ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-5289

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.А. Марков

# К ТЕОРИИ ФРИДМОНОВ
## (О роли гравитации в теории элементарных частиц)

1970

P2-5289

8441/2 up

М.А. Марков

# К ТЕОРИИ ФРИДМОНОВ

## (О роли гравитации в теории элементарных частиц)

Доклад на XV Международной конференции по физике высоких энергий, Киев, август 1970 г.

## § I. В в е д е н и е

В моем докладе мне хотелось бы обратить внимание аудитории на возможности своеобразного космологического подхода к теории элементарных частиц. Хотелось бы обратить внимание на то, что почти замкнутая Вселенная , содержащая огромное число галактик, в системе координат шварцшильдовского наблюдателя может иметь внешние параметры , т.е. полную массу , заряд, внешние размеры, подобные параметрам микрочастицы.

Более того, рассмотрение объектов с почти замкнутой метрикой дает модель протяженной частицы в общей теории относительности, свободную от трудностей с расходимостями и соответствующих трудностей нелокальных теорий в Эвклидовом пространстве.

Введение размеров элементарных частиц в Эвклидовом пространстве противоречит принципу причинности: сигнал вблизи частицы начинает распространяться со скоростью , большей предельной скорости света.

В общей теории относительности благодаря неэвклидовой метрике сигнал вблизи частиц замедляется и распространяется со скоростью, меньшей скорости света.

Более того, если в эвклидовом пространстве точечный объект является естественным , то в общей теории относительности при исчерпывающем описании x/ автоматически естественным оказывается образ частицы протяженной.

С физической точки зрения речь идет, конечно, о соответствующем учёте гравитации в теории элементарных частиц. Здесь верховным принципом является , как это будет видно из дальнейшего, – принцип равенства инертной и гравитационной массы.

Этот принцип выполнен в строгой теории, которая дается системой совместных уравнений Эйнштейна и , например, Максвелла. В общем случае решение этой системы сложно, особенно в квантовой области. Но теория будет свободна от расходимостей во всех приближенных уравнениях, если только в них выполняется принцип равенства инертной и гравитационной массы. В других отношениях приближение может быть как угодно грубым.

Здесь имеется в виду, в частности, математический аппарат теории гравитации Эйнштейна, переписанный для Эвклидова пространства, т.е. теория , например, типа теории Гупты и ее приближения.

В тех случаях , когда при учёте гравитации в теории элементарных частиц нарушается равенство инертной и гравитационной масс , возникают расходимости даже более высокого порядка по сравнению, например, с электродинамикой.

Как известно, гравитационные масштабы порядков на двадцать отличаются от масштабов, с которыми мы имеем дело в теории элементарных частиц. Так, характерная гравитационная длина $\ell_g = \sqrt{\frac{\hbar\varkappa}{c^3}} = 10^{-32}$ см.

---

x/ Имеется в виду полное пространственно-временное описание типа Крускала.

Поэтому давно сложилось интуитивное мнение, носящее характер предрассудка, о том, что гравитационное взаимодействие не может играть существенной роли в теории элементарных частиц, хотя давно известно, что в наиболее развитой теории – электродинамике – расходимость логарифмическая, и там могут играть роль очень малые длины. Есть, как мы увидим, и другие обстоятельства, которые могут также поколебать сложившиеся предрассудки.

## § 2. К теории почти закрытых миров (фридмоны)

В этом разделе доклада мне хотелось бы обратить внимание на то, что существуют естественные условия, при которых системы с внешними микроскопическими параметрами[x] (фридмоны) образуются со временем автоматически независимо от начальных, как угодно больших макроскопических значений этих параметров.

Теперь небольшой экскурс в релятивистскую космологию.

Как известно, метрика закрытого мира Фридмана дается в виде [I]

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d^2\varphi\right)\right]. \quad (1)$$

Имеются две фундаментальные характеристики (два признака) закрытого мира [I]:

а) Полная масса закрытого мира равна нулю

$$M_{tot} = 0. \quad (2)$$

в) Закрытый мир обязательно электрически нейтрален:

$$\mathcal{E} = \sum e_i = 0. \quad (3)$$

x/ Т.е. полной массой, полным зарядом и размерами системы, как она представляется шварцшильдовскому наблюдателю, практически на бесконечности.

Как известно, замкнутый мир Фридмана описывается соответствующими решениями Толмана для сферически-симметричного однородного и изотропного распределения пылевидной материи при давлении, равном нулю, и при соответствующей критической плотности вещества.

Равенство нулю полной массы ( $M_{tot}$ ) закрытого мира является результатом возникновения гравитационного дефекта масс ( $\Delta M$ ), который достигает своего максимального значения ( $M_0 - \Delta M = M_{tot} = 0$ ), когда плотность вещества становится равной критической.

Если , однако, эту систему зарядить , допустим, равномерно электрическим зарядом, то метрика мира перестает быть замкнутой при любом значении полного электрического заряда, отличного от нуля.[2]

Если заряд системы таков, что электрические силы не в состоянии преодолеть гравитационного притяжения, то при плотности материи , большей критической, образуется метрика т.н. полузамкнутого мира, вместо метрики замкнутой.

В данной системе возникает центр симметрии и сферические поверхности, описываемые вокруг этого центра, при не очень большом электрическом заряде приближенно имеют вид

$$S^2 = a^2 \sin^2 \chi \quad \text{где} \quad \chi < \pi/2 \qquad (4)$$

Как и в случае отсутствия заряда при удалении от центра ( $\chi = 0$), поверхности возрастают ( до $\chi = \pi/2$ ) , а при дальнейшем удалении от центра поверхности уменьшаются.

