ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 5284

В.М. Дубовик, А.А. Чешков

ИЗЛУЧЕНИЕ ТОРОИДНЫМИ МОМЕНТАМИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ (II)

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

Р2 - 5284

В.М. Дубовик, А.А. Чешков

ИЗЛУЧЕНИЕ ТОРОИДНЫМИ МОМЕНТАМИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ (II)

Направлено в ЖЭТФ

Эта работа является логическим продолжением [1] (1), ибо, выделив тороидные моменты в мультипольном разложении тока, естественно задать вопрос, излучают они или нет. На первый взгляд, может показаться, что тороидные моменты не должны излучать, так как мультипольное излучение может быть лишь двух типов - электрического и магнитного. Мы покажем, однако, на основании общих рассуждений (§1), что тороидные моменты создают поле излучения электрического типа. Далее (§2) будет найдено поле излучения точечного тороидного тока. В заключение (§3) будет найден вектор-потенциал электромагнитного поля, создаваемого произвольным током (набором мультипольных моментов всех типов и всех рангов).

§1. Калибровка электромагнитного потенциала и тока и излучение тороидных моментов

Волновое уравнение для случая излучения электромагнитного поля имеет вид

$$\Delta \vec{A} - \ddot{\vec{A}} = -\vec{J} \qquad (c = 1). \tag{1}$$

Попробуем использовать условие поперечности электромагнитной волны в виде:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \qquad (2)$$

Тогда, как и требуется, вектор станет двухкомпонентным (спиральность фотона $\lambda = \pm 1$), в то время как в правой части уравнения (1) трехкомпонентный вектор $\vec{J}$ должен определяться тремя семействами параметров. Казалось бы, из этого можно сделать вывод, что представители одного из семейств - тороидные моменты - не излучают, поскольку, как известно, зарядовые и магнитные моменты создают электромагнитные поля электрического и магнитного типа соответственно. Однако уравнение (1) на самом деле описывает потенциал не поля излучения, а потенциал поля при наличии источников, когда кулоновская калибровка (2) некорректна (см., например, /2/).

Если мы все же хотим, несмотря на присутствие источников поля, выделить только поперечную часть его (поле излучения), мы, очевидно, должны взять в (1) лишь поперечную часть и от вектора тока $\vec{J}$, т.е. наряду с кулоновской калибровкой вектор - потенциала $\vec{A}$ в правой части (1) выделить лишь $\vec{J}_{\perp}$, наложив условие

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0. \qquad (3)$$

Тогда как потенциал, так и источник поля излучения будут определяться двумя наборами параметров. Однако у нас имеется еще одно необходимое условие, вытекающее из уравнений Максвелла - условие непрерывности тока, из которого при требовании (3) вытекает:

$$\dot{\rho} = 0, \qquad (4)$$

т.е. зарядовые мультипольные моменты статичны и не создают поля излучения. Другими словами, в поперечной излучающей части тока, определяемой двумя семействами независимых параметров, в рассматриваемом случае отсутствуют зарядовые мультипольные моменты. Следовательно, излучение электрического типа при такой постановке задачи может определяться тороидными мультипольными моментами. В §3 мы найдем явное выражение для потенциала излучения тороидных моментов.

На самом деле известно, что система зарядов способна излучать, и, приравнивая $\operatorname{div}\vec{J} = 0$, а тем самым $\dot{\rho} = 0$, мы рассмотрели частный случай системы зарядов и токов, излучающих электрические и магнитные мультиполи. Однако кажется вообще парадоксальным, что зарядовые мультипольные моменты излучают, так как из-за непрерывности тока они входят только в продольную (неизлучающую) часть тока. На этот парадокс впервые указали Френч и Шимамото [3] (см. также [2], стр. 71). Суть дела заключается в том, что мультипольная параметризация плотности тока есть представление произвольного (неограниченного в пространстве) тока[x] в виде суммы ограниченных δ-образных токов, а для каждого ограниченного в пространстве распределения условие исчезновения на границе полного тока означает сокращение продольной и поперечной его частей:

$$J_{\perp} + J_{||} = 0, \qquad J_{\perp} = -J_{||} . \qquad (5)$$

[x] С единственным условием достаточно быстрого спадания на бесконечности.

