

ВИБ. ЧИТ. ЗЕЛ.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

С 324.16

E-912

P2 - 5104



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.В. Ефимов, Ш.З. Сельцер

ГРАДИЕНТНО-ИНВАРИАНТНАЯ
НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ
СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1970

P2 - 5104

Г.В. Ефимов, Ш.З. Сельцер

ГРАДИЕНТНО-ИНВАРИАНТНАЯ
НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ
СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено в "Annals of Physics"

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1. В в е д е н и е

В настоящее время можно считать, что нелокальная квантовая теория скалярного поля, в которой отсутствуют расходимости, обычно присущие локальной теории, уже построена ^{/1/}. Оказалось возможным найти S -матрицу, удовлетворяющую общим принципам квантовой теории поля: релятивистской ковариантности, унитарности и макропричинности. Однако при применении методов нелокальной теории к реальным физическим заряженным полям возникает проблема сохранения градиентной инвариантности теории. В нелокальной теории, где связь между полями осуществляется фактически в некоторой малой области, требованию инвариантности относительно локального градиентного преобразования удовлетворить не просто. Имеющиеся схемы построения градиентно-инвариантных нелокальных теорий (см. ^{/2/} и ссылки там на более ранние работы), как нам кажется, не являются удовлетворительными.

В настоящей работе предлагается вариант теории, описывающей электромагнитные и слабые взаимодействия лептонов. Построенная S -матрица конечна, унитарна, градиентно-инвариантна и макропричинна в каждом порядке теории возмущений по заряду и константе слабого взаимодействия.

В основе предлагаемой схемы лежит следующая физическая идея:

нелокальность входит в теорию только через нейтральные поля нейтрино; поля заряженных лептонов и электромагнитное поле остаются локальными.

Существуют два способа введения нелокальности в теорию. Один способ основан на предположении, что в малых пространственно-временных областях между локальными полями возможны другие виды причинной связи в отличие от тех, которые характерны для больших масштабов пространства и времени. Математически это может быть осуществлено следующим образом. Свободное поле нейтрино $\nu(x)$ считается локальным, однако во взаимодействии оно связано нелокально с остальными локальными заряженными полями. Именно, в лагранжиан взаимодействия входит не локальное поле $\nu(x)$, а поле

$$N(x) = \int d^4 y K(x-y) \nu(y), \quad (1)$$

где $K(x-y)$ - формфактор, являющийся обобщенной функцией из подходящего пространства нелокальных обобщенных функций ^{/1/}. Эффективно это приводит к тому, что в импульсном пространстве формфактор $\tilde{K}(p^2)$ изменяет только пропагатор нейтринного поля

$$\frac{1}{\hat{p} + i\epsilon} \rightarrow \frac{[\tilde{K}(p^2)]^2}{\hat{p} + i\epsilon}, \quad (2)$$

а пропагаторы заряженных лептонных полей не изменяются.

Другой возможный способ основан на следующем. Заметим, что пропагатор свободного нейтрино

$$S_\nu^0(x-y) = \langle 0 | T(\nu(x) \bar{\nu}(y)) | 0 \rangle \quad (3)$$

не определен при совпадающих аргументах x и y . Постулат нелокальности состоит в том, что правая часть (3) не определена не только в точке $x = y$, но и в некоторой малой пространственно-временной области в окрестности точки $x = y$. Математически это означает, что в правую часть (3) можно добавить нелокальную обобщенную функцию из подходящего пространства нелокальных обобщенных функций ^{/1/}. Такая модификация свободного пропагатора нейтрино физически должна означать изменение природы нейтрино, которое становится как бы нелокальным. К сожалению, кроме этих туманных рассуждений, в настоящее время ничего нельзя сказать о природе возникающего формфактора. Эффективно и в этом случае изменяется свободный пропагатор нейтрино:

$$\frac{1}{\hat{p} + i\epsilon} \rightarrow \frac{V(p^2)}{\hat{p} + i\epsilon}. \quad (4)$$

В данной работе мы примем именно этот путь введения нелокальности в теорию.

Различие между (2) и (4) состоит в том, что при вещественных p^2 формфактор $[\tilde{K}(p^2)]^2$ в (2) положителен, а формфактор $V(p^2)$ может быть знакопеременным, что может существенно уменьшить число расходящихся диаграмм в теории возмущений.

Введение в теорию такого "избирательного" постулата нелокальности, связывающего появление нелокальности с нейтральным полем нейтрино, не устраняет всех ультрафиолетовых расходимостей из ряда теории возмущений, однако теория становится перенормируемой. Оказывается, что расходится только конечное число типов неприводимых диаграмм Фейнмана, состоящих из замкнутых циклов, образованных пропагаторами заряженных лептонов. При устранении появляющихся расходимостей становится необходимым ввести несколько контрчленов, описывающих чисто нейтрино-нейтринное взаимодействие.

Таким образом, полный лагранжиан, описывающий электромагнитное и слабое взаимодействия лептонов, должен содержать дополнительные члены, описывающие чисто $\nu-\nu$ взаимодействия с новыми константами связи, о величине которых в рамках предлагаемой схемы ничего сказать нельзя. Следует заметить, что предположение о существовании чисто $\nu-\nu$ взаимодействия, вытекающее из анализа экспериментальных данных, было также сделано в работе /3/.

