ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-5124

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Я.А.Смородинский, М.Хусар

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ОБОБЩЕНИЕ СПИРАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

1970

P2-5124

Я.А.Смородинский, М.Хусар*

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ОБОБЩЕНИЕ СПИРАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

---

* Центральный институт физических исследований, Будапешт.

1. Введение

Разложение релятивистских амплитуд привело к вопросу о нахождении простого вида матричных элементов неприводимых представлений группы Лоренца. Наиболее вырожденное представление было впервые получено А.З. Долгиновым и И.П. Топтыгиным /1/ путем аналитического продолжения представлений группы $O(4)$. Позднее систематическое исследование представлений на гиперболоиде было проведено в работе Я.А. Виленкина и Я.А. Смородинского /2/, где были введены разные системы координат на гиперболоиде и найдены соответствующие базисные ("сферические") функции. Была решена задача разложения функций на гиперболоиде. В дальнейшем был исследован и случай спина, не равного нулю. Это было сделано двумя способами. Первый способ состоял в выделении матриц, описывающих спин, и реализации представления на прямом произведении гиперболоида и сферы /3/. Второй способ заключался в реализации представлений спиральными функциями на световом конусе и последующим переходом на гиперболоид /4/.

Представление основной серии в базисе углового момента было выведено в работе Штрёма /5/ в 1965г., однако вследствие неподходящего выбора параметров полученные матричные элементы оказались сложными.

В настоящей работе унитарные представления будут построены с помощью параметров, соответствующих генераторам, которые удовлетворяют алгебре Ли двух независимых угловых моментов. Через эти параметры представления выражаются в сравнительно простой форме. Здесь мы останавливаемся только на основных моментах рассматриваемого вопроса, более подробно он рассмотрен в препринте /6/.

Со времени появления препринта /6/ авторы перенормировали функции, входящие в представления, что привело к значительному упрощению формул. Любой элемент группы Лоренца может быть разложен следующим образом. Выберем три декартовых оси, x_1, x_2, x_3, и определим некоторое сложное преобразование, состоящее из поворота вокруг оси и преобразования Лоренца вдоль той же оси. Можно показать, что любой элемент группы Лоренца можно представить как результат трех таких сложных преобразований относительно осей x_3, x_1 и снова x_3. Эти операции можно описывать и в форме двух последовательных поворотов на некоторые комплексные углы Эйлера и на углы, комплексно сопряженные к этим. Подгруппу пространственных вращений мы получим, если мнимые части комплексных углов Эйлера положим равными нулю. Повороты на чисто мнимые углы Эйлера, естественно, подгруппы не образуют.

Вещественную часть трех углов Эйлера можно рассматривать как координаты на поверхности трехмерной вещественной сферы x/, т.к. группа движения этой сферы изоморфна группе $O(3)$. В таком случае становится естественным рассматривать комплексную группу вращения как группу движения трехмерной комплексной сферы.

x/ Во избежание недоразумений заметим, что n-мерная сфера (вещественная или комплексная) определяется уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = r^2 .$$

Таким образом, можно получить систему функций, реализующую представления группы Лоренца и зависящую от 6 параметров. Поскольку эти функции являются собственными функциями квадрата 4-момента, их можно рассматривать как волновую функцию релятивистского волчка. Состояние этого релятивистского волчка не имеет определенного значения углового момента. Поэтому его волновую функцию следует разложить в ряд сферических гармоник в фиксированной системе координат. Это приводит к обычным рядам по состояниям с определенными угловыми моментами, которые содержатся в одном представлении группы Лоренца.

Рассмотрим сейчас частицу и выберем трехмерный комплексный единичный вектор $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$. Тогда собственные значения проекции оператора комплексного момента $\vec{J}$ на единичный вектор $\vec{z}$, т.е. $\vec{J}\vec{z}$, естественно называть комплексной (обобщенной) спиральностью. Этот факт продемонстрирован экспоненциальной зависимостью сферических функций от этих комплексных значений.

Рассмотрим 6 генераторов группы Лоренца. Три генератора гиперболических поворотов N_i и три генератора пространственных поворотов N_i удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$[M_i, M_k] = i\epsilon_{ik\ell} M_\ell, \quad [N_i, N_k] = -i\epsilon_{ik\ell} M_\ell, \quad [M_i, N_k] = i\epsilon_{ik\ell} N_\ell .$$

Вводим линейные комбинации

$$J_k = \frac{1}{2}(M_k + iN_k), \quad K_k = \frac{1}{2}(M_k - iN_k).$$

Это дает следующие коммутаторы:

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ik\ell} J_\ell, \quad [K_i, K_k] = i\epsilon_{ik\ell} K_\ell, \quad [J_i, K_k] = 0. \tag{1}$$

Вид соотношений (1) естественным образом позволяет написать элемент группы Лоренца в форме

$$T(g) = e^{-i\epsilon_1 J_3} e^{-i\epsilon_2 J_1} e^{-i\epsilon_3 J_3} e^{-i\epsilon_1^* K_3} e^{-i\epsilon_2^* K_1} e^{-i\epsilon_3^* K_3}, \tag{2}$$

где

$$\epsilon_k = \phi_k + i\chi_k\,, \quad \epsilon^*_k = \phi_k - i\chi_k \tag{3}$$

с областями изменений[x/] величин ϕ_k и χ_k .

