ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2-5267

Ч.Д. Палев

МАКСИМАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ АЛГЕБРА ЛИ, ПОСТРОЕННАЯ ИЗ ДВУХ ПАР ОПЕРАТОРОВ ФЕРМИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P2-5267

Ч.Д. Палев

МАКСИМАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ АЛГЕБРА ЛИ, ПОСТРОЕННАЯ ИЗ ДВУХ ПАР ОПЕРАТОРОВ ФЕРМИ

Направлено в "Известия на Физический институт с АНЕБ".

1. Введение

Реализация алгебр Ли с помощью функции Бозе и ферми-операторов рождения и уничтожения b_i, $a_i (i = 1,\dots,n)$ имеет многочисленные применения в теоретической физике. Достаточно упомянуть, что в теории ядра и квантовой теории поля, где состояния системы реализуются в пространстве Фока чисел заполнения, все операторы физических наблюдаемых являются функциями соответственно конечного и бесконечного числа таких операторов. В последние годы интерес к проблеме реализации возрос как в классической механике (реализации с помощью x_i и $\frac{\partial}{\partial x_i}$), так и в некоторых современных направлениях в теории элементарных частиц (динамические группы, бесконечно компонентные уравнения). С чисто математической точки зрения очень многое в задаче о реализации решено. Так, например, известно, что всякая алгебра Ли может быть представлена в виде полиномов второй степени бозе-или ферми-операторов /1-4/, что существуют реализации полиномами произвольной степени /5/ или рациональными функциями /6/ для случая Бозе и что определение рациональной функции ферми-операторов невозможно /7/. Имеется, однако, и довольно много нерешенных проблем. До сих пор неизвестна максимальная простая или полупростая алгебра Ли, которая может быть построена из данного числа операторов рождения и уничтожения[x/]. Для случая Ферми не было ясно, существуют ли реализации полупростых алгебр полиномами степени выше второй. Неизвестен также набор всех различных реализаций. Последняя проблема связана с вопросом об автоморфизмах универсальной обертывающей алгебры и для случая Бозе была частично решена в [6]. Общее решение, однако, пока неизвестно. Поэтому представляется естественным попытаться найти решение указанной выше проблемы в частном случае, которое может послужить ключом к решению более общей задачи. В настоящей работе мы рассматриваем случай двух пар ферми-операторов и показываем, что максимальная полупростая и простая алгебра, которая может быть построена над полем комплексных чисел, есть алгебра $SO(6,C)$. Любая из действительных форм этой алгебры является максимальной действительной алгеброй.

Кроме того, из доказательства следует, что существуют реализации алгебр Ли полиномами ферми-операторов степени выше второй. В приложении мы приводим реализацию алгебры в явном виде.

2. Построение максимальной алгебры R

Пусть ϕ – произвольное поле характеристики нуль. Через V мы будем обозначать ассоциативную алгебру над полем ϕ с образующими a_1, b_1, a_2, b_2, которые удовлетворяют соотношениям:

$$a_i b_j + b_j a_i = 1\delta_{ij} ,$$
$$a_i a_j + a_j a_i = b_i b_j + b_j b_i = 0, \qquad (1)$$

[x/] Пусть Ω – некоторое семейство алгебр Ли. Алгебра $A \in \Omega$ максимальна в Ω, если она не является подалгеброй ни одной из алгебр, принадлежащих Ω. Ясно, что семейство Ω может иметь несколько максимальных элементов.

где $i, j = 1,2$ и I – единичный элемент алгебры. Иными словами, V – это ассоциативная алгебра всех полиномов двух пар бозе-операторов рождения и уничтожения над ϕ. В качестве базиса в V можно выбрать совокупность всех упорядоченных мономов ферми-операторов. Для определенности мы введем следующие обозначения (для базисных векторов)

$$\begin{array}{lll}
e_0^0 = 1 & e_1^2 = a_1 b_1 & e_1^3 = a_1 a_2 b_1 \\
e_1^1 = a_1 & e_2^2 = a_2 b_2 & e_2^3 = a_1 b_1 b_2 \\
e_2^1 = a_2 & e_3^2 = a_1 b_2 & e_3^3 = a_1 a_2 b_2 \\
e_3^1 = b_1 & e_4^2 = a_2 b_1 & e_4^3 = a_2 b_1 b_2 \\
e_4^1 = b_2 & e_5^2 = a_1 a_2 & e_4^4 = a_1 a_2 b_1 b_2 \\
 & e_6^2 = b_1 b_2 &
\end{array} \qquad (2)$$

Через V_i, $i = 0,1,2,3,4$ обозначим подпространства алгебры V, натянутые на векторах e_j^i, где $i = 0,...4$ и j принимает все возможные значения. Очевидно, пространство V распадается в прямую сумму своих подпространств V_i, т.е.