1. Постановка задачи

Исходный лагранжиан, описывающий электромагнитное и слабое взаимодействия лептонов, выберем обычным образом ^{x/}:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{em}(x) + \mathcal{L}_w(x), \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{2} : [\partial_\beta A_\alpha(x)] [\partial_\beta A_\alpha(x)] : + \sum_j \bar{\Psi}_j(x) (i\hat{\partial} - m_j) \Psi_j(x). \quad (1.2)$$

$A_\alpha(x)$ - электромагнитное поле. Суммирование в (1.2) проводится по всем рассматриваемым фермионным полям ($j = e, \mu, \nu_e, \nu_\mu$). Далее. введем обозначения: $\Psi_e(x) \equiv e(x)$, $\Psi_\mu(x) \equiv \mu(x)$, $\Psi_{\nu_e}(x) \equiv \nu_e(x)$, $\Psi_{\nu_\mu}(x) \equiv \nu_\mu(x)$.

$$\mathcal{L}_{em}(x) = e : (\bar{l}(x) \hat{A}(x) l(x)), \quad (1.3)$$

^{x/} Нами принята следующая система обозначений:

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}, \quad \gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5), \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

$$g_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \quad g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1,$$

$$\hat{p} = p_\alpha \gamma_\alpha = p_0 \gamma_0 - \vec{p} \vec{\gamma}, \quad \vec{p} k = p_0 \vec{k} - \vec{p} k.$$

$$\mathcal{L}_w(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} : (\bar{\ell}(x) \mathbf{O}_a \nu(x)) (\bar{\nu}(x) \mathbf{O}_a \ell(x)) : . \quad (1.4)$$

Здесь принята запись лептонных полей в форме двухкомпонентного спинора:

$$\ell(x) = \ell^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix}, \quad \nu(x) = \nu^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{pmatrix} . \quad (1.5)$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать несколько иную запись лагранжиана слабого взаимодействия. Воспользовавшись тождествами Фирца (см. /6/), получим:

$$\mathcal{L}_w(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1}^2 (\bar{\ell}^{(i)}(x) \mathbf{O}_a \ell^{(j)}(x)) J_a^{(ij)}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\ell}(x) \mathbf{O}_a \mathbf{J}_a(x) \ell(x)). \quad (1.6)$$

Здесь $\mathbf{J}_a(x)$ является 2×2 матрицей:

$$\mathbf{J}_a(x) = \mathbf{J}_a^{(ij)}(x) = \begin{pmatrix} J_{1a}(x) & J_{3a}(x) \\ J_{3a}^+(x) & J_{2a}(x) \end{pmatrix} = \mathbf{D}_a(x) + (\vec{\mathbf{B}}_a(x) \vec{\tau}). \quad (1.7)$$

$$\mathbf{J}_{1a}(x) = (\bar{\nu}_e(x) \mathbf{O}_a \nu_e(x)), \quad \mathbf{J}_{2a}(x) = (\bar{\nu}_\mu(x) \mathbf{O}_a \nu_\mu(x)), \quad (1.8)$$

$$\mathbf{J}_{3a}(x) = (\bar{\nu}_\mu(x) \mathbf{O}_a \nu_e(x)),$$

$$\mathbf{D}_a(x) = \frac{1}{2} [J_{1a}(x) + J_{2a}(x)],$$

$$\vec{\mathbf{B}}_a(x) = \left[\frac{J_{3a}(x) + J_{3a}^+(x)}{2}, \frac{J_{3a}(x) - J_{3a}^+(x)}{2i}, \frac{J_{1a}(x) - J_{2a}(x)}{2} \right]. \quad (1.9)$$

$\vec{\tau}$ - матрицы Паули.

Достоинство представления (1.6) состоит в том, что оно отражает инвариантность слабого взаимодействия относительно замен $e \rightarrow \mu$ и $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, т.е. универсальность слабого взаимодействия лептонов, и позволяет учесть единым образом все многообразие расходящихся диаграмм в ряду теории возмущений.

Наш постулат состоит в том, что нейтринное поле $\nu(x)$, входящее в лагранжиан слабого взаимодействия $\mathcal{L}_w(x)$, делает теорию нелокальной. По определению, мы считаем, что причинная функция нейтринного поля определяется равенством

$$S_\nu^0(x-y) = \langle 0 | T(\nu(x) \bar{\nu}(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4k e^{-ik(x-y)} \frac{V(-k^2) \hat{k}}{-k - i\epsilon}. \quad (1.10)$$

Будем предполагать, что формфактор $V(-k^2)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $V(-k^2)$ - целая функция в комплексной k^2 -плоскости порядка роста $\rho < 1$;
- 2) $V(-k^2)$ - вещественна при вещественных k^2 ;
- 3) $V(0) = 1$;

(1.11)

$$4) V(-k^2) = O\left(\frac{1}{(k^2)^{\frac{\sigma+1}{2}}}\right) \quad \text{при } k^2 \rightarrow -\infty, \quad (1.12)$$

где σ - достаточно большое положительное число;

- 5) в евклидовой метрике

$$S_\nu^0(x_E) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_E V(k_E^2) \hat{k}_E}{k_E^2} e^{-ik_E x_E} = \hat{x}_E O((x_E^2)^\gamma) \quad (1.13)$$

при $x^2 \rightarrow 0$, где $\gamma \geq 2$ - некоторое положительное число. Заметим, что условию (1.13) можно удовлетворить только в том случае, когда $V(k_E^2)$ является знакопеременной вещественной функцией.

Хронологические свертки заряженных лептонных полей и электромагнитного поля определяются обычным образом:

$$D_{\alpha\beta}^c(x-y) = \langle 0 | T(A_\alpha(x) A_\beta(y)) | 0 \rangle = \frac{g_{\alpha\beta}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k e^{-ik(x-y)}}{-k^2 - i\epsilon}, \quad (1.14)$$

$$S_{\alpha\beta}^{(ij)}(x-y) = \delta_{ij} S_{\alpha\beta}^{(i)}(x-y) = \langle 0 | T(\ell^{(i)}(x) \bar{\ell}^{(j)}(y)) | 0 \rangle = \frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k (m_j \hat{1} + \hat{k})}{m_j^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-ik(x-y)}. \quad (1.15)$$

где m_j принимает два значения: $m_1 = m_e$, $m_2 = m_\mu$.