$$\begin{gathered} 0 \le \phi_1 < 2\pi\,, \quad 0 \le \phi_2 < \pi\,, \quad 0 \le \phi_3 < 2\pi\,, \\ -\infty < \chi_1 < \infty\,, \quad -\infty < \chi_2 < \infty\,, \quad -\infty < \chi_3 < \infty\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Уравнение (3) описывает два поворота с углами ϵ^*_1 , ϵ^*_2 , ϵ^*_3 и ϵ_1, ϵ_2 , ϵ_3 соответственно. Переставляя экспоненты в уравнении (2), находим непосредственное физическое значение параметров ϕ_k и χ_k. Именно элемент группы (2) описывает следующие последовательные операции:

гиперболический поворот вдоль оси x_3 на угол $-\chi_3$,
пространственный поворот вокруг оси x_3 на угол ϕ_3 ,
гиперболический поворот вдоль оси x_1 на угол $-\chi_2$,
пространственный поворот вокруг оси x_1 на угол ϕ_2,
гиперболический поворот вдоль оси x_3 на угол $-\chi_1$,
пространственный поворот вокруг оси x_3 на угол ϕ_1 .

В работе[6] дан список матричных элементов 4-мерного представления, выраженных с помощью этих параметров.

[x/] Эта область изменения параметров относится к группе Лоренца. Для универсальной накрывающей группы $SL(2,C)$ мы должны были бы положить $-2\pi \le \phi_1 < 2\pi$, Из уравнения (2) получается условие унитарности представления

$$J_k^+ = K_k \tag{5}$$

(+ - эрмитово сопряжение).

2. Классификация базисных функций

Рассмотрим двухпараметрическую подгруппу $H = SO(2) \times SO(1,1)$, которая содержит пространственный поворот вокруг оси x_3 и гиперболический поворот вдоль оси x_3. Эти преобразования характеризуются параметрами ϕ_1 и χ_1 с областями изменения $0 \le \phi_1 < 2\pi$, $-\infty < \chi_1 < \infty$. Соответствующие генераторы имеют вид

$$M_3 = -i \frac{\partial}{\partial \phi_1}, \quad N_3 = i \frac{\partial}{\partial \chi_1}.$$

Собственные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$M_3 f_{\mu\nu} = \mu f_{\mu\nu}, \quad N_3 f_{\mu\nu} = \nu f_{\mu\nu},$$

равны:

$$f_{\mu\nu}(\phi_1, \chi_1) = \frac{1}{2\pi} e^{i(\mu\phi_1 - \nu\chi_1)}. \tag{6}$$

Для унитарных представлений операторы M_3 и N_3 эрмитовы, а потому μ и ν -действительны. Чтобы представление было одно- или , в крайнем случае, двузначным, мы получим

$$\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ или } \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \ldots \tag{7}$$

и $-\infty < \nu < \infty$.

Собственные функции (6) являются, конечно, собственными функциями и генераторов $J_3 = \frac{1}{2}(M_3 + iN_3)$, $K_3 = \frac{1}{2}(M_3 - iN_3)$:

$$J_3 f_{\mu\nu} = \frac{\mu + i\nu}{2} f_{\mu\nu}, \quad K_3 f_{\mu\nu} = \frac{\mu - i\nu}{2} f_{\mu\nu}, \tag{8}$$

или

$$J_3 f_{mm^*} = m f_{mm^*}, \quad K_3 f_{mm^*} = m^* f_{mm^*},$$

где

$$m = \frac{\mu + i\nu}{2}, \quad m^* = \frac{\mu - i\nu}{2}, \quad f_{mm^*} \equiv f_{\mu\nu}.$$

Для классификации собственных функций мы можем употреблять m и m^* вместо μ и ν или наоборот.

Два независимых оператора Казимира имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{1}{4}(\vec{M}^2 - \vec{N}^2 + 2i\vec{M}\vec{N}), \\ \vec{K}^2 &= K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = \frac{1}{4}(\vec{M}^2 - \vec{N}^2 - 2i\vec{M}\vec{N}). \end{aligned} \tag{9}$$

Их собственные значения мы обозначим через $j(j+1)$ и $k(k+1)$ соответственно:

$$J^2 f^{jk}_{mm^*} = j(j+1) f^{jk}_{mm^*}, \quad K^2 f^{jk}_{mm^*} = k(k+1) f^{jk}_{mm^*}. \tag{10}$$

Таким образом, неприводимое представление характеризуется с помощью величин j и k. Уравнения (8), (10) инвариантны по отношению к перестановке:

$$j \to -j-1, \quad k \to -k-1. \tag{11}$$

Итак, представления, характеризуемые (j,k) и $(-j-1,-k-1)$, эквивалентны.

Необходимым условием унитарности является

$$J^2 = (K^2)^+$$

или

$$(j_2-k_2)(j_2+k_2)-(j_1-k_1)(j_1+k_1+1)=0,$$

$$(j_2+k_2)+2(k_1 k_2+j_1 j_2)= 0,$$

где $j=j_1+ij_2$, $k=k_1+ik_2$. Мы имеем решения

а) $j_1=k_1$, $j_2=k_2$,

б) $j_2=k_2=0$, $j_1=k_1$,

в) $j_1=-k_1-1$, $j_2=k_2$,

г) $j_2=k_2=0$, $j_1=-k_1-1$.

В силу инвариантности (11) решения в) и г) можно опустить. В случае б) мы имеем ограничение: $0>j_1>-1$, $0>k_1>-1$. Случаи а) и б) составляют основную и дополнительную серию соответственно. Написав j и k в форме

$$j=\frac{1}{2}(\ell_0-1+ip), \quad k=\frac{1}{2}(\ell_0-1+ip)^*, \tag{12}$$

видим, что в силу (11) мы всегда можем выбрать p неотрицательным. Далее будет показано, что ℓ_0 принимает только целые или полуцелые значения. Таким образом, мы приходим к обычным условиям: а) величина p – действительна, неотрицательна, ℓ_0 –целая или полуцелая (основная серия); б) $\ell_0=0$, p – чисто мнимая величина, $p=ip'$, причем $-1\leq p'\leq 1$ (дополнительная серия). Мы будем заниматься только основной серией, так как дополнительная серия не дает вклада при гармоническом анализе.