В случае отсутствия заряда поверхность при $\chi = \pi$ стягивается в точку - мир замыкается.

Если система электрически заряжена , то при $\chi$ , близком к $\pi$ ( и при относительно малом заряде), метрика существенно отличается от фридмановской. Теперь сферическая поверхность не стягивается в точку , а возникает некоторая минимальная сфера (горловина) , через которую метрика материальной системы связана с внешней метрикой Нордстрема-Райсснера в пустом пространстве.[x)]

Параметры этой горловины получаются автоматически при сшивании внутренней метрики системы с внешней нордстрем-рейсснеровской метрикой .[2]

Любопытно, что электрический потенциал в горловине не зависит от величины полного электрического заряда системы и равен

$$\varphi = \frac{c^2}{\sqrt{\varkappa}}, \tag{5}$$

где $c$ - скорость света , а $\varkappa$ - гравитационная константа. Дело в том, что с ростом расстояния , при $\chi > \pi/2$ , как мы упоминали раньше, сферические поверхности уменьшаются, они играют как бы роль линз, сгущающих электрические силовые линии. Видимо, значение электрического потенциала, даваемого соотношением (5), является предельно большим значением, допускаемым теорией. С увеличением заряда системы электрический потенциал горловины не увеличивается , а пропорционально заряду ( $\mathcal{E}$ ) увеличивается радиус горловины

$$r_h = \frac{\mathcal{E}\sqrt{\varkappa}}{c^2}. \tag{6}$$

Значение полной массы системы дается выражением

$$m = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{7}$$

x) У мира Фридмана появляется по терминологии O.Klein'a "Aussenwelt". Я. Зельдович и П. Новиков подобные объекты называют "полузамкнутыми мирами".

При $\varepsilon \to 0$ полная масса системы обращается в нуль - как это имеет место в закрытом мире Фридмана.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что полная масса системы в этом случае оказывается электростатического происхождения.

В данном случае все параметры $m$, $\varepsilon$, $r_h$ имеют, вообще говоря, ультрамакроскопические значения.

Теперь хотелось бы обратить внимание на одно очень важное обстоятельство. Именно, размеры горловины устойчивы лишь при классическом рассмотрении. Как только мы примем во внимание то обстоятельство, что в таких огромных электрических полях, которые имеют место в горловине, возникают эффекты рождения пар заряженных частиц - картина становится существенно иной. Действительно, частица рожденной пары с зарядом, противоположным заряду системы, падает на систему, уменьшая её полный заряд. Другая компонента пары, отталкиваясь от заряда системы, уходит на бесконечность.

Таким образом, происходит бурное уменьшение полного заряда системы $\varepsilon$, а по формуле (7) происходит уменьшение полной массы системы, и по формуле (6) происходит уменьшение внешних размеров системы, её горловины. Система стремится как можно полнее замкнуться.

Оценки показывают [2] x/, что этот процесс рождения пар уменьшает полный заряд системы до конечной величины

$$Z_f \leq \frac{1}{\alpha \ln\left(\frac{e}{\sqrt{\varkappa}}/m_e\right)^2}, \tag{8}$$

x) В которых принято во внимание рождение только электрон - -позитронных пар.

где $\alpha$ - константа тонкой структуры , $\varepsilon$ - электрический заряд, $m_e$ - масса электрона.

Т.к.

$$e_n \left( \frac{e/\sqrt{\varkappa}}{m_e} \right)^2 \sim \frac{1}{\alpha}$$

, то

$$Z_f \leq 137. \tag{9}$$

Существенно подчеркнуть то фундаментальное обстоятельство, что а) конечный заряд системы $Z_f$ не зависит от её начального заряда; в) конечный заряд имеет микроскопическую величину

$$e_f \leq 137e\ ; \tag{10}$$

с) внешние размеры системы имеют микроскопические размеры

$$r_h \leq 137e \frac{\sqrt{\varkappa}}{c^2} \sim 10^{-30} cm \tag{11}$$

и полная масса

$$m_f < \frac{137e}{\sqrt{\varkappa}} \sim 10^{-4} gr. \tag{12}$$

Соотношения (I0), (II) и (I2) имеют вид неравенств. Эти соотношения дают верхние границы для конечного заряда и массы.

Реальные значения этих величин значительно ниже. Так, электрический заряд, локализованный в такой малой области, должен сильно заполяризовываться. Если полагать, что и к данному случаю имеет отношение известная формула Ландау /3/ , связывающая полный заряд $\varepsilon$ с эффективным зарядом $e$ , до которого заряд уменьшается вследствие поляризации вакуума, то

$$e^2 = \frac{\varepsilon^2}{1+\nu\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m_e}\right)^2}, \tag{13}$$

где $m_e$ - масса электрона , $\nu$ - число различных видов рождающихся пар, а $\Lambda$ - предельное значение параметра , связанного с областью локализации заряда. При $\varepsilon^2\nu \ln\left(\frac{\Lambda}{m_e}\right)^2 \gg 1$ выражение (13) принимает вид

$$e^2 \to \frac{1}{\nu \ln\left(\frac{\Lambda}{m_e}\right)^2}. \tag{14}$$

Любопытно, что в ранее полученном выражении (8) присутствует тот же характерный логарифм, что и в формуле Ландау. Только в формуле (8) конкретизируется вид параметра $\Lambda$ , а именно оказывается , что

$$\Lambda = \frac{e}{r_e} \sim \frac{10^{-27}}{c^2}\,cr. \tag{15}$$

В формуле (8) $\Lambda$ принимает примерно то значение , которое обсуждается в работе Ландау в связи с гипотезой о возможной роли гравитации в теории элементарных частиц. В нашем случае значение параметра $\Lambda$ раскрывается естественным образом автоматически. Интересно, что формула (8) и формула (14) получены из совершенно различных соображений и различными математическими путями.