Благодаря этому обстоятельству зарядовые (кулоновские) моменты, связанные из-за сохранения тока лишь с продольной (неизлучающей) частью тока, попадают в поперечную часть и "начинают" излучать.

Итак, мы пришли к выводу, что за излучение электрического типа ответственны два вида мультипольных моментов – зарядовые и тороидные. Сумму этих моментов с соответствующими коэффициентами называют обычно (поперечными) электрическими мультипольными моментами /4/. При рассмотрении конкретных задач не следует, однако, забывать, что эти моменты являются суммой двух независимых с физической точки зрения моментов.

Проиллюстрируем изложенное на примере излучения, создаваемого точечным тороидным током.

§2. Излучение точечного тороидного диполя

Пусть плотность распределения источников поля имеет вид:

$$\rho = 0, \quad \vec{J} = \vec{J}(\vec{x})e^{-i\omega t}. \qquad (5)$$

Так как зарядовая плотность равна нулю, то на вектор-потенциал $\vec{A}$ можно наложить условие калибровки (2) при равном нулю скалярном потенциале. Тогда создаваемое распределением (5) электромагнитное поле будет описываться уравнением (1), имеющим известное решение в виде запаздывающего потенциала:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}',t-(\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'. \qquad (6)$$

Подставим в (6) плотность распределения тока (5) и разложим функцию Грина по степеням x' в точке x $(|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|)$. Разобьем далее низшие тензоры на симметричные и антисимметричные части и используем соотношения:

$$\int J_i \, d^3x = 0, \tag{7а}$$

$$\int (x_i J_k + x_k J_i) \, d^3x = 0, \tag{7б}$$

$$\int (x_i x_k J_\ell + x_\ell x_i J_k + x_k x_\ell J_i) \, d^3x = 0, \tag{7в}$$

вытекающие из условия отсутствия зарядов (3). В результате с точностью до членов третьего порядка по v/c получим:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}_{M1}(\vec{x},t) + \vec{A}_{M2}(\vec{x},t) + \vec{A}_{E1}(\vec{x},t), \tag{8}$$

где $\vec{A}_{M1}$ и $\vec{A}_{M2}$ – потенциалы излучения магнитного диполя и квадруполя соответственно, а $\vec{A}_{E1}$ – потенциал, создаваемый точечным тороидным диполем. Два первых потенциала имеют известный вид:

$$\vec{A}_{M1}(\vec{x},t) = \frac{i\omega}{4\pi x^2}[\vec{x} \times \vec{M}(t-x)] = \frac{i\omega}{4\pi x^2}[\vec{x} \times \vec{M}_0] e^{i\omega(t-x)}, \tag{9}$$

где магнитный момент определен как обычно

$$\vec{M}_0 = \frac{1}{2} \int [\vec{x} \times \vec{J}\,] \, d^3 x \ , \tag{10}$$

и

$$[\vec{A}_{M2}(\vec{x}, t)]_i = \frac{\omega^2}{12\pi x^2} \epsilon_{i\ell j} \, x_j \, x_k \, M_{k\ell}(t - x) =$$

$$= \frac{\omega^2}{12\pi x^3} \epsilon_{i\ell j} \, x_j \, x_k \, M^{(0)}_{k\ell} \, e^{i\omega(t-x)}, \tag{11}$$

где магнитный квадрупольный момент имеет вид:

$$M^{(0)}_{k\ell} = \frac{1}{2} \int [\vec{x} \times \vec{J}\,]_k \, x_\ell + [\vec{x} \times \vec{J}\,]_\ell \, x_k \} \, d^3 x \ . \tag{12}$$

Потенциал поля электрического типа оказывается отличным от нуля, несмотря на условие $\rho = 0$. Если воспользоваться определением тороидного диполя, данным в (1):

$$\vec{T}_0 = \sqrt{\frac{1}{10}} \int [\,(3x^2 \vec{J} - \vec{x}\,(\vec{x}\vec{J}\,)] \, d^3 x \ , \tag{13}$$

