СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5330

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.А. Смондырев

О РАВЕНСТВЕ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1970

P2 - 5330

М.А. Смондырев

О РАВЕНСТВЕ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В рамках алгебраического направления Хаага-Араки в аксиоматической теории поля задается соответствие $\{O \to R(O)\}$ между открытой областью O пространства Минковского M и алгеброй фон Неймана $R(O)$. Принимается, что это соответствие удовлетворяет некоторому набору аксиом, приводимому ниже.

1. Изотония:

$$O_1 \subset O_2 \to R(O_1) \subset R(O_2) .$$

1a. Непрерывная изотония /1/:

$$O_1 \supset O_2 \supset \ldots \supset O_n \supset \ldots \quad \text{и} \quad O = \operatorname{int} \bar{O} \supset \bigcap_i O_i \to$$

$$\to R(O) = \bigcap_i R(O_i) .$$

2. Слабая аддитивность:

$$R_\infty \overset{\text{def}}{=} \{\bigcup_O R(O)\}'' = \{\bigcup_x R(O+x)\}'' .$$

2a. Аддитивность:

$$R(O_1 \cup O_2) = \{R(O_1) \cup R(O_2)\}'' .$$

3. Трансляционная ковариантность:

$$R(O+x)=U(x)R(O)U^{-1}(x).$$

4. Спектральность:

$$\Delta \cap \bar{V}_{+}=\phi \rightarrow E(\Delta)=0,$$

где $\bar{V}_{+}$ - замкнутый конус будущего, а $E(\Delta)$ - спектральная мера оператора трансляции U для множества Δ в пространстве энергии-импульса.

5. Существование, единственность и цикличность вакуума.

6. Локальная коммутативность:

$$O_1 \subset O_2' \rightarrow R(O_1) \subset R'(O_2).$$

7. Примитивная причинность:

$$R_\infty=\{\bigcup_{O} R(O)\}''=\{\bigcup_{O\subset T} R(O)\}'',$$

где T - открытая область, содержащая полностью пространственноподобную гиперповерхность.

7а. Сильная форма примитивной причинности[2]:

$$R(O_c) \subset R(O),$$

где O_c - причинная тень области O (см. также[3]).

8. Причинность в формулировке Генена-Мисра[4]:

$$O'=\phi \rightarrow R(O)=R_\infty .$$

В традиционном подходе перечисленные аксиомы устанавливают некоторые свойства локальных алгебр, если известны свойства соответствующих областей. Можно, однако, поставить и обратные задачи, т.е. рассмотреть переход от алгебр к областям. В частности, интересна, на наш взгляд, "обратная изотония": пусть даны совпадающие алгебры $R(O_1)=R(O_2)$; спрашивается, что можно сказать об областях O_1 и O_2 ?

В настоящей заметке устанавливается ряд результатов, относящихся к указанной проблеме. Ее исчерпывающее решение получено с помощью постулата 8 (теорема 2 и следствие). Результат этой теоремы настолько силен, что, быть может, он позволит доказать противоречивость постулата 8 и всех остальных аксиом. До сих пор известно лишь, что постулат Генена-Мисра нарушается в теории свободного поля[5], что доказывает его независимость.

В §1 работы устанавливаются некоторые свойства локальных алгебр $R(O)$ без привлечения постулата 8. В §2 существенно используется этот постулат и доказанная с его помощью (см.[3]) теорема дуальности для произвольных областей.

§1. Некоторые достаточные условия несовпадения локальных алгебр

Известно одно замечательное в своем роде условие несовпадения алгебр (см.[6]), а именно следующая

<u>Теорема 1</u>.

Пусть выполнены аксиомы 1а, 2, 4-7 и пусть даны ограниченные открытые области O и O_1, причём $O_1 \subset O$ и

$$d=\inf_{x\in O_1,\, y\in O}\left[|x_0-y_0|^2+|\vec{x}-\vec{y}|^2\right]^{1/2}\geq \epsilon>0.$$

Тогда

$$R(O_1)\neq R(O_2).$$

Легко видеть, что теорема 1 допускает обобщение.