Согласно (14), конечное значение заряда системы также не зависит от его начального значения $\varepsilon$ и оно может быть близко к заряду электрона. При $\varepsilon \to 0$ метрика закрывается. Такой объект, такую систему мы называем "фридмоном".

Что касается пространственных размеров системы, то выражение (II) в сущности дает классическую "сердцевину" объекта, вокруг которой должна возникать своеобразная "атмосфера", состоящая из различных элементарных частиц.

Дело в том, что при $e_f \gtrsim 137e$, когда частицы рожденных пар перестают "падать" на заряженный центр, соответствующие заряды заполняют соответствующие орбиты вокруг заряженного центра.

Радиусы первой боровской орбиты оцениваются в виде

$$r_{b} \sim \frac{\hbar}{me_f e}. \qquad (16)$$

Если в связанном состоянии нет стабильных частиц тяжелее нуклонов, то наиболее плотная "атмосфера" фридмона находится на расстоянии $10^{-14}-10^{-13}$ см от сердцевины объекта. Если эта картина верна, то между радиусами электростатического фридмона $10^{-30}-10^{-15}$ см должно быть пустое пространство.

Мы видим, таким образом, что внешние размеры фридмонов должны быть порядка размеров адронов.

Что касается массы фридмона, то соотношение

$$m_f \leq \frac{e}{\sqrt{\varkappa}} \sim 10^{-6} \text{gr} \qquad (17)$$

дает лишь верхнюю оценку.

Более того, соотношение (17) можно рассматривать как соотношение, дающее соответствующую оценку для предельно большой массы микроскопической частицы(элементарной частицы вообще). Если микроскопические частицы такой предельной массы существуют("максимоны"), то они могли бы играть роль кварков: при этих массах гравитационные силы, действующие между ними, достаточны для образования систем с дефектом масс, сравнимым с массами этих частиц /4/.

Нами рассмотрена система , которая является источником электрического поля , будем говорить электростатический фридмон. Но соответствующие фридмоны возникают в любых других векторных полях.

Так, янг-миллсовский /5/ фридмон будет иметь соответствующую массу

$$m_Y^f < \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa}} \sim 10^{-5/2} m_p , \qquad (18)$$

где $m_p$ - масса протона,

т.е. массу меньше десяти электронных масс, если взять возможную оценку $\mu$ из статьи Янга-Ли /6/.

Оценка массы $\rho$ - мезонного фридмона дает верхнее значение массы, более высокое, чем для электростатического фридмона.

$$m_\rho^f \leq \frac{g}{\sqrt{\varkappa}} . \qquad (19)$$

Невекторные поля, вернее, поля, в которых нет различия частиц и античастиц (например, скалярное поле), не мешают образованию замкнутой метрики .

Более того, комбинированные поля , например, электромагнитное и скалярное , уменьшают полную массу фридмона , так как соответствующие выражения для массы фридмона имеют вид: /7/

$$m^f \leq \sqrt{\frac{e^2 - G^2}{\varkappa}} , \qquad (20)$$

где $G$ – константа взаимодействия со скалярным полем.

Таким образом , масса фридмона может сильно варьироваться. Она может быть очень малой, если кроме электрического поля имеются в наличии другие поля, которые дают отрицательный вклад в собственную энергию их источника. Таким свойством обладают, например, скалярное поле и,по-видимому , некоторые варианты четырехфермионных взаимодействий.

Более того, в квантовой релятивистской теории в случае электродинамики, когда классическая линейная зависимость заменяется логарифмической , соответствующий логарифм,мы видели (I3),может обрезаться на длинах порядка (I5), что ведет к электромагнитной массе порядка массы электрона.

Таким образом, в рамках общей теории относительности могут реализовываться системы с микроскопическими значениями параметра, близкими к параметрам т.н. элементарных частиц.

Поражает автоматизм в образовании таких систем с внешними микроскопическими параметрами.

Хотелось бы обратить внимание на то, что существует автоматизм образования фридмонных ансамблей одинаковых частиц.

Если бы господь бог по своему произволу начал творить вселенные с критической плотностью материи,вселенные, различные по числу галактик, по полному электрическому заряду, то через некоторое время творец увидел бы вместо различных вселенных ансамбль тождественных микроскопических частиц – фридмонов. С этой точки зрения Вселенная может во внешней системе координат представлять собой элементарную частицу. Элементарная частица внутри себя за пределами ее внешних размеров может представлять собой вселенную, содержащую необозримое число галактик. Являются ли фридмоны новым классом частиц микромира или и другие элементарные частицы в какой-то мере родственны фридмонам?

В последнем случае возникала бы возможность общего теоретического подхода как к элементарным частицам, так и к Вселенной. Но независимо от последних замечаний данная система - фридмон может рассматриваться как своеобразная модель для "протяженной" частицы, как объект со своеобразным формфактором, возможным только в рамках общей теории относительности.