3. Матричные элементы представлений

Рассмотрим функцию $f(g)$ на группе Лоренца и определим действие представления с помощью левого сдвига $T(g_0)f(g)=f(g_0^{-1}g)$. Выбирая для g_0 шесть однопараметрических подгрупп, соответствующих шести действительным параметрам, мы получим инфинитезимальные генераторы в виде дифференциальных операторов

$$J_1=\frac{1}{i}\left(-\sin\epsilon_1\,\mathrm{ctg}\,\epsilon_2\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}+\cos\epsilon_1\frac{\partial}{\partial\epsilon_2}+\frac{\sin\epsilon_1}{\sin\epsilon_2}\frac{\partial}{\partial\epsilon_3}\right),$$

$$J_2=\frac{1}{i}\left(\cos\epsilon_1\,\mathrm{ctg}\,\epsilon_2\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}+\sin\epsilon_1\frac{\partial}{\partial\epsilon_2}-\frac{\cos\epsilon_1}{\sin\epsilon_2}\frac{\partial}{\partial\epsilon_3}\right),$$

$$J_3=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\epsilon_1},\tag{12}$$

$$K_1=\frac{1}{i}\left(-\sin\epsilon^*_1\,\mathrm{ctg}\,\epsilon^*_2\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_1}+\cos\epsilon^*_1\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_2}+\frac{\sin\epsilon^*_1}{\sin\epsilon^*_2}\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_3}\right),$$

$$K_2=\frac{1}{i}\left(\cos\epsilon^*_1\,\mathrm{ctg}\,\epsilon^*_2\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_1}+\sin\epsilon^*_1\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_2}-\frac{\cos\epsilon^*_1}{\sin\epsilon^*_2}\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_3}\right),$$

$$K_3=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_1},$$

где $\epsilon_k=\phi_k+i\chi_k$, $\epsilon^*_k=\phi_k-i\chi_k$

и

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_k}-i\frac{\partial}{\partial\chi_k}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\epsilon^*_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_k}+i\frac{\partial}{\partial\chi_k}\right).$$

Генераторы (12) выполняют соотношения коммутаций (1). Операторы Казимира (9) получаются с помощью (12):

$$-\vec{J}^{\,2}=\frac{1}{\sin^2\epsilon_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\epsilon_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\epsilon_3^2}-2\cos\epsilon_2\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\frac{\partial}{\partial\epsilon_3}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\epsilon_2^2}+\operatorname{ctg}\epsilon_2\frac{\partial}{\partial\epsilon_2},$$

$$-\vec{K}^{\,2}=\frac{1}{\sin^2\epsilon^*_2}\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon_1^{*}}^2+\frac{\partial}{\partial\epsilon_3^{*}}^2-2\cos\epsilon^*\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_1}\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_3}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^*_2}{}^2+\operatorname{ctg}\epsilon^*_2\frac{\partial}{\partial\epsilon^*_2}. \qquad (13)$$

Матричные элементы унитарных неприводимых представлений являются собственными функциями операторов (13)

$$[\vec{J}^{\,2}-j(j+1)]\,T(g)^{jj^*}_{mm^*;nn^*}=0,$$

$$[\vec{K}^{\,2}-j^*(j^*+1)]\,T(g)^{jj^*}_{mm^*;nn^*}=0. \qquad (14)$$

Представление факторизуется в виде

$$T^{jj^*}_{mm^*;nn^*}=e^{-i(\epsilon_1 m+\epsilon^*_1 m^*+\epsilon_3 n+\epsilon^*_3 n^*)}R^{jj^*}_{mm^*;nn^*}(\cos\epsilon_2,\cos\epsilon^*_2)=$$

$$=e^{-i(\phi_3\kappa-\chi_3\lambda+\phi_1\mu-\chi_1\nu)}R^{jj^*}_{mm^*;nn^*}(\cos\epsilon_2,\cos\epsilon^*_2), \qquad (15)$$

где

$$m=\frac{1}{2}(\mu+i\nu),\quad n=\frac{1}{2}(\kappa+i\lambda). \qquad (16)$$

Подставляя уравнение (15) в (14) и вводя переменные $z=\cos\epsilon_2$, $z^*=\cos\epsilon^*_2$, получаем (14) в форме

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}-2z\frac{d}{dz}-\frac{m^2+n^2-2mnz}{1-z^2}+j(j+1)\right]R^{jj^*}_{mm^*;nn^*}(z,z^*)=0, \quad (17)$$

$$\left[(1-z^{*2})\frac{d^2}{dz^{*2}}-2z^*\frac{d}{dz^*}-\frac{m^{*2}+n^{*2}-2m^*n^*z^*}{1-z^{*2}}+j^*(j^*+1)\right]R^{jj^*}_{mm^*;nn^*}(z,z^*)=0. \quad (18)$$

Ограничимся временно случаем

$$\mathrm{Re}(m+n)\geq 0, \quad \mathrm{Re}(m-n)\geq 0. \quad (19)$$

В качестве двух независимых решений мы выбираем следующие[x/]:

$$P\equiv P^j_{mn}(z)=n^j_{mn}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\frac{m-n}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}F(-j+m,j+m+1;m-n+1;\frac{1-z}{2}), \quad (20)$$

$$Q\equiv Q^j_{mn}=n^j_{nm}\frac{\sin\pi(j-m)}{\sin\pi(j-n)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{-\frac{m-n}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}F(-j+n,j+n+1,-m+n+1;\frac{1-z}{2}), \quad (21)$$