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 . \qquad (3)$$

Относительно композиции $[V,V] \to V$, определенной по формуле $[a,b] = ab - ba$, $a, b \in V$, алгебра V является алгеброй Ли. В дальнейших вычислениях мы всегда рассматриваем V как алгебру Ли.

В работе[4] показано, что $V_0 + V_2$ является алгеброй, изоморфной алгебре $I + SO(2,2)$, где I – одномерная алгебра, а символ $+$ обозначает прямую сумму между алгебрами. Возникает вопрос о том, какой алгебре Ли соответствует V и какова максимальная полупростая алгебра, в ней содержащаяся? Для исследования структуры алгебры Ли V мы воспользуемся критерием Картана (см., например,[8]), согласно которому алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена.

Форма Киллинга $f(a,b)$ произвольной алгебры Ли $(a,b \subseteq A)$ определяется по формуле:

$$f(a,b) = -\mathrm{Tr}\, ad\, a\ \ ad\, b, \tag{4}$$

где $ad\, a$ и $ad\, b$ – соответствующие элементы присоединенной алгебры V. Элемент $ad\, a$ является линейным оператором в пространстве алгебры A и определяется равенством:

$$ad\, a\, u = [a, u] \qquad \text{для всех} \quad u \subseteq A. \tag{5}$$

Если $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ – базис в A, то билинейная форма $f(a,b)$ невырождена в том и только том случае, когда $\det f(e_i, e_j) \neq 0$. Для алгебры V заранее очевидно, что она не полупроста, т.к. содержит коммутативный и, следовательно, разрешимый идеал V_0. В общей теории алгебры Ли доказывается теорема, согласно которой всякая алгебра Ли V над полем ϕ характеристики нуль распадается в прямую сумму своих подпространств S и R, где S – максимальный разрешимый идеал в V и R – полупростая алгебра, т.е.

$$V = S \oplus R. \tag{6}$$

Для того чтобы вычислить максимальную полупростую алгебру R алгебры V, мы вычислим в явном виде форму Киллинга в базисе (2) и найдем базис, в котором она диагональна. Проводя все выкладки в явном виде, мы получаем следующую матрицу для формы Киллинга:

$$f(e_i, e_j) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & 16 & & & & & & & & & & & -8 & \\ \hline
 & & & & 16 & & & & & & & & 8 & & & \\ \hline
 & 16 & & & & & & & & & & & & 8 & & \\ \hline
 & & 16 & & & & & & & & & -8 & & & & \\ \hline
 & & & & & 8 & & & & & & & & & & -4 \\ \hline
 & & & & & & 8 & & & & & & & & & -4 \\ \hline
 & & & & & & & & -8 & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & -8 & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & -8 & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & -8 & & & & & & \\ \hline
 & & & & -8 & & & & & & & & -8 & & & \\ \hline
 & & 8 & & & & & & & & & -8 & & & & \\ \hline
 & & & 8 & & & & & & & & & & & -8 & \\ \hline
 & -8 & & & & & & & & & & & & -8 & & \\ \hline
 & & & & & -4 & -4 & & & & & & & & & 6 \\ \hline
\end{array} \tag{6}$$

Очевидно, $\det f(e_i, e_j) = 0$, т.к. первый ряд состоит только из нулей и, следовательно, алгебра V не является полупростой. Для диагонализации билинейной формы введем новый базис:

$$
\begin{aligned}
&g^0_1 = 1 && g^2_1 = a_1 b_1 - \frac{1}{2}\\
&g^1_1 = a_1 + b_1 && g^2_2 = a_2 b_2 - \frac{1}{2}\\
&g^1_2 = a_2 + b_2 && g^2_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1\\
&g^1_3 = a_1 - b_1 && g^2_4 = a_1 b_2 - a_2 b_1\\
&g^1_4 = a_2 - b_2 && g^2_5 = a_1 a_2 + b_1 b_2\\
&g^2_6 = a_1 a_2 - b_1 b_2 &&\\
&g^3_1 = a_1 a_2 b_1 + a_1 b_1 b_2 + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} b_2 &&\\
&g^3_2 = a_1 a_2 b_1 - a_1 b_1 b_2 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} b_2 &&\\
&g^3_3 = a_1 a_2 b_2 + a_2 b_1 b_2 - \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} b_1 &&\\
&g^3_4 = a_1 a_2 b_2 - a_2 b_1 b_2 - \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} b_1 &&\\
&g^4_1 = a_1 a_2 b_1 b_2 + \frac{1}{2} a_1 b_1 + \frac{1}{2} a_2 b_2 - \frac{1}{4}. &&
\end{aligned}
\tag{7}
$$

В этом базисе форма Киллинга $f(g^i_j, g^p_q)$ диагональна, причем диагональные элементы имеют следующие значения:

Таблица 1

	g^0_1	g^1_1	g^1_2	g^1_3	g^1_4	g^2_1	g^2_2	g^2_3	g^2_4	g^2_5	g^2_6	g^3_1	g^3_2	g^3_3	g^3_4	g^4_1
$f(g^i_j, g^p_q)$	0	32	32	–32	–32	8	8	–16	16	–16	16	–16	16	–16	16	6

Введем следующие обозначения. Через S, R_1, R_2, R_3 и R_4 обозначим подпространства алгебры, натянутые соответственно на векторах g^0_1, g^1_i, g^2_j, g^3_i и g^4_1, $i = 1,\dots 4$, $j = 1,\dots 6$. Положим далее

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 . \tag{8}$$

Не приводя здесь совокупность всех коммутационных соотношений, запишем только вытекающие из них коммутационные соотношения между подпространствами S и R_i, $i = 1,2,3,4$:

$$
\begin{aligned}
&[S, S] = 0 \quad [R_1, R_1] = R_2 \quad [R_2, R_2] = R_2 \quad [R_3, R_4] = R_1\\
&[S, R_i] = 0 \quad [R_1, R_2] = R_1 \quad [R_2, R_3] = R_3 \quad [R_4, R_4] = 0\\
&[R_1, R_3] = R_4 \quad [R_2, R_4] = 0\\
&[R_1, R_4] = R_3 \quad [R_3, R_3] = R_2 .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Из вышенаписанных соотношений следует, что S и R являются идеалами в V, причем по построению $S \cap R = 0$ и $S + R = V$. Следовательно, алгебра V распадается в прямую сумму своих подалгебр S и R, т.е.

$$V = S + R . \tag{10}$$

Исследуем теперь подробнее структуру алгебры R. Алгебра Ли R полупроста. Чтобы показать это, обозначим через f_V и f_R формы Киллинга для алгебр V и R, соответственно, и покажем, что если $a, b \in R$, то $f_V(a,b) = f_R(a,b)$. В силу билинейности формы достаточно показать, что

$$f_V(g_j^i, g_q^p) = f_R(g_j^i, g_q^p) \;;\; i, p = 1,2,3,4 . \tag{11}$$

Обозначая через a_j^i координаты вектора a, т.е. $a = a_j^i\, g_i^j$ (сумма по повторяющимся индексам), прямым вычислением получаем:

$$f_R(g_j^i, g_q^p) = -\sum_{\alpha=0}^{4} \sum_{\beta=0}^{4} [\, g_j^i, [\, g_q^p, g_\beta^\alpha]]_\alpha^\beta = -[\, g_j^i, [\, g_q^p, g_0^0]]_0^0 -$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{4} [\, g_j^i, [\, g_q^p, g_\beta^\alpha]]_\alpha^\beta = f_R(g_j^i, g_q^p),$$

так как $[\, g_q^p, g_0^0] = 0$. Из таблицы 1 следует, что $\det f_V(g_j^i, g_q^p) \neq 0$ и, следовательно, алгебра R полупроста. Так как форма Киллинга алгебры R не является положительно определенной, то алгебра R некомпактна /8/. Мы теперь докажем важную для дальнейшей идентификации алгебры R лемму.

<u>Лемма.</u> Алгебра Ли R проста.