<u>Предложение 1.</u>

Пусть выполнены аксиомы 1-6. Пусть, далее, даны ограниченные открытые области O и O_1, причём $O_1 \subset O$ и найдется такой времениподобный вектор x, что

$$\forall_{\substack{\lambda\in R^1\\ |\lambda|\leq 1}} (O_1+\lambda x)\subset O .$$

Тогда

$$R(O_1) \neq R(O).$$

Доказательство:

Предположим, что $R(O_1) = R(O)$. Тогда, по условию теоремы, имеем:

$$\forall_{\substack{\lambda \in R^1 \\ |\lambda| \leq 1}} R(O_1 + \lambda x) \subset R(O_1);$$

в частности,

$$R(O_1 + x) \subset R(O_1)$$

$$R(O_1 - x) \subset R(O_1). \tag{1}$$

Согласно аксиоме 3 из (1) следует:

$$\forall_y R(O_1 + y + x) \subset R(O_1 + y) \tag{2}$$

и

$$\forall_z R(O_1 + z - x) \subset R(O_1 + z). \tag{3}$$

Положив в (3) $z = y + x$, получим

$$\forall_y R(O_1 + y) \subset R(O_1 + y + x),$$

что в совокупности с (2) дает нам

$$\forall_y R(O_1 + y + x) = R(O_1 + y). \tag{4}$$

Покажем теперь, что равенство (4) ведет к противоречию. Составим области

$$O_2 = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} (O_1 + \lambda x) \quad \text{и} \quad O_3 = \bigcup_{-\infty \leq a \leq +\infty} (O_1 + a x).$$

Согласно аксиоме 2а

$$R(O_2) = \{ \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} R(O_1 + \lambda x) \}''$$

$$R(O_3) = \{ \bigcup_{-\infty \leq a \leq +\infty} R(O_1 + a x) \}''. \tag{5}$$

Введем обозначение $a = n + \lambda_0$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а $0 \leq \lambda_0 \leq 1$. Легко видеть, что из (4) следует

$$R(O_1 + ax) = R(O_1 + nx + \lambda_0 x) = R(O_1 + \lambda_0 x)$$

и вместе с (5) это дает

$$R(O_2) = R(O_3). \tag{6}$$

Имеется теорема Борхерса о трубе /7/ (используются аксиомы 1, 1а, 2, 3, 4, 5), согласно которой алгебра $R(O_3) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.к. область O_3 содержит времениподобную линию. Таким образом, равенство (6) переходит в $R(O_2) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, где область O_2 ограничена. Но тогда найдется область $O_4 \subset O_2'$, для которой по аксиоме 6 имеем включение

$$R(O_4) \subset R'(O_2) = \mathcal{B}'(\mathcal{H}) = \mathcal{E}(\mathcal{H}).$$

Отсюда, в свою очередь, получается, что глобальная алгебра R_∞ совпадает с алгеброй скаляров $\mathcal{E}(\mathcal{H})$, что физически бессмысленно:

$$R_\infty = \{ \bigcup_z R(O_4 + z) \}'' = \mathcal{E}''(\mathcal{H}) = \mathcal{E}(\mathcal{H}).$$

Предложение 1 доказано.

Приведенное доказательство дает нам еще один результат.

Предложение 2.

Пусть справедливы аксиомы 1–6. Пусть, далее, O_1 и O_2 – ограниченные открытые области, причём $O_2 = O_1 + x$, где x – некоторый времениподобный вектор. Тогда $R(O_1) \neq R(O_2)$.

Доказательство:

Предположим, что $R(O_1) = R(O_2)$, а значит,

$$R(O_1 + x) = R(O_1).$$

Аксиома 3 тогда приводит к равенству (4):

$$\forall_y\, R(O_1 + y) = R(O_1 + y + x),$$

которое, как мы уже нашли выше, не может выполняться, что и доказывает предложение 2.

Имеет место почти очевидное

Предложение 3.

Пусть выполнены аксиомы 1а, 2, 4–7, и пусть даны ограниченные открытые области O_1 и O_2, причём $R(O_1) \subset R(O_2)$.

Тогда $O_1 \cap O_2' = \phi$.