где

$$n^j_{mn}=\frac{1}{\Gamma(m-n+1)}\sqrt{\frac{\Gamma(j+m+1)\Gamma(j-n+1)}{\Gamma(j+n+1)\Gamma(j-m+1)}},$$

[x/] Решения первого и второго родов уравнения (17) были изучены Эндюсом и Гансоном/7/. Наши решения относятся к функциям, использованным в/7/ следующим образом: $e^{mn}_j=\frac{\pi}{2\sin\pi(j-m)}\left[e^{\mp i\pi(j-m)}P^j_{mn}(z)-P^j_{m,-n}(z)\right]$, $d^{mn}_j=P^j_{mn}$ $\pm$ для $\mathrm{Im}z\gtrless 0$ (что касается функций $P^j_{m,-n}(-z)$ – см. формулу(30)).

Заметим, что, если $m-n=1,2,3\ldots$, гипергеометрическая функция в (21) превращается в бесконечность, однако нормировочный множитель в этих же точках будет нулем того же порядка. Таким образом, Q –функция остается конечной.

Общее решение уравнений (17) и (18) имеет вид

$$R^{jj^*}_{mm^*;\,nn^*} = c_1 P^* Q + c_2 P Q^* + c_3 P P^* + c_4 Q Q^*, \qquad (22)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые константы (независимые от z и z^*). Уравнения (17) и (18) имеют три особых точки (точки ветвления): $z=1,-1,\infty$. Разрезы мы направляем от 1 до бесконечности.

Очевидно, что $c_4 = 0$, так как этот член сингулярен в точке $z=1$. Исследуя поведение решения при $z\to -1, z\to\infty$, мы получим два уравнения для трех констант, c_1, c_2, c_3. К единичному элементу группы относится единичная матрица, т.е. мы должны иметь

$$\lim_{z\to 1} R^{jj^*}_{mm^*;\,nn^*} = \delta_{\mu\kappa}\,\delta(\nu-\lambda)\,.$$

Легко доказать, что этому требованию мы можем удовлетворять только в том случае, если мы положим $c_3 = 0$.

Потребовав конечность решения в точках $z=-1$, $z=\infty$, мы получим уравнения

$$c_1 + c_2 = 0, \quad e^{i\pi(n-m)} \frac{\sin\pi(j-m)}{\sin\pi(j-n)}\, c_1 + e^{-i\pi(n^*-m^*)} \frac{\sin\pi(j^*-m^*)}{\sin\pi(j^*-n^*)}\, c_2 = 0. \qquad (23)$$

Уравнение (23) имеет нетривиальное решение, если детерминант исчезает, т.е.

$$e^{i\pi(\mu-\kappa)} \frac{\sin\pi(j-n)\sin\pi(j^*-m^*)}{\sin\pi(j^*-n^*)\sin\pi(j-m)} = 1, \qquad (24)$$

где μ и κ определяются уравнением (16).

Мы имеем следующие возможности:

а) $\mu-\kappa$ – полуцелое число. Тогда (24) вообще не имеет решения, останется только тривиальное решение, т.е. матричные элементы превращаются в нуль. Это соответствует факту, что генераторы увеличивают и уменьшают значение μ на 0, +1, т.е. в данное неприводимое представление входят значения или только целые, или только полуцелые (детально см.[6]).

б) $\mu-\kappa$ – чётное число. В этом случае (24) приводит к условию

$$\sin \pi \left(\ell_0 - \frac{\mu-\kappa}{2} \right) \operatorname{sh} \pi \frac{\nu-\lambda}{2} = 0 ,$$

или

$$\ell_0 - \frac{\mu+\kappa}{2} = \text{целое.}$$

Таким образом, ℓ_0 – целое (полуцелое), если κ – целое (полуцелое),

в) $\mu-\kappa$ – нечётное число. Тогда (24) дает

$$\cos \pi \left(\ell_0 - \frac{\mu+\kappa}{2} \right) \operatorname{ch} \pi \frac{\nu-\lambda}{2} = 0 ,$$

итак,

$$\ell_0 - \frac{\mu+\kappa}{2} = \text{полуцелое.}$$

или ℓ_0–целое (полуцелое), если κ – целое (полуцелое). Таким образом, ℓ_0–целое (полуцелое) число, если собственное значение оператора M_3– целое (полуцелое) число. Для полуцелых ℓ_0 представление двузначное.

Решив (23) и выбирая подходящий нормировочный множитель, мы получим R– функции в следующем виде:

$$R^{jj^*}_{mm^*;nn^*} = \frac{N^j_{mn}}{4i\sqrt{\sin \pi(m-n)\sin \pi(m^*-n^*)}} \left[P^{j^*}_{m^*n^*}(z^*)Q^j_{mn}(z) - P^j_{mn}(z)Q^{j^*}_{m^*n^*}(z^*) \right], \quad (25)$$

$$(\operatorname{Re}(m \pm n) \geq 0)$$

где

$$N^{j}_{mn} = \sqrt{\frac{\sin\pi(j-n)\sin\pi(j^*-n^*)}{\sin\pi(j-m)\sin\pi(j^*-m^*)}}. \tag{26}$$