## § 2. Фридмон, как феноменологическая модель частицы, свободной от расходимостей

Метрика внешнего пространства электрического фридмона в координатах Нордстрема-Рейсснера записывается в виде:

$$ds^2 = \Phi\, dt^2 - \Phi^{-1} dr^2 - r^2 d\sigma^2 , \tag{21}$$

где

$$\Phi = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{22}$$

при

$$r_0 = \frac{\sqrt{\varkappa}\, e}{c^2} = \frac{\varkappa m_0}{c^2} . \tag{23}$$

Здесь $m_0$, $e$ - полная масса и полный электрический заряд системы.

Очень своеобразный вид метрики возникает в изотропных координатах

$$ds^2 = \Psi^{-1} d\tau^2 - \Psi \left( dR^2 + R^2 d\sigma^2 \right), \tag{24}$$

где

$$\psi = \left(\frac{R+r_0}{R}\right)^2. \tag{25}$$

В изотропных координатах уравнение для электростатического потенциала принимает вид:

$$\left(R+r_0\right)^2 \frac{\partial\varphi}{\partial R} = const = e \tag{26}$$

или

$$\varphi = \frac{e}{R+r_0}. \tag{27}$$

Таким образом, потенциал в нуле ( $R =$ 0) конечен

$$\varphi_{R=0} = \frac{e}{r_0} = \frac{c^2}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{28}$$

Вычисление полной энергии в ОТО встречает известные трудности, так как четырехмерный вектор энергии импульса в ОТО не является хорошо определенной величиной. Если взять известное определение Møller'a, согласно которому /8/ энергия $E$ имеет в изотропных координатах вид:(8):

$$E = \frac{c^2}{\varkappa 4\pi}\int_S h R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{29}$$

при $R = const \to \infty$, где $h = -\frac{d\psi}{dR}\left(\frac{1}{\psi^2}\right)^{1/2} = \frac{2r_0}{R(R+r_0)}$

$$\text{т.е.} \quad \frac{E}{c^2} = \frac{2r_0 R}{\varkappa(R+r_0)} \sim \frac{2r_0}{\varkappa} = 2\frac{e}{\sqrt{\varkappa}}. \tag{30}$$

- энергия конечна в согласии с изложенной выше теорией фридмона.

Существенно подчеркнуть, что в изотропных координатах фридмон, метрика которого дается выражением (24), является точечным объектом.

В этих координатах при $R \to 0$ компонентны фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ имеют особенность, но эта особенность не сказывается на значении физических величин: электрического потенциала и полной энергии.

Изотропные координаты удобны для внешнего описания фридмона, в частности, поведения его во внешних полях как точечного объекта. Любопытно отметить, что в координатах Нордстрема-Рейсснера (2I) в отличие от изотропных координат (24) фридмон неточечный.[x]

Здесь потенциал имеет вид:

$$\varphi = \frac{e}{r},$$

но $r$ меняется только от $r = \infty$ до $r = r_0 = \frac{e\sqrt{\varkappa}}{c^2}$ и в точке $r = r_0$ потенциал принимает значение

$$\varphi_{r=r_0} = \frac{e^2}{\sqrt{\varkappa}},$$

т.е. то же максимальное значение, которое достигается в изотропных координатах при $R = 0$.

Хотелось бы подчеркнуть то обстоятельство, что рассматриваемый объект (фридмон), взятый сам по себе, представляет собой удовлетворительную во многих отношениях модель протяженной заряженной частицы.

---

x) Возможность объекту быть точечным или протяженным в ОТО в зависимости от используемых координат указана в работе 9. Работы Arnowitt'a, Deser'a и Misner'a /9/ и O.Klein'a /9'/ очень существенны для понимания различных сторон обсуждаемых здесь проблем. В этой связи см. также М.А. Марков : "Closed universe .." препринт ОИЯИ Д2-4534, Дубна, 1969г.

Так как рассматриваемый протяженный объект описывается решениями релятивистских уравнений с локальными взаимодействиями, то в данном случае по определению не могут возникнуть трудности обычной нелокальной теории - нарушение причинности и пр.

С некоторой точки зрения при описании данного "протяженного" объекта (фридмона) возникает формфактор. Но благодаря соответствующему изменению метрики вблизи заряда сигнал распространяется со скоростью, меньшей скорости света.

Так, в изотропных координатах, согласно формуле (24), скорость света даётся в виде

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{R}{R+r_0}\right)^2 c \tag{31}$$

и

$$\frac{dR}{dt} \xrightarrow[\text{при } R\to 0]{} 0 .$$

Трудности, подобные трудностям нелокальной теории, возникают и при попытке строить соответствующую нелинейную теорию поля, свободную от расходимостей [10].

Были попытки так формально переопределить метрику, чтобы в нелинейных теориях такого вида получить в согласии с принципом причинности соответствующую скорость распространения сигнала [11, 12]. В этих попытках речь шла о специальных примерах, иллюстрирующих ситуацию, но в общем в рамках современной теории, взятых ad hoc. Модель, о которой идет речь в данном случае (фридмон), описывается полностью в рамках современной теории. Более того, если угодно, можно подчеркнуть, что в данном случае идет речь о нелинейной теории - так как часть совместных уравнений ( уравнения Эйнштейна) представляют собой систему нелинейных уравнений.

В принципе, исключая $g_{\mu\nu}$ из системы уравнений Эйнштейна-Максвелла, мы должны для электромагнитного поля получить действительно нелинейное уравнение x/.

