СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5314

В.Н. Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ПРИМЕНЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К УРАВНЕНИЮ ДИРАКА

1970

P2 - 5314

В.Н. Стрельцов

ПРИМЕНЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К УРАВНЕНИЮ ДИРАКА*

* В порядке обсуждения

Коль скоро нерелятивистские преобразования вытекают из преобразований Лоренца, то следует ожидать, что уравнения Дирака должны быть инвариантны (при достаточно малых скоростях) и относительно преобразований первого типа.

С целью ответа на этот вопрос применим нерелятивистские "фазовые" преобразования координат [1]:

$$x' = x\beta_1 - \beta ct, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = (t - \frac{\beta}{c} x)\beta_1, \tag{1}$$

где $\beta_1 = 1 + \beta^2/2$, а $\beta = v/c$,

к уравнениям Дирака:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{h} \psi = 0 .$$

При этом, если в релятивистском случае мы имели формулы преобразований для волновых функций в виде:

$$\psi'_\rho = \sqrt{\frac{1}{2}(B+1)}\, \psi_\rho - \sqrt{\frac{1}{2}(B-1)}\, \psi_\sigma ,$$

где $B = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\rho = 1,2,3,4$, а $\sigma = 4,3,2,1$, соответственно, то в нерелятивистском приближении указанные формулы будут иметь вид:

$$\psi'_\rho = (1 + \frac{\beta^2}{8})\psi_\rho - \frac{\beta}{2}(1 + \frac{3\beta^2}{8})\psi_\sigma . \tag{2}$$

Прямая подстановка показывает, что такой выбор формул преобразований действительно обеспечивает выполнение требования инвариантности в нерелятивистском случае.

Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим, например, как преобразуется первое уравнение Дирака:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \psi_1'}{\partial t'} = -\frac{\partial \psi_4'}{\partial x'} + i\frac{\partial \psi_4'}{\partial y'} - \frac{\partial \psi_3'}{\partial z'} - \frac{imc}{h}\psi_1' \qquad (3)$$

при переходе к другой системе отсчёта.

В результате перехода к нештрихованной системе отсчёта для уравнения (3) будем иметь:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x} - i\frac{\partial \psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{imc}{h}\psi_1\right)\left(1+\frac{\beta^2}{8}\right) =$$

$$-\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \psi_4}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(1-\beta^2) + i\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{imc}{h}\psi_4\right]\frac{\beta}{2}\left(1+\frac{3}{8}\beta^2\right).$$

Здесь выражение в левой части представляет собою первое уравнение Дирака в новой системе отсчёта. В то же время выражение в правой части отличается от четвертого уравнения Дирака видом второго члена (в квадратных скобках). Однако на основании условия[x/]:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \approx \beta\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial \psi_1}{\partial t}$$

можно заключить, что в рассматриваемом приближении член $-(\beta^3/2)\partial\psi_1/\partial x$ будет составлять (по порядку величины), например, по отношению к первому члену в левой части, β^4. Поэтому его следует отбросить как малый. Теперь выражение в левой части будет полностью совпадать с видом четвертого уравнения Дирака в новой системе отсчёта. А это и означает, что исходное уравнение (3) инвариантно относительно нерелятивистских преобразований (1).

x/ Процедура получения условий подобного типа рассмотрена, например, в работе/1/.

В галилеевом приближении вместо формул (2), очевидно, будем иметь:

$$\psi_\rho' = \psi_\rho - \frac{\beta}{2}\psi_\sigma\ . \qquad (4)$$

При этом инвариантность уравнений Дирака проверяется подобно тому, как это было показано выше.

В заключение отметим, что вид формул (2) соответствует тому случаю, когда компоненты $\psi_1(\psi_2)$ и $\psi_4(\psi_3)$ по порядку величины равны друг другу. Если же, скажем, $\psi_{4,3} \approx \beta\,\psi_{1,2}$, то для ψ_1' и ψ_2' вместо формул вида (2) и (4) будем иметь следующие выражения:

$$\psi_{1,2}' = \left(1+\frac{\beta^2}{8}\right)\psi_{4,3} - \frac{\beta}{2}\psi_{1,2} \qquad (2')$$

и

$$\psi_{1,2}' = \psi_{1,2}\ . \qquad (3')$$

При этом снова можно показать, что требование инвариантности относительно нерелятивистских преобразований (1) будет выполнено и в этом случае.

Литература

1. В.Н. Стрельцов. Сообщения ОИЯИ Р2-5131, Дубна, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1970 года.