Очевидно, что полный лагранжиан системы полей (1.1) инвариантен при градиентных преобразованиях

$$\ell(x) \rightarrow e^{i\theta f(x)} \ell(x), \quad \bar{\ell}(x) \rightarrow e^{-i\theta f(x)} \bar{\ell}(x),$$

$$A_\alpha(x) \rightarrow A_\alpha(x) + \partial_\alpha f(x), \quad (1.16)$$

$$\nu(x) \rightarrow \nu(x)$$

при $\square f(x) = 0$, поскольку нейтральное нейтринное поле не преобразуется при градиентном преобразовании.

Формально S -матрица может быть записана в форме T -произведения:

$$S = T \exp \left\{ i \int d^4 x [\mathcal{L}_{em}(x) + \mathcal{L}_w(x)] \right\}. \quad (1.17)$$

Разложим S -матрицу в ряд по константам взаимодействия e и G :

$$S = 1 + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n, \quad (1.18)$$

$$S_n = i^{n-1} \int dx_1 \dots \int dx_n T \left\{ \prod_{j=1}^n [\mathcal{L}_{em}(x_j) + \mathcal{L}_w(x_j)] \right\}. \quad (1.19)$$

Перейдем к нормально упорядоченным произведениям операторов поля, согласно теореме Вика, где под "хронологическими" свертками операторов будем понимать (1.10), (1.14), (1.15). Мы получим по структуре обычный ряд теории возмущений с единственным отличием, что обычные причинные функции нейтринных полей заменяются на функции (1.10), т.е. в импульсном пространстве происходит следующая замена:

$$\frac{\hat{k}}{-k^2 - i\epsilon} \rightarrow \frac{V(-k^2)\hat{k}}{-k^2 - i\epsilon}.$$

Поставим следующую задачу: как ввести промежуточную регуляризацию теории и какие перенормировки необходимо провести, чтобы получить конечную, унитарную, градиентно-инвариантную, макропричинную S-матрицу, описывающую электромагнитное и слабое взаимодействия лептонных полей?

2. Классификация диаграмм теории возмущений

В ряду теории возмущений будут присутствовать три типа диаграмм: диаграммы с чисто слабыми вершинами, со слабыми и электромагнитными и чисто электромагнитными вершинами. Последние диаграммы здесь рассматриваться не будут, поскольку они представляют хорошо известную перенормируемую электродинамику и перенормируются обычным образом (см., например, /4,5/).

Проведем, следуя /4,5/, классификацию всех диаграмм с точки зрения их сходимости. Предположим, что существует возможность перехода к евклидовой метрике (см. следующий параграф) и о сходимости диаграммы D можно судить по величине так называемого индекса диаграммы $\omega(D)$. Согласно Боголюбову /4/

$$\omega(D) = \sum_i \omega_i + 4 - \frac{1}{2} \sum_{L_{\text{ext}}} (r_{L_{\text{ext}}} + 2). \quad (2.1)$$

В первом члене суммирование проводится по всем вершинам рассматриваемой диаграммы D , в последнем члене — по всем внешним линиям данной диаграммы D . Величина ω_i называется индексом i -той вершины и определяется равенством

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_j (r_j + 2) - 4, \quad (2.2)$$

причем суммирование проводится по всем линиям, входящим в i -тую вершину. Величина r связана со степенью роста пропагатора данной частицы при $p^2 \rightarrow -\infty$ и определяется из равенства

$$(p^2)^{\frac{r+2}{2}} \Pi(p^2) = O(1) \quad \text{при} \quad p^2 \rightarrow -\infty,$$

где $\Pi(p^2)$ — некоторый пропагатор.

В исследуемом нами случае имеется три типа пропагаторов: пропагаторы заряженных лептонов (e и μ), пропагаторы нейтрино (ν_e и ν_μ) и пропагатор фотонного поля (A). Величины r для этих пропагаторов равны соответственно

$$r^{(l)} = 1, \quad r^{(\nu)} = -\sigma, \quad r^{(A)} = 0, \quad (2.3)$$

где σ — достаточно большое положительное число.

В рассматриваемой теории присутствуют два типа вершин, соответствующих электромагнитному и слабому взаимодействиям. Графически изобразим их следующим образом:

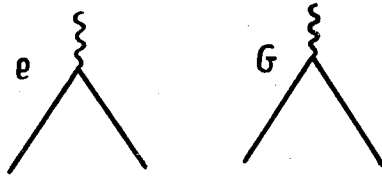





Рис. 1

Здесь введены условные обозначения:  - фотонная линия,  - линия заряженного лептона,  - линия нейтрино. Индексы вершин легко подсчитать:

$$\omega_{em} = 0, \quad \omega_w = -\sigma + 1. \quad (2.4)$$

Простой анализ показывает, что все примитивные диаграммы с одной по крайней мере внутренней нейтринной линией сходятся. Все расходящиеся примитивные диаграммы приведены на рис. 2.

Все остальные примитивные и неприводимые диаграммы сходятся. Следует заметить, что в рассматриваемой теории интегралы, соответствующие любой неприводимой диаграмме D , сходятся, если индекс этой диаграммы $\omega(D)$ меньше нуля. Это является следствием условия (1.13).

Таким образом, имеется конечное число типов расходящихся диаграмм. Следовательно, рассматриваемая нами теория перенормируема.