Хотелось бы также напомнить , что имеется еще одна трудность для попыток чисто электромагнитного толкования массы источника электрического поля.

Как известно, в этом случае полный импульс электромагнитного поля заряда, движущегося с постоянной скоростью $v$ , равен

$$\bar{p} = 4/3 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{U_0}{c}. \qquad (32)$$

Коэффициент 4/3 появляется потому, что при подсчёте полного импульса поля движущегося заряда , кроме $T^0_{44}$ дает свой вклад добавочный член $T^0_{11}$ , обусловленный максвелловскими напряжениями. Коэффициент 4/3 в свое время широко обсуждался и считался некоторое время назад главным препятствием для построения электромагнитной теории массы частиц. Считалось, что кроме сил электромагнитных необходимо вводить силы неэлектромагнитного происхождения (в рамках линейных теорий),

---

x/Можно вычислить формальный формфактор,который в Эвклидовом пространстве дает тот же вид электростатического потенциала. Фролов получил для соответствующего форм-фактора в пространстве импульса выражение

$$C(k) = 1 + r_0 k \left[ Ci(r_0 k) \sin(r_0 k) - \cos(r_0 k)\, Si(r_0 k) \right].$$

С этим форм-фактором логарифмически расходящееся выражение для собственной энергии электрона Дирака принимает вид:

$$E_{el} \sim m_e c^2 \frac{\alpha}{\pi} \left( 3/2 \ln \frac{e}{\hbar c} \cdot m_e + \gamma \right),$$

т.е. $E_{el}$ в пределах порядка равно доле электронной массы. Конечно,подобные оценки могут быть получены и в ряде других эффектов, но здесь содержится гипотеза,что такой способ оценок окажется достаточно хорошим приближением, ибо теория с формфактором в Эвклидовом пространстве сама по себе не является последовательной.

которые должны гасить эти максвелловские напряжения.
В данной модели эту роль выполняют гравитационные силы.

Надо также подчеркнуть, что в данном рассмотрении речь идет о классической теории источника электрического поля, свободной от расходимостей.

## § 3. О фридмонном характере промежуточных состояний в квантовой теории.

Возникает вопрос, является ли фридмон феноменологической моделью в известном смысле протяженной частицы, теория которой свободна от расходимостей, или фридмонная ситуация реализуется сама собой при учёте разумным образом гравитации в теории элементарных частиц?

Произведем некий качественный анализ гравитационной ситуации, которая возникает в промежуточном состоянии, когда частица испускает какой-то квант энергии.

При испускании любой частицей кванта энергии с полной массой $m_0$ в виртуальном состоянии эта масса на основании соотношения неточностей локализована в области $r$ так, что

$$m_0 \sim \frac{\hbar}{rc} . \tag{33}$$

Другими словами, в данный момент вокруг частицы возникает виртуальная масса с плотностью не менее, чем

$$\rho \sim \frac{m_0}{r^3} \sim \frac{\hbar}{cr^4} . \tag{34}$$

В ньютонианском приближении учёт гравитационного дефекта массы дает выражение для полной массы в виде:

$$m_{tot} = m_0 - \frac{\varkappa m_0^2}{2c^2 r} \quad \text{или} \quad m_{tot} = \frac{\hbar}{rc} - \frac{\varkappa \hbar^2}{r^3 c^5} . \tag{35}$$

Полная масса обращается в нуль при

$$r \sim \sqrt{\frac{\hbar \varkappa}{c^3}} , \tag{36}$$

т.е. при полной массе кванта

$$m \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{\varkappa}} \sim 10^{-5} \, gr , \tag{37}$$

но при $r \to 0$ соотношение (35) дает для $m_{tot} \to -\infty$ .

Эта расходимость возникает в результате очень грубого приближения в теории гравитации, нарушающего фундаментальное свойство материи, именно равенство инертной и гравитационной масс /9/.

Любое приближение в теории гравитации , которое сохраняет равенство инертной и гравитационной масс ,будет свободно от данной расходимости.

Например, если соотношение (35) переписать в виде (9), где удержано равенство инертной и гравитационной масс

$$m = m_0 - \frac{\varkappa}{2c^2} \frac{m^2}{r} , \tag{38}$$

то при $r \to 0$ полная масса стремится также к нулюx/:

$$m = \varkappa^{-1} \left[ -rc^2 + \left( r^2 c^4 + 2\varkappa m_0 r c^2 \right)^{1/2} \right] \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

В строгой классической теории Эйнштейна не может возникнуть отрицательная масса как результат гравитационного взаимодействия (гравитационного дефекта данной системы).

x/ При $r \sim \sqrt{\frac{\hbar \varkappa}{c^3}}$, $m \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{\varkappa}}$ как и в ньютонианском приближении.

С точки зрения общей теории относительности ситуация иллюстрируется таким образом, что с увеличением испускаемого кванта увеличивается отклонение от эвклидовой метрики. И когда плотность энергии в соответствующем пакете становится близкой к критической , система представляет собой мир с закрытой метрикой, полная масса которого, как известно, равна нулю.

Закрытый мир Фридмана дается метрикой (I), где положим $c\,dt = a\,d\ell$

Так как предыдущие оценки показывают, что речь идет об энергия кванта или его массе $10^{-4} - 10^{-6}\,gr$, т.е. массе , по сравнению с которой собственными массами всех известных элементарных частиц можно пренебречь, то в этом ультрарелятивистском случае следует полагать давление

$$p = \frac{\varepsilon}{3}, \tag{39}$$

где $\varepsilon$ - плотность энергии.