Доказательство:

Докажем сначала предложение при условии, что область O_2 – алмаз (т.е. $O_2 = O_2''$). Пусть $O_1 \cap O_2' = O_3 \neq \phi$. Тогда имеем очевидные включения:

$$R(O_3) \subset R(O_1) \subset R(O_2)$$

и

$$R(O_3) \subset R'(O_2),$$

откуда

$$R(O_3) \subset R(O_2) \cap R'(O_2) = \mathcal{E}(\mathcal{H}),$$

т.к. для алмаза O_2 алгебра $R(O_2)$ есть фактор (см. /8/). Напомним, что включение $R(O_3) \subset \mathcal{E}(\mathcal{H})$ приводит к противоречию, т.е. предложение 3 доказано в том случае, когда O_2 – алмаз.

Пусть теперь $O_2 \subset M$ – произвольная ограниченная открытая область. Имеем:

$O_2 \subset O_2''$ и область O_2'' – алмаз.

Далее, $R(O_1) \subset R(O_2) \subset R(O_2'')$ и по доказанному

$$\phi = O_1 \cap (O_2'')' \equiv O_1 \cap O_2'.$$

Предложение 3 полностью доказано.

Следствие.

Пусть выполнены условия предложения 3 и, более того, $R(O_1) = R(O_2)$. Тогда $O_1 \cap O_2' = O_2 \cap O_1' = \phi$.

Еще раз отметим, что мы до сих пор не пользовались постулатом Генена–Мисра. С его помощью, как и следовало ожидать, получаются более сильные результаты, к изложению которых мы сейчас и переходим.

§2. Необходимое и достаточное условие совпадения локальных алгебр

Предложение 2 мы доказали построением трубы Борхерса и некоторой ограниченной области, причём соответствующие алгебры совпадали. Если бы в этом предложении вместо равенства алгебр $R(O_1) = R(O_2)$ мы имели включение $R(O_1) \subset R(O_2)$, то нам удалось бы построить всего лишь половину трубы $O = \bigcup_{a \leq 0} (O_1 + ax)$, причём $O' = \bigcap_{a \leq 0} (O_1' + ax) = \phi$, т.к. вектор x времениподобен. Привлекая постулат 8, мы получаем $R(O) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, как и в случае предложения 2. Все остальные рассуждения переносятся без изменений.

Таким образом, предложение 2 получает следующее усиление:

Предложение 4.

Пусть выполняются аксиомы 1–6, 8. Пусть, далее, O_1 и O_2 – ограниченные открытые области, причём найдется такой времениподобный вектор x, что $O_2 \subset O_1 + x$. Тогда

$$R(O_1) \not\subset R(O_2).$$

Следующее следствие является усилением предложения 1.

Следствие.

Если $O_1 \subset O$ и существует такой времениподобный вектор x, что $O_1 + x \subset O$, то $R(O_1) \neq R(O_2)$. Перейдем теперь к нахождению необходимого и достаточного условия совпадения локальных W^*-алгебр. Для этого необходимо доказать несколько предложений.

Предложение 5.

Пусть выполнены аксиомы 1–6, 8, и пусть O_1 и O_2 – ограниченные открытые области, причём

$$O_1'' \cap O_2'' = \phi.$$

Тогда $R(O_1) \cap R(O_2) = \mathcal{E}(\mathcal{H})$.

Доказательство.

Введем алгебру $R = R(O_1) \cap R(O_2)$. Ее коммутант

$$R' = \{R'(O_1) \cup R'(O_2)\}'' = \{R(O_1') \cup R(O_2')\}'' = R(O_1' \cup O_2'). \tag{7}$$

Второе равенство в этой цепочке является следствием теоремы дуальности для любых областей (см. /3/). Так как

$(O_1' \cup O_2')' = O_1'' \cap O_2'' = \phi$ по условию, то постулат 8 совместно с (7) приводит к

$$R' = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to R \subset R'' = \mathcal{E}(\mathcal{H}),$$

что и требовалось доказать.

Предложение 6.

Пусть выполнены аксиомы 1–6, 8, и пусть O_1 и O_2 – ограниченные открытые области, причём имеют место включения $O_2 \subset O_2'' \subsetneq O_1$. Тогда $R(O_1) \neq R(O_2)$.

Доказательство.