3. Метод регуляризации

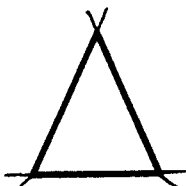
Построение S -матрицы по теории возмущений невозможно без введения некоторой промежуточной несобственной регуляризующей процедуры. Нелокальный пропагатор нейтрино регуляризуем функцией R^δ (подробнее см. ^{1/}):



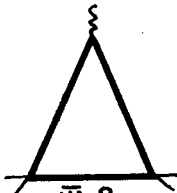
II.1. $\omega(\mathcal{D})=2$



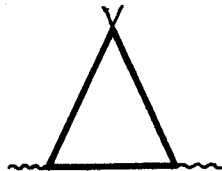
II.2. $\omega(\mathcal{D})=0$



III.1.

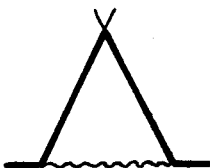


III.2.



III.3

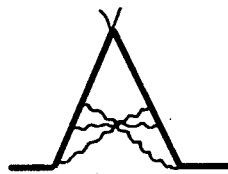
$\omega(\mathcal{D})=1$



III.4.

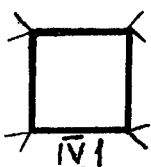


III.5

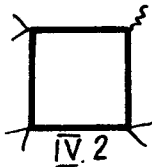


III.6

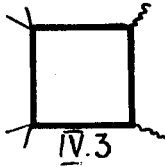
$\omega(\mathcal{D})=0$



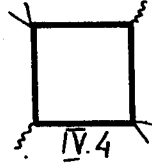
IV.1



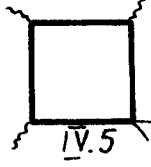
IV.2



IV.3



IV.4



IV.5

$\omega(\mathcal{D})=0$

Рис. 2

$$\operatorname{reg} S_{\nu}^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 k \frac{V(-k^2) \hat{k}}{-k^2 - i\epsilon} R^{\delta}(k^2) e^{-i(x-y) \cdot k} \quad (3.1)$$

Функцию $R^{\delta}(z)$ выберем в следующем виде:

$$R^{\delta}(z) = \exp \left\{ -\delta (z + iM^2)^{1/2 + \nu} e^{-i\pi\sigma} \right\}, \quad (3.2)$$

где $0 < \nu < \sigma < \frac{1}{2}$, а M^2 - некоторый параметр. Для регуляризующей функции $R^{\delta}(z)$ при больших $|z|$ справедливы оценки

$$|R^{\delta}(z)| \approx e^{-\delta|z|^{\nu+1/2}}, \quad -\pi a_2 < \arg z < \pi(1+a_1),$$

$$|R^{\delta}(z)| \approx e^{\delta|z|^{\nu+1/2}}, \quad \pi(1+a_1) < \arg z < 2\pi(1-\frac{a_2}{2}),$$

где

$$a_1 = \frac{2(\sigma-\nu)}{1+2\nu} > 0, \quad a_2 = \frac{1-2\sigma}{1+2\nu} > 0.$$

Иными словами, в комплексной плоскости z $R^{\delta}(z)$ аналитична и убывает, как экспонента порядка $\rho_1 = \frac{1}{2} + \nu < 1$ по $|z|$ в верхней полуплоскости, включая вещественную ось. Поскольку $V(-k^2)$ - целая функция порядка $\rho < 1$, то, выбирая $\rho < \frac{1}{2} + \nu < 1$, получим, что интегралы от функции $\operatorname{reg} S_{\nu}^c(x-y)$ хорошо сходятся при $\delta > 0$. Перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$ можно, повернув контур интегрирования по k_0 на $\frac{\pi}{2}$, что можно сделать при $\delta > 0$. После поворота можно положить $\delta = 0$, так как интегралы будут сходитья благодаря убыванию формфактора $V(-k^2)$ при $k^2 \rightarrow -\infty$. Иными словами, введение регуляризующей процедуры R^{δ} обеспечивает переход к евклидовой метрике.

Фотонную причинную функцию (1.14) регуляризуем обычным образом /4/:

$$\text{reg } D_{\alpha\beta}^{\circ}(x-y) = \frac{g_{\alpha\beta}}{(2\pi)^4 i} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} \left[\frac{1}{-k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{M^2 - k^2 - i\epsilon} \right]. \quad (3.3)$$

Используя градиентно-инвариантную процедуру Паули-Вилларса /4/, спинорные причинные функции заряженных лептонных полей будем регуляризовать не по отдельности, а замкнутыми спинорными циклами. Произведения, соответствующие замкнутым циклам

$$\text{Sp} [\Gamma S_{m_1}^{\circ}(x_1-x_2) \Gamma S_{m_2}^{\circ}(x_2-x_3) \Gamma \dots \Gamma S_{m_{n-1}}^{\circ}(x_{n-1}-x_n) \Gamma S_{m_n}^{\circ}(x_n-x_1)], \quad (3.4)$$

где Γ - матрица, описывающая соответствующую вершину (в нашем случае Γ равно γ_{α} или $\gamma_{\alpha}(1+\gamma_5)$), заменяются выражениями

$$\sum_j c_j \text{Sp} [\Gamma S_{m_1 \Lambda_j}^{\circ}(x_1-x_2) \Gamma S_{m_2 \Lambda_j}^{\circ}(x_2-x_3) \Gamma \dots \Gamma S_{m_n \Lambda_j}^{\circ}(x_n-x_1)], \quad (3.5)$$

где $S_{m \Lambda_j}^{\circ}$ - причинная фермионная функция с массой $m \Lambda_j$:

$$S_{m \Lambda_j}^{\circ}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{m \Lambda_j + \hat{k}}{m^2 \Lambda_j^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-ik(x-y)} d^4 k, \quad (3.6)$$

Λ_j - безразмерный параметр, регуляризирующий замкнутый цикл (3.4).