Известное термодинамическое соотношение

$$-\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} = 3\,\frac{da}{a} \tag{40}$$

для плотности "голой" энергии $\varepsilon$ дает выражение

$$\varepsilon = \frac{B}{a^4}, \tag{41}$$

где $B$ - константа.

Уравнение Эйнштейна запишется теперь в виде

$$\frac{8\pi\varkappa}{3c^4}\,\varepsilon = \frac{\varkappa B}{3a^4c^4} = \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{da}{d\ell}\right)^2\frac{1}{a^2} + 1\right]. \tag{42}$$

В момент максимального расширения мира ( размеры, допускаемые соотношениями Гайзенберга)

$$\frac{8\pi\varkappa}{3c^4}\,\mathcal{E} = \frac{1}{a_0^2}, \tag{43}$$

$a_0$ – радиус данного мира в момент его максимального расширения

или

$$\mathcal{E} = \frac{3c^4}{8\pi\varkappa a_0^2}. \tag{44}$$

Полная "голая" масса

$$M_0 c^2 = \int \mathcal{E}\, dV = \frac{3}{4}\pi c^4 a_0$$

$$M_0 c^2 = \hbar\nu_0\,, \quad \hbar\nu_0 = \frac{\hbar c}{\lambda} = \frac{3}{4}\,\frac{\pi c^4 a_0}{\varkappa} \tag{45}$$

при $a_0 \sim \lambda\,;\quad \lambda \sim \sqrt{\dfrac{\hbar\varkappa}{c^3}}$

$$\text{и} \quad M_0 \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{\varkappa}}. \tag{46}$$

Таким образом , учитывая соотношение неточностей Гайзенберга в локализации испускаемой энергии в промежуточном состоянии, мы приходим к выводу, что энергетическая ситуация в промежуточном состоянии при испускании кванта

$$\frac{h\nu}{c} \approx M_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{\varkappa}}.$$

носит фридмонный характер, что нейтральная материя , локализованная с такой плотностью, ведет к закрытой метрике с эффективной внешней массой, равной нулю.

Поэтому квант с энергией $\hbar\nu \leq M_0 c^2 = c^2\sqrt{\frac{\hbar c}{\varkappa}}$ является предельным значением кванта в промежуточном состоянии, которое может вносить реальный максимальный вклад при подсчёте собственной энергии электрона[x)]

---

x) Соответствующие **длины**, о которых шла речь в классической электродинамике, это (23): $r_0 = \frac{e\sqrt{\varkappa}}{c^2}$, в векторной мезодинамике **нейтральных,** например, $\rho$-мезонов (I9):

$$r_\rho = g_\rho \frac{\sqrt{\varkappa}}{c^2}$$

и в квантовой электродинамике (36) возникает, **как мы видели,**

$$r = \sqrt{\hbar c}\,\frac{\sqrt{\varkappa}}{c^2}\,.$$

Все эти длины находятся в пределах одного порядка. Обращает на себя внимание близость величин $g_\rho$ и $\sqrt{\hbar c}$. Не исключено, что близость значений, например, $\rho$-мезонного заряда $g_\rho$ и $\sqrt{\hbar c}$ не случайна, что может быть в последовательной теории окажется

$$g_\rho = \sqrt{\hbar c}\,.$$

## § 4. Квантово-механическая трактовка проблемы

Можно пойти по формальному пути включения гравитации в современный формализм теории поля.

Один из способов построения в этом смысле общего формализма в теории элементарных частиц - это присоединить к системе уравнений элементарных частиц уравнения гравитации Эйнштейна, записанные для эвклидова пространства в форме Гупты [13].

Как известно, уравнения гравитационного поля Эйнштейна могут быть переписаны в плоском пространстве в виде

$$\Box^2 \gamma_{\mu\nu} = \varkappa\, \theta_{\mu\nu} \;; \quad \theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu} \tag{47}$$

с дополнительным условием $\dfrac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$ (48)

Следовательно, $\dfrac{\partial \theta_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0$,

где $T_{\mu\nu}$ - тензор энергий всех рассматриваемых полей; $t_{\mu\nu}$ - псевдотензор энергии гравитационного поля. В Эвклидовом пространстве по отношению к преобразованиям Лоренца $t_{\mu\nu}$ ведет себя как тензорная величина.

Такая простота записи исходных нелинейных уравнений является кажущейся, т.к. $t_{\mu\nu}$ представляет собой бесконечный ряд по гравитационной константе, т.е. соответствующий лагранжиан также дается бесконечным рядом. Интеграл правой части уравнения, записанный в Эвклидовом пространстве, дает в статическом случае полную инертную массу объекта.

$$\frac{1}{c^2}\int \theta_{00}\, dV = m \,. \tag{49}$$

Мы рассматриваем , пользуясь терминологией О Т О, островной характер распределения материи , - материю, локализованную в форме частиц, имеющих полную массу, отличную от нуля. В этих случаях обязательно имеется внешнее, вообще говоря, шварцшильдовское решение с гравитирующей полной массой $m$ .

Другими словами, подинтегральное выражение (49) должно быть также функцией гравитирующей массы x/ .

Уравнение (49) представляет собой уравнение для определения массы $m$

$$\frac{1}{c^2}\int \theta_{00}^{(m)}\, dV = m . \tag{50}$$

Пока речь идет о классике.