то создаваемое им поле излучения выразится в виде:

$$\vec{A}_{E1}(\vec{x},t)=\frac{3\sqrt{10}\,\omega^2}{28\pi x^3}\{\vec{x}(\vec{x}\vec{T}(t-x))-x^2\vec{T}(t-x)\}=$$

$$=\frac{3\sqrt{10}}{28\pi}\frac{\omega^2}{x^3}\{x^2\vec{T}_0-\vec{x}(\vec{x}\vec{T}_0)\}e^{i\omega(t-x)}. \tag{14}$$

Если излучающая система устроена так, что не обладает магнитными моментами первого и второго ранга, а одним только тороидным дипольным моментом, как, например, тороидный ток, то излучение этой системы будет чисто электрического типа.

§3. Электромагнитный потенциал произвольной системы мультипольных моментов

Потенциал $A_\mu(\vec{x},t)$ системы зарядов и токов, заданных 4-вектором тока $J_\mu(\vec{x},t)$, определяется известной формулой:

$$A_\mu(\vec{x},t)=\int\frac{J_\mu(\vec{x}',t-|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'. \tag{15}$$

Если $J_\mu(\vec{x},t)=e^{-i\omega t}J_\mu(\vec{x})$ – то мультипольные распределения излучающей системы также обладают экспоненциальной временной зависимостью:

$$q_{\ell m}(k,t) = e^{-i\omega t}\, q_{\ell m}(k), \tag{16a}$$

$$m^{(\sigma)}_{\ell m}(k,t) = e^{-i\omega t}\, m^{(\sigma)}_{\ell m}(k). \tag{16б}$$

Потенциал поля излучения в этом случае равен:

$$A_\mu(\vec{x},t) = e^{-i\omega t} A_\mu(\vec{x}), \quad \text{где}$$

$$A_\mu(\vec{x}) = \int J_\mu(\vec{x}\,')\,\frac{e^{i\omega|\vec{x}-\vec{x}\,'|}}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\,d^3x'. \tag{17}$$

Для разложения потенциала поля излучения по мультиполям можно поступить аналогично Роузу [2]. Используя ортогональность коэффициентов векторного сложения:

$$\sum_{L,M} \langle \ell_1 m_1, \ell_2 m_2 | LM\rangle\langle LM | \ell_1 m_1', \ell_2 m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\,\delta_{m_2 m_2'} \tag{18}$$

и разложение функции Грина:

$$G(\vec{x},\vec{x}\,') = \frac{e^{i\omega|\vec{x}-\vec{x}\,'|}}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} = 2\pi^2 i\omega \sum_{\substack{\ell,m \\ x>x'}} \vec{F}^{\,*}_{\ell m\omega}(\vec{x}\,')\,\vec{\mathcal{H}}_{\ell m\omega}(\vec{x}), \tag{19}$$

где

$$\mathcal{H}_{\ell m\omega}(\vec{x}) = h_\ell(\omega x)\, Y^*_{\ell m}(\vec{n}),$$

$$h_\ell(a) = i^\ell H_{\ell+1/2}(a)/\sqrt{a} \tag{20}$$

($H_{\ell+1/2}(a)$ - функция Ганкеля), получим:

$$\delta_{\vec{n}\vec{n}'} G(\vec{x}, \vec{x}\,') = 2\pi^2 i\omega \sum_{\ell,m,\sigma} [F^{(\sigma)}_{\ell m\omega}(\vec{x}\,')]^*_{\vec{n}'} [\mathcal{H}^{(\sigma)}_{\ell m\omega}(\vec{x})]_{\vec{n}}. \tag{21}$$