Далее требуется, чтобы коэффициенты c_j в сумме (3.5) удовлетворяли необходимому числу соотношений типа

$$\sum_{j=0}^N c_j = 0, \quad \sum_{j=0}^N c_j \Lambda_j^2 = 0, \quad \sum_{j=0}^N c_j \Lambda_j^4 = 0, \quad (3.7)$$

где $c_0=1$, $\Lambda_0=1$, N - некоторое конечное число. В нашем случае достаточно ограничиться первыми двумя условиями ($N \leq 2$).

Введенных регуляризаций достаточно, чтобы сходились все интегралы, соответствующие любым диаграммам, появляющимся в рассматриваемой нами теории. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы вычислить все интегралы, определяющие расходящиеся диаграммы, и подобрать контрчлены, устраняющие ультрафиолетовые расходимости из ряда теории возмущений.

4. Второй порядок теории возмущений

Рассмотрим последовательно все диаграммы, приведенные на рис.2, и выпишем соответствующие контрчлены, которые вычислим с помощью описанной выше градиентно-инвариантной регуляризации. Квадратично расходящаяся диаграмма **П.1** на рис. 2 на самом деле состоит из трех диаграмм:



Рис. 3

Однако с помощью представления лагранжиана взаимодействия в форме (1.6) возможно учесть их единым образом.

Элемент S -матрицы, соответствующий диаграмме **П.1**, записывается в виде

$$S_{2}^{(П.1)} = -i \left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \iint dx_1 dx_2 J_{\alpha}^{(1)}(x_1) J_{\beta}^{(1)}(x_2) \times \\ \times \text{reg Sp} \{ O_{\alpha} S^{(1)}(x_1 - x_2) O_{\beta} S^{(1)}(x_2 - x_1) \}. \quad (4.1)$$

Определим функцию

$$\text{reg } \Pi_{\alpha\beta}^{(ij)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{ik(x-y)} \text{reg } \Pi_{\alpha\beta}^{(ij)}(k),$$

$$\text{reg } \Pi_{\alpha\beta}^{(ij)}(k) = -i \int dx e^{-ikx} \text{reg Sp} \{ O_\alpha S^{(j)}(x) O_\beta S^{(i)}(-x) \}. \quad (4.2)$$

Последний интеграл соответствует петле с двумя различными массами,

m_i и m_j :

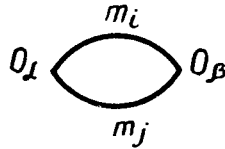


Рис. 4

Вычисление дает

$$\begin{aligned} \text{reg } \Pi_{\alpha\beta}^{(ij)}(k) = & -8\pi^2 g_{\alpha\beta} (m_i^2 + m_j^2) \left[\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \frac{\ln \Lambda_2^2 - \ln \Lambda_1^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\Lambda_2^2 \ln \Lambda_2^2 - \Lambda_1^2 \ln \Lambda_1^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} \right] - 16\pi^2 (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) \times \\ & \times \left[-\frac{1}{6} \frac{\Lambda_2^2 \ln \Lambda_1^2 - \Lambda_1^2 \ln \Lambda_2^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} + \int_0^1 du u(1-u) \ln \frac{u m_i^2 + (1-u) m_j^2 - u(1-u) k^2}{u m_i^2 + (1-u) m_j^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Λ_1 и Λ_2 - два параметра, определяющих регуляризацию Паули-Вилларса. Переходя к пределу $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 = \Lambda$, получим для расходящейся части

$\text{reg } \Pi_{\alpha\beta}^{(ij)}(k)$ выражение

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha\beta}^{(1j)}(k) = & -8\pi^2 g_{\alpha\beta} (m_i^2 + m_j^2) [\Lambda^2 - \ln \Lambda^2 - 1] + \\ & + \frac{8\pi^2}{3} (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) [\ln \Lambda^2 - 1], \end{aligned} \quad (4.4)$$

или в x -представлении:

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha\beta}^{(1j)}(x-y) = & -8\pi^2 \{ g_{\alpha\beta} (m_i^2 + m_j^2) [\Lambda^2 - \ln \Lambda^2 - 1] + \\ & + \frac{1}{3} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) [\ln \Lambda^2 - 1] \} \delta(x-y). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для того, чтобы устранить эти расходящиеся члены из S -матрицы, необходимо ввести в лагранжиан взаимодействия дополнительный член вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w^{(1)}(x) = & J_\alpha^{(1j)}(x) [h_1 g_{\alpha\beta} (m_i^2 + m_j^2) + h_2 (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square)] J_\beta^{(1j)}(x) \\ = & h_1 \text{Sp} \{ M J_\alpha(x) J_\alpha(x) \} + h_2 \text{Sp} \{ J_\alpha (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_\beta(x) \}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $M = \begin{pmatrix} m_e^2 & 0 \\ 0 & m_\mu^2 \end{pmatrix}$. Если перейти к обычным обозначениям, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w^{(1)}(x) = & h_1 \{ m_e^2 J_{1\alpha}(x) J_{1\alpha}(x) + m_\mu^2 J_{2\alpha} J_{2\alpha}(x) + (m_e^2 + m_\mu^2) J_{3\alpha}(x) J_{3\alpha}^+(x) \} + \\ & + h_2 \{ J_{1\alpha}(x) (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_{1\beta}(x) + J_{2\alpha}(x) (\partial_\alpha \partial_\beta - \\ & - g_{\alpha\beta} \square) J_{2\beta}(x) + 2 J_{3\alpha} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_{3\beta}^+(x) \}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, в лагранжиане взаимодействия появляются дополнительные члены, описывающие чисто нейтрино-нейтринное взаимодействие. О величине новых констант взаимодействия h_1 и h_2 в рамках нашей процедуры ничего сказать нельзя. Устранение расходимостей в диаграммах второго порядка II.1. связано с перенормировкой этих новых констант взаимодействия h_1 и h_2 .