<u>Доказательство.</u> Для доказательства леммы можно было бы найти корневую системы алгебры R и показать, что она не распадается. Мы приведем доказательство, которое в данном случае проще. Пусть r – произвольный ненулевой элемент алгебры R и пусть J_r –идеал, порожденный элементом r. Мы докажем, что $J_r = R$ и тем самым установим, что R не содержит нетривиальных идеалов. Начнем с элемента a_1. Из коммутационных соотношений

$$[[\, a_1, b_1], b_1] = -2b_1 ,\; [\, a_1, b_1 a_2] = a_2 \qquad [\, a_1, b_1 b_2] = b_2 \tag{12}$$

следует, что $R_1 \subset J_{a_1}$. В силу соотношения (9) получаем $R \subset J_{a_1}$. Совершенно аналогично доказывается, что $J_{a_1} = J_{a_2} = J_{b_1} = J_{b_2} = R$. Итак, мы имеем, что если

$$r_1 \in R_1 \qquad \text{то} \quad J_{r_1} = R. \tag{13}$$

Пусть теперь $R_2 \ni r_2 \neq 0$. Тогда $[\, r_2, R_1] \cap R_1 \neq 0$ и из (13) следует, что

$$J_{r_2} = R . \tag{14}$$

Если r_3 и r_4 – ненулевые элементы из R_3 и R_4, соответственно, то $[r_3, R_3] \cap R_2 \neq 0$ и $[\, r_3, R_1] \cap R_3 \neq 0$. Поэтому

$$J_{r_3} = R \qquad \text{и} \qquad J_{r_4} = R . \tag{15}$$

Рассмотрим теперь произвольный элемент $r = a_j^i\, g_i^j$. Из коммутационных соотношений следует, что если $a_j^i \neq 0$, то $g_i^j \in J_r$.

Тем самым, если $r \neq 0$, то $J_r = R$, что и доказывает лемму. Мы резюмируем полученные до сих пор результаты.

1. Алгебра V распадается в прямую сумму своего максимального одномерного разрешимого идеала S и простой пятнадцатипараметрической алгебры R.

2. Алгебра R над полем C комплексных чисел содержит $SO(4,C)$.

3. Над полем действительных чисел алгебра R некомпактна и содержит подалгебру $SO(2,2)$.

Первые два условия однозначно определяют алгебру R над полем C. Имеется одна и только одна пятнадцатимерная простая алгебра – это классическая алгебра D_3 или в более привычных обозначениях – $SO(6,C)$. Над полем действительных чисел имеются три возможности. Алгебра R изоморфна одной из следующих действительных форм алгебры D_3 : $SO(4,2)$, $SO(3,3)$, $SO(4,2)$. Из сравнения коммутационных соотношений этих алгебр нетрудно установить, что

$$R \approx SO(3,3). \tag{16}$$

В явном виде изоморфное отображение алгебры R на фундаментальное шестимерное представление $SO(3,3)$ приведено в приложении. Поскольку алгебра $SO(6,C)$ имеет действительными формами алгебры $SO(p,q)$, $p+q=6$, то все эти алгебры могут быть реализованы с помощью двух пар ферми-операторов. Кроме того, из общей теории алгебр Ли известно, что ($\approx$ обозначает изоморфизм)/9/.

$$A_3 \approx D_3 \quad и \quad C_2 \approx B_2 \subset D_3. \tag{17}$$

Поэтому полный список всех действительных алгебр Ли, которые могут быть реализованы с помощью двух пар ферми-операторов, следующий:

$$SU(p,q),\ p+q \le 4;\ SO(r,s),\ r+s \le 6,\ Sp(2n),\ n \le 2. \tag{17}$$

3. Заключение

На примере двух пар ферми-операторов мы показали, что существуют простые алгебры Ли, которые реализуются с помощью полиномов степени выше второй (см. приложение). В этом случае оказалось, что алгебра всех полиномов распадается в прямую сумму простой алгебры $SO(3,3)$ и в одномерный коммутативный идеал. Полученные результаты указывают на довольно сильное отличие алгебр, построенных из полиномов ферми- и бозе-операторов. Так, например, алгебра всех полиномов первой и второй степени двух пар бозе-операторов разрешима, ибо идеал J, состоящий из полиномов первой степени, удовлетворяет соотношениям:

$$J \supset [J,J] = J' \supset [J',J'] = J'' = 0 \tag{18}$$

и поэтому разрешим. В случае ферми эти же полиномы замыкают простую алгебру, которая, как следует из приложения, изоморфна алгебре $SO(3,2)$.