Обращение уравнения (25) для любых значений m и n (т.е. без ограничения $\operatorname{Re}(m\pm n)\geq 0$) является очень простым. Вместо перечисления свойств симметрий и R -функций для различных значений $\operatorname{sign}\operatorname{Re}(m\pm n)$ (как это делается в работе [7] для действительных m и n) мы перепишем R -функции для любых m и n в единой форме. Для этой цели вводим символ $\|u\|$ (где u - любое комплексное число), который определяется следующим образом:

$$\|u\| = \begin{cases} u, & \text{если} \quad \operatorname{Re} u \geq 0, \\ -u, & \text{если} \quad \operatorname{Re} u < 0. \end{cases}$$

Вводим величины

$$M = \frac{1}{2}(\|m+n\| + \|m-n\|), \quad N = \frac{1}{2}(\|m+n\| - \|m-n\|). \tag{27}$$

Нетрудно показать, что выражения (20), (21) для P-и Q- функций, а также уравнение (25) для R-функции остаются в силе и в общем случае, если сделать замену $m\to M$, $n\to N$. Таким образом, окончательная форма представления будет иметь вид

$$T^{jj^*}_{mm^*;nn^*} = e^{-i(\epsilon_1 m+\epsilon^*_1 m^*+\epsilon_3 n+\epsilon^*_3 n^*)} R^{jj^*}_{mm^*;nn^*}(\cos\epsilon_2, \cos\epsilon^*_2). \tag{28}$$

В дальнейшем мы будем писать m и n , но всегда подразумевается, что они заменены M и N соответственно во всех формулах. Исключение составляет экспоненциальный фактор в (28).

4. Поведение в особых точках

Выражения для функций P и Q, заданные уравнениями (20) и (21), приведут прямо к асимптотическому разложению в точке $z=1$. Ведущий член в этой точке имеет вид

$$R^{jj^*}_{mm^*;nn^*} \approx \frac{N^j_{mn}}{4i\sqrt{\sin\pi(m-n)\sin\pi(m^*-n^*)}} \Big[n^{j^*}_{m^*n^*} n^j_{nm} \frac{\sin\pi(j-m)}{\sin\pi(j-n)} \tau^{*\frac{m^*-n^*}{2}} \tau^{-\frac{m-n}{2}} - \tag{29}$$

$$- \text{комплексно сопряженное} \Big],$$

где $\tau = \dfrac{1-z}{2}$.

Исходя из асимптотики (29), пользуясь леммой Римана-Лебега, а также интегральной формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a x}{\operatorname{sh}\beta x} dx = \frac{\pi}{\beta} \operatorname{th} \frac{a\pi}{2\beta} \quad (\operatorname{Re}\beta > 0),$$

легко показать, что представления правильно нормированы, т.е.

$$T^{jj^*}_{mm^*;nn^*}(\epsilon,\epsilon^*)_{\epsilon=0} = \delta_{\mu\kappa}\delta(\nu-\lambda)$$

(детально см. [9]).

Применив аналитическое продолжение гипергеометрической функции, мы приходим к формулам

$$P^j_{mn}(z) = \frac{\sin\pi(j+n)}{\sin\pi(m+n)} \left[P^j_{m,-n}(-z) - Q^j_{m,-n}(-z) \right] =$$

$$= -\frac{\sin\pi(j-m)}{\sin\pi(m+n)} P^j_{-m,n}(z) + \frac{\sin\pi(j+n)\sin\pi(j-n)}{\sin\pi(j+m)\sin\pi(m+n)} Q^j_{-m,n}(-z), \tag{30}$$

$$Q^{j}_{mn}(z)=\frac{\sin\pi(j+m)\sin\pi(j-m)}{\sin\pi(j-n)\sin\pi(m+n)}P^{j}_{m,-n}(-z)-\frac{\sin\pi(j+n)}{\sin\pi(m+n)}Q^{j}_{m,-n}(-z)= \tag{30}$$

$$=\frac{\sin\pi(j-m)}{\sin\pi(m+n)}\left[-P^{j}_{-m,n}(-z)+Q^{j}_{-m,n}(-z)\right].$$

Подставляя выражения для P и Q в (25), мы получим поведение R-функции в точке $z=-1$.

$$R^{jj^*}_{mm^*;nn^*}(z,z^*)=\frac{i}{4}N^{j}_{mn}\frac{\sin\pi(j^*+n^*)}{\sin\pi(j-n)\sin\pi(m^*+n^*)}\sqrt{\frac{\sin\pi(m-n)}{\sin\pi(m^*-n^*)}}\left[P^{j^*}_{m^*,-n^*}(-z^*)Q^{j}_{m,-n}(-z)-\right.$$

$$\left.-\text{ комплексно сопряженное }\right].$$

В бесконечности $P-$ и Q -функции имеют следующее асимптотическое разложение:

$$P^{j}_{mn}(z)=n^{j}_{mn}\,r^{\frac{m-n}{2}}(1-r)^{\frac{m+n}{2}}\left[\alpha u_3+\beta u_4\right],$$

$$Q^{j}_{mn}(z)=n^{j}_{mn}\,r^{\frac{m-n}{2}}(1-r)^{\frac{m+n}{2}}e^{\pm i\pi(n-m)}\left[\frac{\sin\pi(j-m)}{\sin\pi(j-n)}\alpha u_3+\frac{\sin\pi(j+m)}{\sin\pi(j+n)}\beta u_4\right],$$

$$\left(r=\frac{1-z}{2},\ \operatorname{Im} r \gtrless 0\right)$$

где

$$u_3=(-r)^{j-m}F\left(-j+m,-j+n;-2j;\frac{1}{r}\right),\ u_4=(-r)^{-j-m-1}F\left(j+m+1,j+n+1;2j+2;\frac{1}{r}\right),$$

$$\alpha=\frac{\Gamma(m-n+1)\Gamma(2j+1)}{\Gamma(j-n+1)\Gamma(j+m+1)},\quad \beta=\frac{\Gamma(m-n+1)\,\Gamma(2j-1)}{\Gamma(-j-n)\Gamma(-j+m)}.$$