Появление в теории чисто $\nu-\nu$ взаимодействия не вносит в высшие порядки теории возмущений новых расходимостей, поскольку нелокальный пропагатор нейтрино быстро убывает, так что сходятся любые замкнутые петли, образованные пропагаторами нейтрино.

Рассмотрим теперь диаграмму II.2. Таких диаграмм две:

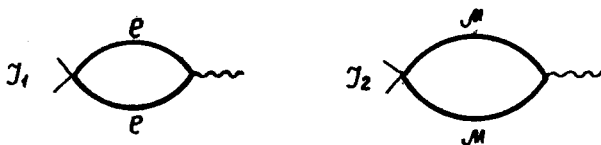


Рис. 5

Элемент S -матрицы, соответствующий этим диаграммам, записывается в виде

$$S_2^{(II,2)} = -ie \frac{G}{\sqrt{2}} \iint dx_1 dx_2 J_a^{(j)}(x) A_\beta(x_2) \text{reg Sp} \{ O_a S^{(j)}(x_1 - x_2) \times \gamma_\beta S^{(j)}(x_2 - x_1) \}. \quad (4.8)$$

Определим функцию:

$$\text{reg } P_{\alpha\beta}^{(j)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{ik(x-y)} \text{reg } \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(j)}(k),$$

$$\text{reg } \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(j)}(k) = -i \int dx e^{-ik(x-y)} \text{reg Sp} \{ (O_a S^{(j)}(x) \gamma_\beta S^{(j)}(-x)) \}. \quad (4.9)$$

Вычисление дает (используется тот же предельный переход при регуляризации $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2 = \Lambda$):

$$\text{reg } \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(j)}(k) = 4\pi^2 (k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} k^2) \times \left\{ \frac{1}{3} (\ln \Lambda^2 - 1) - 2 \int_0^1 du u (1-u) \ln \frac{m_j^2 - u(1-u)k^2}{m_j^2} \right\}. \quad (4.10)$$

Легко видеть, что $\text{reg } \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(j)}(k)$ удовлетворяет условию градиентной инвариантности $k_\alpha \text{reg } \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(j)}(k) = 0$.

Для того, чтобы устранить расходимость, связанную с появлением диаграмм II.2. в ряду теории возмущений, необходимо ввести в лагранжиан взаимодействия дополнительный член вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w^{(2)}(x) &= f \text{Sp} \{ J_\alpha(x) \} (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) A_\beta(x) = \\ &= f (J_{1\alpha}(x) + J_{2\alpha}(x)) (\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) A_\beta(x), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где f - некоторая новая константа связи. Перенормировка устраняет расходимость в (4.10).

5. Третий порядок теории возмущений

В третьем порядке теории возмущений по лагранжиану взаимодействия имеются два типа расходящихся диаграмм: с замкнутыми спинорными циклами (диаграммы III. 1-3 на рис. 2) и с незамкнутыми (диаграммы III .4). У всех этих диаграмм имеется по крайней мере одна слабая вершина. Итак, мы имеем следующие диаграммы:

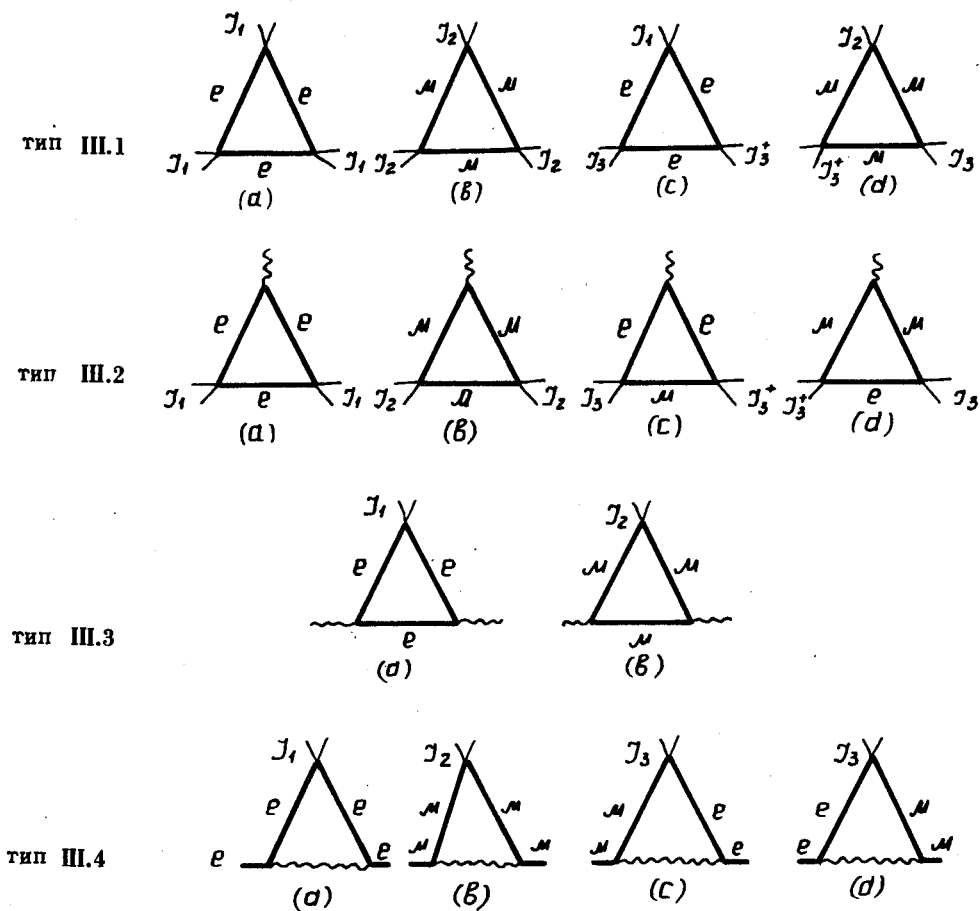


Рис. 6

Элементы S -матрицы третьего порядка, соответствующие диаграммам III. 1-3, записываются в виде

$$\begin{aligned} \text{reg } S_3^{(III,1)} &= -2i^2 \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^3 \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{i,j,\ell} J_a^{(i)}(x_1) J_\beta^{(\ell)}(x_2) J_\gamma^{(\ell)}(x_3) \times \\ &\times \text{reg Sp} \{ O_a S^{(i)}(x_1-x_2) O_\beta S^{(\ell)}(x_2-x_3) O_\gamma S^{(i)}(x_3-x_1) \}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{reg } S_3^{(III,2)} &= -2i^2 e \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2 \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{i,j} J_a^{(i)}(x_1) J_\beta^{(j)}(x_2) A_\gamma(x_3) \times \\ &\times \text{reg Sp} \{ O_a S^{(i)}(x_1-x_2) O_\beta S^{(j)}(x_2-x_3) \gamma_\gamma S^{(i)}(x_3-x_1) \}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{reg } S_3^{(III,3)} &= -2i^2 e^2 \frac{G}{\sqrt{2}} \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \sum_i J_a^{(i)}(x_1) A_\beta(x_2) A_\gamma(x_3) \times \\ &\times \text{reg Sp} \{ O_a S^{(i)}(x_1-x_2) \gamma_\beta S^{(i)}(x_2-x_3) \gamma_\gamma S^{(i)}(x_3-x_1) \}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Вычисленные матричные элементы являются частными значениями общего выражения вида

$$\begin{aligned} \text{reg } \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \iiint dq_1 dq_2 dq_3 e^{i \sum_j q_j x_j} \times \\ &\times \delta(q_1 + q_2 + q_3) \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(q_1, q_2, q_3 | m_1, m_2, m_3), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \text{reg } \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(q_1, q_2, q_3) &= 3^4 (2\pi)^4 \iiint dx_1 dx_2 dx_3 e^{-i \sum_j q_j x_j} \times \\ &\times \delta(x_1 + x_2 + x_3) \text{reg Sp} \{ \Gamma_{1\alpha} S^{(1)}(x_1-x_2) \Gamma_{2\beta} S^{(2)}(x_2-x_3) \Gamma_{3\gamma} S^{(3)}(x_3-x_1) \}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Выписанное выражение соответствует диаграмме (рис. 7)

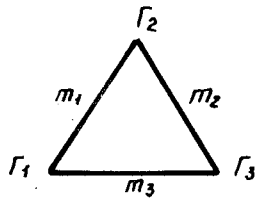


Рис. 7

Здесь импульсы q_1, q_2, q_3 связаны законом сохранения $q_1 + q_2 + q_3 = 0$. Матрицы Γ_{ja} равны γ_a или 0_a , а массы m_j равны m_e или m_μ . Стандартный расчет дает:

$$\text{reg } \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}^{\approx}(q_1, q_2, q_3) = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}^{\approx(n)}(q_1, q_2, q_3; \Lambda^2) + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}^{\approx \text{con}}(q_1, q_2, q_3 | m_j, n). \quad (5.6)$$

Здесь n — число слабых вершин в диаграмме.

Второе слагаемое в (5.6) соответствует сходящейся части интеграла. Явный вид этого выражения мы здесь приводить не будем, так как в настоящей работе оно нас не интересует, а само выражение достаточно громоздко.

Первое слагаемое в (5.6) соответствует расходящейся части исследуемого интеграла. Вычисление показывает:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}^{\approx(n)}(q_1, q_2, q_3; \Lambda^2) = & \frac{4\pi^2}{3} 2^{n-1} \ln \Lambda^2 \{ q_{1\sigma} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\sigma}) + \\ & + q_{2\sigma} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\sigma} - g_{\alpha\sigma} g_{\beta\gamma}) + q_{3\sigma} (g_{\alpha\sigma} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\sigma}) \}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Заметим, что расходящаяся часть диаграммы третьего порядка не зависит от масс промежуточных частиц m_1, m_2, m_3 .