Но уравнения в форме Гупты удобны для квантования, правда, приспособленному к теории возмущения по гравитационной константе.

На данном этапе рассмотрения нам не столь важно , насколько данное приближение количественно правильно описывает явления, сколько то обстоятельство, что данное приближение сохраняет равенство инертной и гравитационной массы , если оно его сохраняет x/.

Если дана квадратичная форма в виде

$$ds^2 = \sum_0^3 g_{\mu\mu}\, dx^{\mu\,2} ,$$

---

x/ В простом классическом случае это , например, квадратное уравнение для определения $m$ (см.формулу (38) ). Рассматривая приближенное уравнение (статический случай (47): $\nabla^2 u = m_0\,\delta(\vec r)(1+\frac{u}{c^2}) = m\,\delta(\vec r)$ как "точное", т.е. полагая $u = -\frac{\varkappa m}{r}$ , а не $-\varkappa m_0/r$, мы получаем $m_0\left(1-\frac{\varkappa m}{c^2\varepsilon}\right)_{\varepsilon\to 0} = m$ или $m = \frac{m_0 c^2\varepsilon}{c^2\varepsilon+\varkappa m_0} \xrightarrow[m_0\varepsilon\to 0]{} 0$ . Выражение (38) возникает , если $1+\frac{u}{c^2}$ рассматривать как первые члены более точного выражения: $1+u/c^2 \sim 1/\left(1-\frac{u}{c^2}\right)$ .

то уравнение Дирака, согласно Фоку /4/, записывается таким образом:

$$-i\hbar \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\alpha_\mu}{\sqrt{g_{\mu\mu}}} \left[\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \psi + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\lg \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{\mu\mu}}}\right)\psi\right] + mc\alpha_0\psi = 0. \tag{51}$$

Соответствующий член энергии взаимодействия электромагнитного поля с электроном имеет вид:

$$T_{\mu\mu} \sim e\,\frac{A_\mu \bar{\psi} \alpha_\mu \psi}{\sqrt{g_{\mu\mu}}}, \tag{52}$$

Для

$$T_{00} \sim e\,\frac{A_0 \bar{\psi} \alpha_0 \psi}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{53}$$

В методе квантования Гупты полагается

$$g_{\mu\mu} = 1 - \varkappa\,\gamma_{\mu\mu}$$

или

Следовательно, $$T_{00} \sim \frac{e A_0 \bar{\psi} \alpha_0 \psi}{1 - \frac{1}{2} f \gamma_{00} - \frac{1}{8} f^2 \gamma_{00}^2 + \dots} \tag{54}$$

Регуляризирующий характер взаимодействия такого типа недавно исследовался в работах P.Budini и G.Caluoci 15; A.Salama, J.Strathdee 16/.

Авторы исходят из формальных аппаратных наблюдений, что вводимая нелинейность взаимодействий может играть регуляризирующую роль I7

Но формальное рассмотрение задачи без ясной наглядной физической идеи, почему гравитация должна играть роль регулирующего поля и какие требования приближения эту роль сохраняют, не создает уверенности, что отрицательный или положительный результат не является лишь результатом данного приближения, что возникает он лишь в результате суммирования может быть очень большого, но всегда неполного числа граф Фейнмана.

Несколько лет тому назад в интересной работе B.S.De Witt'a[18] поставлен вопрос:

Gravity A Universal Regulator?

В лестничном приближении на основе уравнения Бете-Солпитера получено конечное значение собственной электромагнитной энергии скалярной частицы. В этой же работе получено смещение пропогатора

$$\frac{1}{\chi^2} \to \frac{1}{\chi^2-\lambda^2}, \tag{51}$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar \varkappa}{c^3}}$ обязанное гравитации , обеспечивающее сходимость прежде расходящихся величин. Но неуверенность в законности ряда сделанных приближений не дала автору сделать утвердительное заключение. Это рассмотрение De Witt'a только могло инициировать вопрос.

Мы ищем физического понимания регуляризирующей роли гравитационного поля.

Дело в том, что собственная энергия источника гравитационного поля отрицательна. Поэтому в системе полей, которые дают положительный вклад, гравитация в принципе может играть роль реалистического регуляризатора.

Гравитационное поле создает дефект масс, который должен быть учтен в общем энергетическом балансе системы.

Задача формализма - учесть гравитационный дефект масс так, чтоб сохранить в силе в рассматриваемых приближениях фундаментальный принцип - равенство инертной и гравитационной массы[x].

В начале доклада было выдвинуто положение, что если в формализме современной теории элементарных частиц естественным оказывается образ точечной частицы, то в общей теории относительности естественно возникает образ протяженной частицы.

Это положение хотелось бы несколько пояснить далее.

Дело в том, что точечность частицы задается в формализме соответствующей $\delta$-функцией. Физически $\delta$- функция понимается как предел некоторого распределения плотности при стягивании, допустим, его пространственных размеров в точку.

Если нам задана какая-то функция плотности материи и мы начинаем стягивать это распределение во все меньшую и меньшую область, то плотность материи в этой системе увеличивается.