Для R-функции получим:

$$R^{jj^*}_{mm^*;\,nn^*}(z,z^*) = \frac{N^j_{mn}}{4i} e^{\pm i\pi(n-m)} \left| n^j_{mn} \right|^2 \sqrt{\frac{\sin\pi(m-n)}{\sin\pi(m^*-n^*)}} \cdot \frac{\sin 2\pi j}{\sin\pi(j+n)\sin\pi(j-n)} \cdot \tag{31}$$

$$\cdot\, \tau^{\frac{m-n}{2}} (1-\tau)^{\frac{m+n}{2}} \tau^{*\frac{m^*-n^*}{2}} (1-\tau^*)^{\frac{m^*+n^*}{2}} (\alpha^*\beta u^*_3 u_4 - \alpha\beta^* u_3 u^*_4), \quad (\mathrm{Im}\,\tau \gtrless 0).$$

5. Гармонический анализ функций на группе

Применяя уравнение (12), мы приходим к следующему выражению для меры Хаара (левой или правой) в терминах параметров (3):

$$\int f(g)\,dg = \int d\phi_1\, d\phi_2\, d\phi_3\, d\chi_1\, d\chi_2\, d\chi_3 \sin\epsilon_2 \sin\epsilon^*_2\ f(\phi,\chi), \tag{32}$$

где пределы интегрирования задаются уравнением (4). Скалярное произведение для основной серии определено формулой

$$(\Phi,\ \Psi) = \int dg\, \Phi^*(g)\, \Psi(g). \tag{33}$$

С помощью асимптотического выражения (31) можно получить соотношения оротогональности и полноты:

$$\int dg\, (T^{j'j'^*}_{m'm'^*;n'n'^*})^* T^{jj^*}_{mm^*;nn^*} = \frac{32\pi^4}{(2j+1)(2j^*+1)} \delta_{\mu'\mu}\, \delta_{\kappa'\kappa}\, \delta(\nu'-\nu)\delta(\lambda'-\lambda)\delta_{\ell'_0\ell_0}\delta(p'-p),$$

$$(p' \geq 0,\ p \geq 0)$$

где

$$j=\frac{1}{2}(\ell_0-1+ip),\quad m=\frac{\mu+i\nu}{2},\quad n=\frac{\kappa+i\lambda}{2}$$

(мера Пла́ншереля $(2j+1)(2j^*+1)$ на правой стороне играет роль "измерения" представления).

$$\frac{1}{32\pi^4}\sum_{\ell_0=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu,\kappa=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda(2j+1)(2j^*+1)(T(g')^{jj^*}_{mm^*;nn^*})T(g)^{jj^*}_{mm^*;nn^*}=\delta(g'-g),\tag{35}$$

где $\delta(g'-g)$ является δ -функцией на группе. В явном виде

$$\delta(g'-g)=\delta(\phi_1'-\phi_1)\delta(\chi_1'-\chi_1)\delta(\cos\phi_2'\operatorname{ch}\chi_2'-\cos\phi_2\operatorname{ch}\chi_2)\delta(\sin\phi_2'\operatorname{sh}\chi_2'-$$

$$-\sin\phi_2\operatorname{sh}\chi_2)\ \delta(\phi_3'-\phi_3)\delta(\chi_3'-\chi_3).$$

Уравнения (34) и (35) приводят к следующим выражениям для разложения Фурье квадратично интегрируемых функций на группе:

$$f(g)=\frac{1}{32\pi^4}\sum_{\ell_0=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu,\kappa=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda(2j+1)(2j^*+1)F(j,j^*;m,m^*;nn^*)T(g)^{jj^*}_{mm^*;nn^*}.\tag{36}$$

Обратная формула имеет вид

$$F(j,j^*;m,m^*;n,n^*)=\int dg\,f(g)(T(g)^{jj^*}_{mm^*;nn^*})^*.$$

Относительно сходимости и других тонких вопросов см. /9/.

6. Сферические функции

Сферические функции относительно подгруппы H группы G определены на однородном пространстве, имеющем некоторую фиксированную точку с малой группой H.

Обычно для группы Лоренца в качестве подгруппы **H** выбирают группу вращения $SO(3)$, что для однородного пространства приводит к гиперболоиду, на котором сферические функции определены. Ввиду параметризации, используемой в настоящей работе, мы имеем подгруппу $H = SO(2) \times SO(1,1)$, соответствующее однородное пространство которой мы должны найти. Для этой цели рассмотрим антисимметрический тензор, образованный трехмерными векторами $\vec{x}, y$.

$$S_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -y_1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ -y_2 & -x_3 & 0 & x_1 \\ -y_3 & x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (37)$$

В результате преобразования Лоренца $S_{\mu\nu}$ приобретает вид

$$S'_{\mu\nu} = L^{\alpha}_{\mu} L^{\beta}_{\nu} S_{\alpha\beta} . \qquad (38)$$

Построим двумерную комплексную сферу из величин $z_k = x_k + i y_k$, $z^*_k = x_k - i y_k$.

$$\vec{z}^{\,2} = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \vec{x}^{\,2} - \vec{y}^{\,2} + 2i \vec{x}\vec{y} = r^2 . \qquad (39)$$

Хорошо известно, что величины $\vec{x}^{\,2} - \vec{y}^{\,2}$, $\vec{x}\vec{y}$ обе инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца (38), так что поверхность сферы (39) инвариантна. Заметим, что легко показать, что уравнение (38) описывает преобразование, совпадающее с трехмерным представлением (в декартовых координатах) группы вращения, с тем отличием, что вещественные углы Эйлера следует заменить комплексными.