В этом выражении $\delta_{\vec{n}\vec{n}'}$ - единичный тензор в каноническом базисе, а шаровые векторы $\vec{\mathcal{H}}_{\ell m\omega}(\vec{x})$ определяются, как и $\vec{F}^{(\sigma)}_{\ell m\omega}(\vec{x})$, формулами (I.26) - (I.28) с заменой в них сферических функций Бесселя $f_\ell(a)$ на сферические функции Ганкля $h_\ell(a)$. Свойства функций $\mathcal{H}_{\ell m\omega}(x)$ и $\vec{\mathcal{H}}_{\ell m\omega}(x)$ аналогичны свойствам соответствующих регулярных функций, так что для них справедливы соотношения (13), (14), (29)-(34) работы (1). Используя разложение (19) (последнее равенство), мультипольное разложение плотности заряда (I.15a) и тока (I.48), а также ортонормированность базисных функций (I.13), (I.33), получаем разложение потенциала излучения по мультиполям (ср. /2,5/):

$$A_0(\vec{x}) = 2\pi^2 i\omega \sum_{\ell,m} q_{\ell m}(\omega)\, \mathcal{H}_{\ell m}(\vec{x}) =$$

$$= 2\pi i\omega \sum_{\ell,m} (-i\omega)^\ell \frac{\sqrt{(2\ell+1)/2}}{(2\ell+1)!!} Q_{\ell m}(-\omega^2)\, \mathcal{H}_{\ell m}(\vec{x}); \tag{22a}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = 2\pi^2 \quad i\omega \sum_{\ell m\sigma} m^{(\sigma)}_{\ell m}(\omega)\ \mathcal{H}^{(\sigma)}_{\ell m\omega}(\vec{x}) =$$

$$= 2\pi\omega \sum_{\ell, m, \sigma} (-i\omega)^{\ell} \frac{\sqrt{(\ell+1)(2\ell+1)/2}}{(2\ell+1)!!} \times \tag{22б}$$

$$\times \{ M_{\ell m}(-\omega^2)\ \vec{\mathcal{H}}^{(0)}_{\ell m\omega}(x) + \frac{1}{\sqrt{\ell}} [i Q_{\ell m}(-\omega^2) +$$

$$+ \frac{\omega T_{\ell m}(-\omega^2)}{\sqrt{(\ell+1)(2\ell+3)}}]\ \vec{\mathcal{H}}^{(+)}_{\ell m\omega}(\vec{x}) + \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} Q_{\ell m}(-\omega^2)\ \vec{\mathcal{H}}^{(-)}_{\ell m\omega}(\vec{x}) \}.$$

Излучение, определяемое первым слагаемым в правой части формулы (22), пропорциональное $\vec{\mathcal{H}}^{(0)}_{\ell m\omega}(\vec{x})$, называется магнитным мультиполем, а пропорциональное $\mathcal{H}^{(+)}_{\ell m\omega}(\vec{x})$ – электрическим мультиполем.

Заметим, что при соленоидальной калибровке потенциала излучения $(\mathrm{div}\vec{A} = 0)$ временная компонента потенциала $A_0(\vec{x})$ и продольная часть пространственной компоненты $\vec{A}_{||}(\vec{x})$, пропорциональная $\vec{\mathcal{H}}^{(-)}_{\ell m\omega}(\vec{x})$, обращаются в нуль (см., например, /2,6/). Из выражения (22б) видно, что тороидные моменты, как и следовало ожидать, индуцируют мультипольное излучение того же (электрического) типа, что и зарядовые, однако интенсивность его на два порядка по частоте выше, чем от зарядовых моментов того же ранга.

Литература

1. В.М. Дубовик, А.А. Чешков. Препринт ОИЯИ, Р2-5283, Дубна 1970.
2. М. Роуз. Поля мультиполей, ИИЛ, 1957 г.
3. J.B. French, Y. Shimamoto, Phys. Rev. 91, 898 (1953).
4. L. Durand, P.C. De-Celles, R.B. Marr, Phys. Rev. 126, 1883 (196 J.Micheli, Nuovo Cimento 45, 312, (1966). T. de Forest Jr, J.D. Waleska, Adv. Phys. 15, 1 (1967).
5. В.Б. Берестецкий, А.З. Долгинов, К.А. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ, 20, 527 (1950).
6. И.А. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. ГИФМЛ, 1959 г.

Рукопись поступила в издательский отдел

23 июля 1970 года.