СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5266

И.В. Полубаринов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О ТЕОРЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И НАБЛЮДАЕМЫХ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

1970

Р2 - 5266

И.В. Полубаринов

О ТЕОРЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И НАБЛЮДАЕМЫХ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. В квантовой теории поля рассматриваются два рода преобразований от одного представления к другому: 1) замены переменных поля, 2) унитарные преобразования. Приводятся соображения о том, что полевые теории, связанные такими преобразованиями, тождественны по физическому содержанию ("эквивалентны") /1/. При этом существенную роль играют асимптотические условия.

Мы хотели бы подчеркнуть, что эти условия не имеют прямого отношения к делу. Эквивалентность относительно указанных преобразований - следствие основных принципов квантовой механики. Действительно, предположим, что мы располагаем операторами, соответствующими всем физическим (измеримым на опыте) величинам, - наблюдаемыми. Если в наблюдаемых произвести любую (аналитически достаточно "хорошую") замену переменных поля, то, понятно, соотношения (в частности, коммутационные) между наблюдаемыми, их спектры, а отсюда и физические следствия ("матричные элементы") не изменятся. То же относится и к унитарным преобразованиям наблюдаемых, поскольку такое преобразование "оставляет инвариантным любое алгебраическое соотношение между линейными операторами, векторами и совекторами" /2/ (так называемая, унитарная эквивалентность).

Иногда об эквивалентности двух теорий судят только по тому, что их гамильтонианы связаны унитарным преобразованием (см., например, [3]). Очевидно, что этот так, если принципиально существует лишь один единственный набор наблюдаемых, отвечающих всем требованиям. Если бы в рамках данной теории удалось построить не один, а несколько приемлемых наборов, то в обоих представлениях мы имели бы по столько же вариантов теории (неоднозначная интерпретация). Однако оба представления по-прежнему были бы унитарно эквивалентны: каждому варианту в одном представлении нашелся бы соответствующий (унитарно связанный с ним) во втором.

2. Центральной проблемой является построение всех отвечающих физике наблюдаемых в данной теории. Наблюдаемые должны удовлетворять определенным коммутационным (алгебраическим) соотношениям и другим следующим из эксперимента или предполагаемым требованиям. В случае неоднозначности только пополнение списка требований (в конечном счёте, из эксперимента) способно выделить единственный набор.

По-видимому, все наблюдаемые (и сохраняющиеся и несохраняющиеся) могут быть получены из лагранжиана (относительно несохраняющихся см. [4]) и на них распространяется ковариантность относительно замены переменных поля, присущая, как показано в [1], лагранжевым уравнениям и тензору энергии-импульса.

Нерелятивистская квантовая механика формулируется в терминах координат $\vec{x}_i(t)$ и импульсов $\vec{p}_i(t)$ [x] каждой частицы, которые по определению предполагаются физическими, наблюдаемыми. Здесь проблема лишь в построении из $\vec{x}_i(t)$ и $\vec{p}_i(t)$ других наблюдаемых [x] (в особенности, гамильтониана и коммутирующих с ним полных наборов [xx]), в нахождении их спектров и собственных векторов.

[x] Для определенности имеется в виду гайзенберговское представление.

Отличие релятивистской квантовой теории поля в следующем. Во-первых, полевые "координаты" и "импульсы", вообще говоря, не являются наблюдаемыми, а роль, до некоторой степени аналогичную координатам и импульсам квантовой механики, в теории поля призваны играть операторы числа частиц [xxx] с заданным значением координаты $N(\alpha, \vec{x}, t)$ и с заданным значением импульса $N(\alpha, \vec{p}, t)$ [xxxx], где через α обозначен заданный набор зарядовых квантовых чисел (типа заряда или числа, отличающего частицы от античастиц).

[x] Поискам полных наборов наблюдаемых посвящен обширный цикл работ Я.А.Смородинского и др. [5].

[xx] Свойство полного набора операторов, коммутирующих с гамильтонианом H и друг с другом, не зависеть от времени не означает отсутствия эволюции, как может показаться [6]. Эволюция проявляется хотя бы в том, что сопряженные операторы заведомо изменяются со временем (по линейному закону [7]). Например, в свободном случае один полный набор коммутирующих с H операторов составляют импульсы $\vec{p}_i = const(t)$, но координаты изменяются согласно $\vec{x}_i(t) = \vec{x}_i(0) + \vec{v}_i t$ $(\vec{v}_i = \vec{p}_i / \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2})$.

[xxx] А также сопряженные им операторы фаз.

[xxxx] В свободном случае $N(\vec{p}) = a^+(\vec{p})a(\vec{p})$. Очевидно, $N(\vec{p})$ сохраняются (не зависят от времени) порознь (а не только их комбинации вида

$$P_r = \int \frac{d\vec{p}}{2p_0} p_r N(\vec{p}) , \quad Q = e\int \frac{d\vec{p}}{2p_0} \left[N(\text{частицы}, \vec{p}) - N(\text{античастицы}, \vec{p}) \right]).$$

Они образуют полный набор наблюдаемых, коммутирующих с гамильтонианом и друг с другом.