Отметим, наконец, что было бы очень интересно обобщить полученные результаты для произвольного числа пар ферми-операторов. Для этого, однако, нужно найти иной подход, ибо метод, использованный в настоящей работе, уже для случая $n = 3$ приводит к довольно громоздким вычислениям.

В заключение автор выражает благодарность проф. А.Н. Тавхелидзе за предоставленную возможность обсудить настоящую работу на семинаре по теории поля, а также всем участникам семинара за полезные обсуждения.

Приложение

Мы приведем здесь в явном виде соответствие между элементами алгебры R и шестимерным фундаментальным представлением алгебры $SO(3,3)$, записанным в виде, в котором оно сохраняет форму

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{bmatrix},$$

где I_3 – трехмерная единичная матрица. Обозначим через e_{ij} шестимерную матрицу, все элементы которой равны нулю за исключением элемента, находящегося на пересечении i –ой строки и j –го столбца, который равняется единице. Тогда соответствие между элементами алгебр R и $SO(3,3)$ дается нижеследующим отображением:

$$a_1 = e_{26} + e_{46} + e_{62} - e_{64},$$

$$a_2 = e_{36} + e_{56} + e_{63} - e_{65},$$

$$b_1 = e_{26} - e_{46} + e_{62} + e_{64},$$

$$b_2 = e_{36} - e_{56} + e_{63} + e_{65},$$

$$a_1 b_1 = e_{24} + e_{42},$$

$$a_2 b_2 = e_{35} + e_{53},$$

$$2a_2 b_1 = -e_{23} + e_{25} + e_{32} + e_{34} + e_{43} - e_{45} + e_{52} + e_{54},$$

$$2a_1 b_2 = e_{23} + e_{25} - e_{32} + e_{34} + e_{43} + e_{45} + e_{52} - e_{54},$$

$$2a_1 a_2 = e_{23} - e_{25} - e_{32} + e_{34} + e_{43} - e_{45} - e_{52} + e_{54},$$

$$2 b_1 b_2 = e_{23} + e_{25} - e_{32} - e_{34} - e_{43} - e_{45} + e_{52} + e_{54},$$

$$2a_1 a_2 b_2 - a_1 = -e_{12} + e_{14} + e_{21} + e_{41},$$

$$2a_2 b_1 b_2 + b_1 = -e_{12} - e_{14} + e_{21} - e_{41},$$

$$2a_1 a_2 b_1 + a_2 = e_{13} - e_{15} - e_{31} - e_{51},$$

$$2a_1 b_1 b_2 - b_2 = e_{13} + e_{15} - e_{31} + e_{51},$$

$$2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - \frac{1}{2} = e_{16} + e_{61}.$$

Первые шесть равенств определяют изоморфизм алгебры $SO(2,2)$ в R, в то время как первые десять отображений дают алгебру $SO(2,3)$. Поэтому совокупность всех полиномов первой и второй степени операторов a_i, b_i, $i = 1,2$ изоморфна алгебре $SO(3,2)$.

Литература

1. T.D. Palev, ICPT, Trieste, preprint IC/68/23.
2. H.D. Doebner, T.D. Palev, "The Trace Formula for Canonical Realizations of Lie Algebras, preprint, University of Marburg, 1970.
3. K. Kademova, ICTP, Trieste, preprint IC/69/108.
4. K. Kademova, T.D. Palev. "Second-order Realizations of Lie Algebras with Parafield Őperators" (to be published).
5. H.D. Doebner, T.D. Palev. "On Canonical Realizations of Lie Algebras" (in preparation).
6. H.D. Doebner, T.D. Palev, "On Lie Subalgebras and Isomorphisms of the Canonical Quotient Division Ring" (in preparation).
7. H.D. Doebner, T.D. Palev, "Realizations of Lie Algebras through Rational Functions of Canonical Variables", ICTP, Trieste, Int. report IC/70/18.
8. Н. Джекобсон. "Алгебры Ли". Издательство "Мир", Москва, 1964.
9. Л.С. Понтрягин. "Непрерывные группы" ГИТТЛ, Москва, 1954 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июля 1970 года.