Однородность пространства будет проверена, если показать, что каждая точка на сфере может быть преобразована в точку $(0,0,r)$ (здесь мы исключаем случай, когда $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равны по величине и перпендикулярны. Тогда описанное свойство $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеет место в любой системе отсчёта. В то же время оба инварианта обращаются в нуль и комплексная сфера превращается в сферу нулевого радиуса, что на самом деле является сечением двух реальных конусов. "Северный полюс" этой поверхности есть начало, которое надо исключить).

Из инвариантности $\vec{x}\vec{y}$ видно, что если $\mathrm{Re}\,r$ и $\mathrm{Im}\,r$ имеют одинаковые (противоположные) знаки, то каждый из $\vec{x}$ и $\vec{y}$ образует острый (тупой) угол на сфере. Иными словами, при проведении преобразований Лоренца $\vec{x}$ и $\vec{y}$ не могут пройти через перпендикулярное положение. Этот факт хорошо известен из электродинамики.

Рассмотрим подгруппу, состоящую из пространственных поворотов вокруг третьей оси и преобразований Лоренца вдоль нее.

$$h = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\chi_1 & 0 & 0 & \mathrm{sh}\,\chi_1 \\ 0 & \cos\phi_1 & \sin\phi_1 & 0 \\ 0 & -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ \mathrm{ch}\,\chi_1 & 0 & 0 & \mathrm{ch}\,\chi_1 \end{bmatrix}, \quad (0 \le \phi_1 < 2\pi, \; -\infty < \chi_1 < \infty).$$

Подставляя это в уравнение (38), видим, что подгруппа H образует малую группу точки $z_0=(0,0,r)$ (и, наоборот, каждый элемент группы Лоренца, оставляющий точку z_0 неизменной, обладает приведенной выше формой). Итак, комплексная сфера имеет все необходимые свойства и может быть рассмотрена как область сферических функций.

Вводя полярные координаты обычным образом:

$$z_1 = r \sin\Theta \cos\Phi \,, \qquad z^*_1 = r^* \sin\Theta^* \cos\Phi^* \,,$$

$$z_2 = r \sin\Theta \sin\Phi \,, \qquad z^*_2 = r^* \sin\Theta^* \sin\Phi^* \,,$$

$$z_3 = r \cos\Theta \,, \qquad z^*_3 = r^* \cos\Theta^* \,,$$

с комплексными углами $\Theta = \Theta + i\,\Theta_2$, $\Phi = \Phi_1 + i\,\Phi_2$, мы охарактеризовали комплексную сферу с помощью четырех вещественных параметров. Оставшиеся два угла содержатся в подгруппе $H = SO(2)\times SO(1,1)$. Если написать инфинитезимальные генераторы в виде дифференциальных операторов на комплексной сфере, мы приходим к операторам Кизимира[x/]:

$$-\vec{J}^{\,2} = \frac{1}{\sin^2\Theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} + \operatorname{ctg}\Theta\,\frac{\partial}{\partial\Theta}\,, \quad \vec{K}^{\,2} = \frac{1}{\sin^2\Theta^*}\,\frac{\partial^2}{\partial\Phi^{*2}} + \frac{\partial}{\partial\Theta^{*2}} + \operatorname{ctg}\Theta^*\frac{\partial}{\partial\Theta^*}\,,$$

Сферические функции являются собственными функциями операторов $\vec{J}^{\,2}$ и $\vec{K}^{\,2}$

$$[\vec{J}^{\,2} - j(j+1)]\,f^{jj^*}_{mm^*}(\Theta,\Phi) = 0\,,\ [\vec{K}^{\,2} - j^*(j^*+1)]\,f^{jj^*}_{mm^*}(\Theta,\Phi) = 0\,.$$

[x/] Оператор Казимира всей группы можно рассматривать в аналогичном геометрическом смысле. Если написать элемент группы $SL(2,C)$ в форме

$$\begin{bmatrix} z_0 + i\,z_3 & z_1 + i\,z_2 \\ -z_1 + i\,z_2 & z_0 - i\,z_3 \end{bmatrix},$$

получим $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$, $z^{*2}_0 + z^{*2}_1 + z^{*2}_2 + z^{*2}_3 = 1$. Таким образом, пространство параметров топологически гомеоморфно трехмерной комплексной сфере. С помощью параметризации $z_0 = \cos\frac{\epsilon_2}{2}\cos\frac{\epsilon_3+\epsilon_1}{2}$, $z_1 = \sin\frac{\epsilon_2}{2}\sin\frac{\epsilon_3-\epsilon_1}{2}$, $z_2 = \sin\frac{\epsilon_2}{2}\cos\frac{\epsilon_3-\epsilon_1}{2}$, $z_3 = \cos\frac{\epsilon_2}{2}\sin\frac{\epsilon_3+\epsilon_1}{2}$ операторы Лапласа $\frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\mu\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu$, $\frac{1}{\sqrt{g^*}}\,\partial^*_\mu\sqrt{g^*}\,g^{\mu\nu\,*}\partial^*_\nu$ на этой сфере приводят к операторам Казимира (13).