Предположим, что $R(O_1) = R(O_2)$ и введем непустую область $O_3 = O_1 / \overline{O_2''}$. Тогда

$$O_3 \subset O_1 \to R(O_3) \subset R(O_1) = R(O_2) \subset R(O_2''). \tag{8}$$

Всегда найдется достаточно малый алмаз $O_4 \subset O_3$ и, следовательно, для алмазов O_4 и O_2'' имеем условия предложения 5: $O_4 \cap O_2'' = \phi$. Тогда

$$R(O_4) \cap R(O_2'') = \mathcal{E}(\mathcal{H}). \tag{9}$$

С другой стороны, $R(O_4) \subset R(O_3) \subset R(O_2'')$. Согласно (8), и вместе с (9) это дает нам равенство $R(O_4) = \mathcal{E}(\mathcal{H})$, что невозможно. Предложение 6 доказано.

Предложение 7.

Пусть выполнены аксиомы 1–6, 8, и пусть O_1 и O_2 – алмазы, причём

$$O_3 = O_1 \cap O_2 \neq \phi \quad и \quad O_3 \neq O_1, \qquad O_3 \neq O_2 .$$

Тогда $R(O_1) \neq R(O_2)$.

Доказательство.

Предположим, что $R(O_1) = R(O_2)$. Имеем представление $O_3 = (O_1' \cup O_2')'$, откуда

$$R(O_3) = R[(O_1' \cup O_2')'] = R'(O_1' \cup O_2') =$$

$$= \{R(O_1') \cup R(O_2')\}' =$$

$$= \{R'(O_1) \cup R'(O_2)\}' = R(O_1) \cap R(O_2) = \qquad (10)$$

$$= R(O_1) = R(O_2).$$

С другой стороны, $O_3 = O_3'' \subsetneq O_1$, и по предложению 6 имеем $R(O_1) \neq R(O_3)$, что противоречит уравнениям (10). Это и доказывает предложение 7.

Комбинируя вместе предложения 5-7, получаем следующую теорему.

Теорема 2.

Пусть выполнены аксиомы 1-6, 8, и пусть O_1 и O_2 - алмазы. Тогда совпадение соответствующих локальных алгебр $R(O_1)$ и $R(O_2)$ возможно тогда и только тогда, когда совпадают сами алмазы, т.е.

$$\forall_{\substack{O_1 = O_1'' \\ O_2 = O_2''}} \quad R(O_1) = R(O_2) \rightleftarrows O_1 = O_2 .$$

Следствие.

В предположениях теоремы 2 локальные алгебры $R(O_1)$ и $R(O_2)$ для произвольных ограниченных открытых областей O_1 и O_2 совпадают тогда и только тогда, когда совпадают алмазные оболочки этих областей, т.е.

$$\forall_{O_1, O_2 \subset M} \quad R(O_1) = R(O_2) \rightleftarrows O_1'' = O_2'' .$$

Доказательство:

$$O_1'' = O_2'' \to R(O_1) = R(O_1'') = R(O_2'') = R(O_2)$$

и

$$R(O_1) = R(O_2) \to R(O_1'') = R(O_2'') \to$$
$$\to O_1'' = O_2''$$

, т.к. применима теорема 2 для алмазов O_1'' и O_2''.

Выполняя приятный долг, приношу в заключение глубокую благодарность М.К. Поливанову, А.Н. Тавхелидзе и С.С. Хоружему за полезные обсуждения, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Литература

1. *K. Kraus. Z. Phys., 181, 1, 1964.*
2. *R. Haag, B. Schroer. J. Math.Phys., 3, 248, 1962.*
3. *С.С. Хоружий. ТМФ, 2, 350, 1970.*
4. *M. Guenin, B. Misra. Nuovo Cim., 30, 1272, 1963.*
5. *H. Araki. J. Math.Phys., 5, 1, 1964.*
6. *A.S. Wightman. Ann. Inst.Henri Poincaré, 1, Sec.A, 403, 1964.*
7. *H.J. Borchers. Nuovo Cim., 19, 787, 1961.*
8. *С.С. Хоружий. ТМФ, 1, 95, 1969.*

Рукопись поступила в издательский отдел
19 августа 1970 года.