Во-вторых, в отличие от координат и импульсов нерелятивистской квантовой механики о наблюдаемых $N(\alpha,\vec{x},t)$ трудно говорить из-за неясности с релятивистским определением координаты (а также и соответствующей плотности вероятности), а наблюдаемые $N(\alpha,\vec{p},t)$ определены в лучшем случае только асимптотически при $t \to -\infty$ или $+\infty$ для in- или out-частиц

$$N(\vec{p},\pm\infty) = a^{+}_{\substack{out\\in}}(\vec{p})\, a_{\substack{out\\in}}(\vec{p})$$

Отсюда важное значение асимптотического условия, т.е. предположения о неизменности этих операторов при заменах переменных поля. В этих же рамках исчерпан вопрос о неизменности S-матрицы между бесконечными временами, $S(\infty,-\infty)$ [1].

С точки зрения описания развития во времени, на которое претендует квантовая механика, важно было бы, сформулировав подходящие требования, найти операторы $N(\alpha,\vec{x},t)$ и $N(\alpha,\vec{p},t)$ (а также операторы числа частиц с другими квантовыми числами) для любых t. Непременное физическое требование к операторам числа частиц (полного) – вакуум, одночастичные состояния и двухчастичные до трехчастичных порогов должны быть собственными функциями их и одновременно полного гамильтониана H [x]. При более высоких энергиях у них, вообще говоря, не будет общих собственных функций с гамильтонианом (если есть существенное взаимодействие)[xx] [xxx].

---

[x] Как работают эти условия, см. в Приложении.

[xx] Поскольку, например, система из двух частиц способна превратиться в систему из трех и более частиц (античастиц).

[xxx] О распределениях по числу частиц в физике высоких энергий см. [8].

Разумеется, наиболее важная задача и теории и эксперимента дополнить известные сохраняющиеся операторы (10 генераторов группы Пуанкаре, операторы зарядов) до полных наборов сохраняющихся наблюдаемых и, в частности, построить полные наборы наблюдаемых, коммутирующих с гамильтонианом и выражающих основные законы природы.

3. В аксиоматике часто предполагают, что спектры сохраняющихся операторов полных заряда Q, 4-импульса P_μ и 4-момента $M_{\mu\nu}$ такие же, как в свободном случае (нет связанных состояний). Для теорий, отвечающих этому предположению, можно ввести такие операторы $a(\vec{p},t)$ и $a^{+}(\vec{p},t)$, удовлетворяющие перестановочным соотношениям для операторов уничтожения и рождения, что в их терминах Q, P_μ и $M_{\mu\nu}$ будут иметь ту же структуру, что и в свободном случае[x]. Что касается взаимодействия, то оно теперь должно включаться в операторы числа частиц[xx]

$$N(\vec{p}) = a^{+}(\vec{p},t)\,a(\vec{p},t) + g\,f(a,a^{+},t)$$

---

[x] Обычно это явно видно только для Q, $\vec{P}$ и M_{mn} (см., например, [4], п.5). Аналогично и в квантовой механике, где, скажем, для системы двух частиц $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, но $H = \sqrt{\vec{p}_1^{\,2}+m_1^2} + \sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2} + V(|\vec{x}_2-\vec{x}_1|)$. Разница только в том, что в квантовой механике все выражается через физические операторы импульсов $\vec{p}_1(t)$ и $\vec{p}_2(t)$ координат $\vec{x}_1(t)$ и $\vec{x}_2(t)$ и кинетических энергий $\sqrt{\vec{p}_1^{\,2}+m_1^2}$ и $\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2}$ каждой из частиц, а в теории поля – через нефизические $a(\vec{p},t)$ и $a^{+}(\vec{p},t)$ [4] (хотя $a^{+}(\vec{p},t)a(\vec{p},t)$ составляют полный набор, но он не удовлетворяют требованиям, указанным в конце стр. 6). Поиску "физических" операторов уничтожения и рождения одночастичных состояний посвящены работы М.И.Широкова [9].

[xx] Очевидна неоднозначность: выбор $g = 0$ тоже приемлем, но дает свободную теорию.

Автор благодарен М.А. Маркову, В.И. Огиевецкому и М.И. Широкову за обсуждения.