Регулярным решением этих уравнений являются $(T^{jj^*}_{mm^*;00}(\Phi,\Theta,0))^*$. Выбирая подходящий нормировочный множитель, мы получим

$$f^{jj^*}_{mm^*}(\Theta,\Phi)=\sqrt{\frac{(2j+1)(2j^*+1)}{8\pi^2}}\cdot(T^{jj^*}_{mm^*,00}(\Phi,\Theta,0))^*. \qquad (40)$$

С помощью рекуррентных соотношений для сферических функций в[9] показано в инфинитезимальной форме, что они действительно преобразуются по неприводимым представлениям группы Лоренца:

$$T(g)f^{jj^*}_{nn^*}(\vec{z})=f^{jj^*}_{nn^*}(g^{-1}\vec{z})=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\, T^{jj^*}_{mm^*,nn^*}(g)\,f^{jj^*}_{mm^*}(\vec{z}).$$

Скалярное произведение функций Φ и Ψ, определенных на комплексной сфере, задается как

$$\int d\Omega\,\Phi^*(\Omega)\Psi(\Omega)=\int d\Phi_1\,d\Phi_2\,d\Theta_1\,d\Theta_2\sin\Theta\sin\Theta^*\,\Phi^*(\Omega)\Psi(\Omega)$$

с пределами интегрирования

$$0\le\Phi_1<2\pi, \qquad -\infty\le\Phi_2<\infty,$$

$$0\le\Theta_1<\pi, \qquad -\infty<\Theta_1<\infty.$$

Соотношение оротогональности и нормировки сферических функций имеет вид

$$\int d\Omega\,(f^{j'j'^*}_{m'm'^*}(\Theta,\Phi))^*f^{jj^*}_{mm^*}(\Theta,\Phi)=\delta_{\mu'\mu}\,\delta(\nu'-\nu)\,\delta_{\ell_0'\ell_0}\,\delta(p'-p),\ (p'\ge0,\,p\ge0),$$

$$\sum_{\ell_0=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\,(f^{jj^*}_{mm^*}(\Theta',\Phi'))^*f^{jj^*}_{mm^*}(\Theta,\Phi)=\delta(\Omega'-\Omega),$$

где $\delta(\Omega'-\Omega)$ является δ-функцией на комплексной сфере, именно:

$$\delta(\Omega'-\Omega)=\delta(\Phi_1'-\Phi_1)\delta(\Phi_2'-\Phi_2)\delta(\cos\Theta_1'\,\mathrm{ch}\,\Theta_2'-\cos\Theta_1\,\mathrm{ch}\,\Theta_2)\delta(\sin\Theta_1'\,\mathrm{sh}\,\Theta_2'-$$
$$-\sin\Theta_1\,\mathrm{sh}\,\Theta_2).$$

7. Связь с базисом 0(3)

Полученные матричные элементы имеют более простой вид по сравнению с матричными элементами, вычисленными в базисе 0(3) (т.е. в базисе, где вместо N_3 и M_3 заданы $\vec{M}^2 = \ell(\ell+1)$ и $M_3 = \mu$). Длинные формулы в базисе 0 (3) возникают после умножения на коэффициенты перехода между двумя системами квантовых чисел $\langle m^* m | \ell \mu \rangle = \langle \mu\nu | \ell\mu \rangle$ и последующего интегрирования. Эти коэффициенты представляют собой в определенном смысле аналитическое продолжение коэффициентов "векторного сложения", т.к. формально мы имеем вначале состояния, являющиеся собственными значениями операторов комплексных угловых моментов $\vec{J}^2$ и $\vec{K}^2$ и их проекций на ось "3", J_3 и K_3, и хотим перейти к состояниям, которые являются собственными функциями генераторов $\vec{M}^2 = (\vec{J} + \vec{K})^2$ и $M_3 = J_3 + K_3$. Явный вид коэффициентов получен в работе /10/.

Как это видно из формулы (2), в нашем базисе матричный элемент буста вдоль оси "3" имеет тривиальный вид экспоненты. Поэтому в базисе 0(3) он приобретает вид

$$\langle \ell', \mu, \ell_0 p \,|\, e^{iaN_3} \,|\, \ell\mu, \ell_0 p \rangle \equiv d^{\ell_0 p}_{\ell' \ell \mu}(a) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \, e^{ia\nu} \langle \ell'\mu | \mu\nu \rangle \langle \mu\nu | \ell\mu \rangle .$$

Авторы выражают благодарность докторам М. Либерману и М. Шефтелю за полезные дискуссии.

Литература

1. А.З. Долгинов. ЖЭТФ, 30, 746 (1956); ЖЭТФ, 3, 589 (1956); А.З. Долгинов, И.Н.Топтыгин. ЖЭТФ, 35, 798 (1958); 37, 1441 (1959); 8, 550 (1958); 10, 1022 (1959).
2. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 19, 1209 (1964).
3. М.А. Либерман, Я.А. Смородинский, М.Б. Шефтель. ЯФ, 7, 202 (1968).
4. Г.И. Кузнецов, А.А. Макаров, М.А. Либерман, Я.А. Смородинский. ЯФ, 10, №3 (1969).
5. S. Ström. Arkiv för Fysik., 29, 467 (1965).
6. M. Huszar, Ya.A. Smorodinsky. JINR Preprint, E2-4225, Dubna, 1968.
7. M. Andrews, J. Gunson. Journ. of Math.Phys., 5, 1391(1964).
8. Г. Бейтмен А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, гипергеометрическая функция, "Наука", М., 1965.
9. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, И.Я. Виленкин. Обобщенные функции, том. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней проблемы представлений. М., ГИФМЛ, 1962.
10. Г.И. Кузнецов, М.А. Либерман, А.А. Макаров, Я.А. Смородинский. ЯФ, 10, 644 (1969).
11. A. Sebestyén, K. Szegö, K. Tóth. Preprint of the Central Research Institute of Physics, Budapest, N. 18/1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 мая 1970 года.