \frac{e\beta^2}{2mc^2}\phi'\right).$$

Опираясь далее на уравнение Гамильтона-Якоби (3) в новой системе отсчёта, будем иметь:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'} - \frac{e}{c}A'_x\right)^2\left[1 + \frac{\beta^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t'} + e\phi'\right) - \frac{\beta}{mc}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'} - \frac{e}{c}A'_x\right)\right] - \qquad (6)$$

$$-e\phi' + mc^2 .$$

В полученном таким образом выражении (6) малость двух последних членов в квадратных скобках сомнений не вызывает. Ими можно пренебречь. А это означает, что инвариантность уравнения (3) относительно преобразований (4) доказана.

Если далее в уравнении (6) сделать замену, обратную (2)

$$S' = S'_1 + mc^2 t',$$

то мы перейдем к уравнению, вид которого аналогичен (1). Отсюда можно заключить, что и уравнение Гамильтона-Якоби (для частицы в электромагнитном поле) в обычном виде (1) также инвариантно относительно нерелятивистских пространственно-подобных преобразований.

Литература

1. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ Р2-5131, Дубна (1970).*
2. *В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ Р2-5130, Дубна (1970).*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 сентября 1970 года.