Приложение

Если ограничиться требованиями, сформулированными в начале стр. 4, то в случае взаимодействия скалярных мезонов со статическими нуклонами [3], где

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}(\partial_\nu\varphi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\varphi^2(x) + g\sum_n \delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\varphi(x),$$

а также взаимодействия с градиентной связью, где

$$\mathcal{L}(x) = -\bar{\psi}(\gamma\partial+m)\psi + j_\nu\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}(\partial_\nu\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2(x) \quad \left(j_\nu = \frac{ig}{2}[\bar{\psi}(x),\gamma_\nu\psi(x)]\right),$$

легко после известных преобразований к свободным полям

$$\varphi'(x) = e^{G(x_0)}\varphi(x)e^{-G(x_0)} = \varphi(x) - U(\vec{x})\left(U(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi}\sum\frac{e^{-\mu|\vec{x}-\vec{x}_n|}}{|\vec{x}-\vec{x}_n|}, \; G(x_0) = \int d\vec{x}\, U(\vec{x})\partial_4\varphi(x)\right)$$

и

$$\psi'(x) = e^{G(x_0)}\psi(x)e^{-G(x_0)} = e^{ig\phi(x)}\psi(x)\left(G(x_0) = \int d\vec{x}\, j_4(x)\phi(x)\right), \; \phi'(x) = \phi(x)$$

построить в терминах соответствующих φ', ϕ' и ψ' операторов уничтожения и рождения x/ по полному набору коммутирующих друг

---

x/ Например,

$$\varphi'(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int\frac{d\vec{p}}{2p_0}\left[a(\vec{p})e^{ipx} + a^+(\vec{p})e^{-ipx}\right] \quad \left(p_0 = \sqrt{\vec{p}^2+\mu^2}\right)$$

с другом и с полным гамильтонианом $P_0 = H$ операторов числа частиц

$$N_{\varphi'}(\vec{p}) = a^+(\vec{p})a(\vec{p}), \quad \text{причем} \quad H = \int\frac{d\vec{p}}{2}N_{\varphi'}(\vec{p}) - \frac{g}{2}\sum_n U(\vec{x}_n),$$

и

$$N_{\phi'}(\vec{p}) = b^+(\vec{p})b(\vec{p}), \; N_{\psi'}(\text{частицы},\vec{p}) = c^+(\vec{p})c(\vec{p}), \; N_{\psi'}(\text{античастицы},\vec{p}) = d^+(\vec{p})d(\vec{p}),$$

$$\text{причем} \quad H = \int\frac{d\vec{p}}{2}\left[N_{\phi'}(\vec{p}) + N_{\psi'}(\text{частицы},\vec{p}) + N_{\psi'}(\text{античастицы},\vec{p})\right].$$

Это свидетельствует о том, что данные теории свободные. Поскольку для полей φ' или ϕ', ψ' лагранжиан взаимодействия равен нулю, то S-матрица $S(t,t_0)$ равна единице при любых t и t_0. (С этим согласуется и тот факт, что и в представлении взаимодействия для полей φ или ϕ, ψ $S(\infty,-\infty) = 1$, хотя при конечных t_0 и t $S(t,t_0) \neq 1$. Можно ли построить наборы наблюдаемых по-другому, так, чтобы с их точки зрения теория не была свободной (при конечных временах)? По-видимому, нет).

Аналогичное преобразование используется в электродинамике [10] для исключения из уравнений Максвелла продольной составляющей $\partial_m A_m$ (по m сумма от 1 до 3) электромагнитного поля, что приводит к калибровке излучения. В электродинамике Ферми-Гупты это же преобразование превращает взаимодействие с продольной составляющей $\partial_m A_m$ во взаимодействие со "скалярной" составляющей $\partial_\mu A_\mu$ [10] (по μ сумма от 1 до 4). Последнее, благодаря специфическим свойствам $\partial_\mu A_\mu$, устранимо либо приравниванием $\partial_\mu A_\mu$ нулю, либо наложением дополнительного условия на векторы состояния [10].

Л и т е р а т у р а

1. S. Kamefuchi, L. O'Raifertaigh, A. Salam. Nucl. Phys., 28, 529, 1961.

2. П.А.М. Дирак. Принципы квантовой механики, Физматгиз, Москва, 1960, стр. 152.

3. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1947, стр. 61-63.

4. И.В. Полубаринов. ЖТМФ, 1, 34, 1969.

5. Я.А. Смородинский, И.И. Тугов. ЖЭТФ, 50, 653, 1966 и цитируемая там литература.

6. А.Я. Хинчин. Математические основания квантовой статистики, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1951, стр. 98.

7. М. Борн. Атомная физика, Мир, Москва, 1965, стр. 393.

8. О.А. Хрусталев. Диссертация, ИФВЭ, Серпухов, 1969.

9. М.И. Широков. Препринты ОИЯИ, Р-2700, Дубна, 1966; Р2-3040, Дубна, 1966, Р2-4410, Дубна, 1969.

10. И.В. Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Р-2421, Дубна, 1965, стр. 13 (преобразование (37)) и 21; препринт ОИЯИ Р2-4564, стр. 6 и 22 (преобразование (59)).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июля 1970 года.