Как бы ни была мала начальная масса объекта при некоторых неточечных размерах, плотность вещества станет равной критической, при которой возникает закрытая метрика в случае нейтральной материи и почти закрытая метрика в случае, например, электрического заряда, т.е. возникает электростатический фридмон, т.е. объект, имеющий внешние размеры и, вообще говоря, внутреннюю структуру. Классическое описание

---

[x] В противном случае возникает бесконечно большой дефект масс: так будет во всех случаях, когда правая часть уравнения(47), вернее, содержащиеся в нем $\gamma_{\mu\nu}$ строятся в явном виде на основании разложения по $\varkappa$, а не находятся из формально написанного в данном "приближении" нелинейного уравнения.

объекта в его внутренней части дается почти фридмановской метрикой, его внешняя метрика является метрикой типа Крускала, или даже нордстрём-рейсснеровкой.

Другими словами, в последовательном квантово-механическом формализме, описывающем электродинамику в рамках общей теории относительности, переход к классической физике необходимо должен давать для, допустим, электрона, образ классического фридмона.

Но тот формальный аппарат в виде системы уравнений Эйнштейна и, допустим, Максвелла и Дирака, о котором шла речь выше, приводит при $\hbar \to 0$ к метрике Нордстрема-Рейсснера при $e \neq 0$ или к метрике Шварцшильда при $e = 0$ и $m \neq 0$. Но, как известно, метрика Шварцшильда не дает полного пространственно-временного описания объекта - эта метрика содержит фиктивные полюса на гравитационном радиусе.

Полное же описание объекта дается, как известно, в координатах типа Крускала.

Физическая интерпретация координат Крускала дана И. Новиковым /19/, согласно которому соответствующая полная метрика внутри частицы дается метрикой Фридмана, которая через горловину переходит во внешнюю метрику, эвклидову на бесконечности.

Последние замечания свидетельствуют о том, что квантово-механическая трактовка в форме уравнений (47),(51), хотя возможно, и может давать в некоторых приближениях результаты, свободные от расходимостей - это описание, по-видимому, не может являться исчерпывающим.

## Литература:


I. Л.Л. Ландау и Е.М. Лифшиц
Теория поля "Наука" Москва 1967 г., стр. 434.

2. М.А. Марков и В.П. Фролов
Теоретическая и математическая физика 3, № I, 1970.

3. L.D. Landau, Niels Bohr and Development of Physios, Pergamon Press. London, 1955, 52.

4. М.А. Марков, ЖЭТФ, 51, 878 (1966).

5. C.N. Yang and R.L. Mills. Phys.Rev., 96, 191 (1954).

6. T.D. Lee, C.N.Yang, Phys.Rev., 98, 1501 (1955).

7. Р.А. Асанов и М.А. Марков.Письма ЖЭТф, 5,вып.II,417 (1967).

8. P.S. Florides. Proc.Camb.Soc., 58, 102 (1962).

9. R.Arhowitt, S.Deser and C.Misner, Ann.of Phys., 38, 88 (1965); Phys.Rev., 120, 313-324 (1960)

9'. O. Klein, в книге "Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit", Braunschweig, 1961.

10. Д. Блохинцев, В. Орлов, ЖЭТФ, 25, 503, (1953).

11. Д. Блохинцев, ДАН 68, 774 (1956).

12. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу
Математическая и теоретическая физика 2, № I, 1970 г.

13. S.N.Gupta. Rev.Mod.Phys., 29, 334 (1957).

14. В.А. Фок, Некоторые идеи применения идей Лобачевского в механике и физике Г.И.Т.Т.Л Москва 1950 г. стр. 57,
В. Огиевецкий и И. Полубаринов Ann.Phys., 25, 358 (1963).
В. Огиевецкий и И. Полубаринов Дубна, Препринт ОИЯИ Р-1890, Дубна, 1964.

I5. P.Budini and G.Calucci Препринт Trieste IC /70/ 37.

I6. A.Salam and J.Strathdee Препринт Trieste IC /70/38.

I7. G.V.Efimov, JETP, I7, I4I7 (I963).
E.S.Fradkin, Nucl.Phys., 49, 6I4 (I963).
M.K.Volkov, Ann.Phys., 49, 202 (I968).

I8. B.S.DeWitt. Phys.Rev.Lett., I3 (I964) II4

I9. Я.Зельдович и И.Д.Новиков
Релятивистская Астрофизика
Изд-во "Наука" Москва I967г. стр. 4I5.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июля I970 года.

ванная с такой плотностью, ведет к закрытой метрике с эффективной внешней массой, равной нулю.

Поэтому квант с энергией $\hbar\nu \leq M_0 c^2 = c^2\sqrt{\frac{\hbar c}{\varkappa}}$ является предельным значением кванта в промежуточном состоянии, которое может вносить реальный максимальный вклад при подсчёте собственной энергии электрона[x)]

---

[x)]Соответствующие длины,о которых шла речь в классической электродинамике ,это (23): $r_0 = \frac{e\sqrt{\varkappa}}{c^2}$, в векторной мезодинамике **нейтральных,** например, $\rho$ -мезонов (I9):

$$r_\rho = g_\rho \frac{\sqrt{\varkappa}}{c^2}$$

и в квантовой электродинамике (36) возникает, **как мы видели,**

$$r = \sqrt{\hbar c}\,\frac{\sqrt{\varkappa}}{c^2}\,.$$

Все эти длины находятся в пределах одного порядка. Обращает на себя внимание близость величин $g_\rho$ и $\sqrt{\hbar c}$. Не исключено, что близость значений, например, $\rho$ -мезонного заряда $g_\rho$ и $\sqrt{\hbar c}$ не случайна, что может быть в последовательной теории окажется

$$g_\rho = \sqrt{\hbar c}\,.$$