Подставим (5.7) в (5.4), получим в x -представлении

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(n)}(x_1, x_2, x_3; \Lambda^3) = \frac{(-i)2^{n-1}}{(2\pi)^2} \ln \Lambda^2 \int dx \{ (g_{\alpha\gamma} \partial_{1\beta} - g_{\alpha\beta} \partial_{1\gamma}) + \quad (5.8)$$

$$+ (g_{\alpha\beta} \partial_{2\gamma} - g_{\beta\gamma} \partial_{2\alpha}) + (g_{\beta\gamma} \partial_{3\alpha} - g_{\alpha\gamma} \partial_{3\beta}) \} \delta(x-x_1) \delta(x-x_2) \delta(x-x_3).$$

Покажем, что диаграммы типа III.2 и III.3 на самом деле не содержат расходимостей. Подставляя (5.8) в (5.2) и (5.3), получим

$$S_3^{(III,2)}(\Lambda) = \frac{4i}{3(2\pi)^2} e \frac{G}{\sqrt{2}} \ln \Lambda^2 \times \quad (5.9)$$

$$\times \text{Sp} \{ J_a(x) A_\beta(x) R_{\alpha\beta}(x) - J_a(x) A_\beta(x) R_{\alpha\beta}(x) + J_a(x) J_\beta(x) F_{\alpha\beta}(x) \} -$$

$$S_3^{(III,3)}(\Lambda) = \frac{2i}{3(2\pi)^2} e^2 \frac{G}{\sqrt{2}} \ln \Lambda^2 \times \quad (5.10)$$

$$\times \text{Sp} \{ A_\alpha(x) A_\beta(x) R_{\alpha\beta}(x) - J_\alpha(x) A_\beta(x) F_{\alpha\beta}(x) + J_\alpha(x) A_\beta(x) F_{\alpha\beta}(x) \},$$

где введены обозначения

$$R_{\alpha\beta}(x) = \partial_\alpha J_\beta(x) - \partial_\beta J_\alpha(x), \quad (5.11)$$

$$F_{\alpha\beta}(x) = \partial_\alpha A_\beta(x) - \partial_\beta A_\alpha(x).$$

Легко видеть, что оба выражения, (5.9) и (5.10), с учетом (5.11) и (1.13) равны нулю:

$$S_3^{(III,2)}(\Lambda) = S_3^{(III,3)}(\Lambda) = 0.$$

Таким образом, диаграммы третьего порядка с внешними фотонными линиями всегда конечны.

Рассмотрим теперь контрчлен, соответствующий диаграммам типа III.1. Подставляя (5.8) в (5.1), получим:

$$S_3^{(III.1)}(\Lambda) = \frac{8i}{(2\pi)^2} \left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right)^3 \ln \Lambda^2 \int dx \text{Sp} \{ J_a(x) J_\beta(x) R_{a\beta}(x) \}. \quad (5.12)$$

Это выражение не равно нулю. Таким образом, чтобы устранить эту бесконечность, необходимо в лагранжиан взаимодействия ввести дополнительный член:

$$\mathcal{L}_w^{(3)} = i h_3 \text{Sp} \{ J_a(x) J_\beta(x) R_{a\beta}(x) \}. \quad (5.13)$$

Вводя обозначения (1.7) и полагая

$$R_{a\beta} = D_{a\beta}(x) + (\vec{Q}_{a\beta}(x) \tau^{\rightarrow}),$$

$$D_{a\beta} = \partial_a D_\beta(x) - \partial_\beta D_a(x), \quad (5.14)$$

$$\vec{Q}_{a\beta} = \partial_a \vec{B}_\beta(x) - \partial_\beta \vec{B}_a(x),$$

можно (5.13) переписать в виде

$$\mathcal{L}_w^{(3)} = -2h_3 (\vec{B}_a(x) \times \vec{B}_\beta(x)) \cdot \vec{Q}_{a\beta}(x). \quad (5.15)$$

Переходя к обычным обозначениям, получим окончательно:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w^{(3)} = & (-i) h_3 \{ J_{3a}^+(x) [J_{1\beta}(x) - J_{2\beta}(x)] R_{a\beta}^{(3)}(x) + \\ & + [J_{1a}(x) - J_{2a}(x)] J_{3\beta}(x) R_{a\beta}^{(3)+}(x) + J_{3a}(x) J_{3\beta}^+(x) [R_{a\beta}^{(1)}(x) - \\ & - R_{a\beta}^{(2)}(x)] \}, \quad R_{a\beta}^{(1)}(x) = \partial_a J_{1\beta}(x) - \partial_\beta J_{1a}(x). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Этот член описывает контактное шестифермионное нейтрино-нейтринное взаимодействие. Как говорилось выше, это взаимодействие не приводит к увеличению расходимостей.

Диаграммы третьего порядка типа III.4, а также высших порядков типа III.5, III.6 и т.д. представляют собой обычные неприводимые электродинамические вершины с тем отличием, что электромагнитная вершина, из которой испускается фотон, заменяется на слабую, из которой выходит ток $J_{j\alpha}(x)$. Это приводит к тому, что матрица γ_α при логарифмически расходящемся члене заменяется на O_α . Таким образом, расходящаяся часть диаграмм этого типа имеет вид

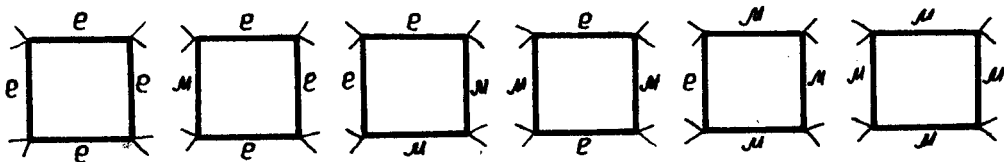
$$e \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{l}(x) O_\alpha J_\alpha(x) l(x)) l_n M^2. \quad (5.17)$$

Значит, все диаграммы типа III.4 и т.д. приводят к перенормировке константы слабого взаимодействия.

6. Четвертый порядок теории возмущений

Все неприводимые расходящиеся диаграммы четвертого порядка теории возмущений приведены на рис. 2. Этих диаграмм имеется пять типов. Диаграммы каждого типа различаются тем, из каких фермионов (электронов или μ -мезонов) составлен замкнутый спинорный цикл. На рис. 8 приведены все расходящиеся неприводимые диаграммы четвертого порядка.

тип IV.I



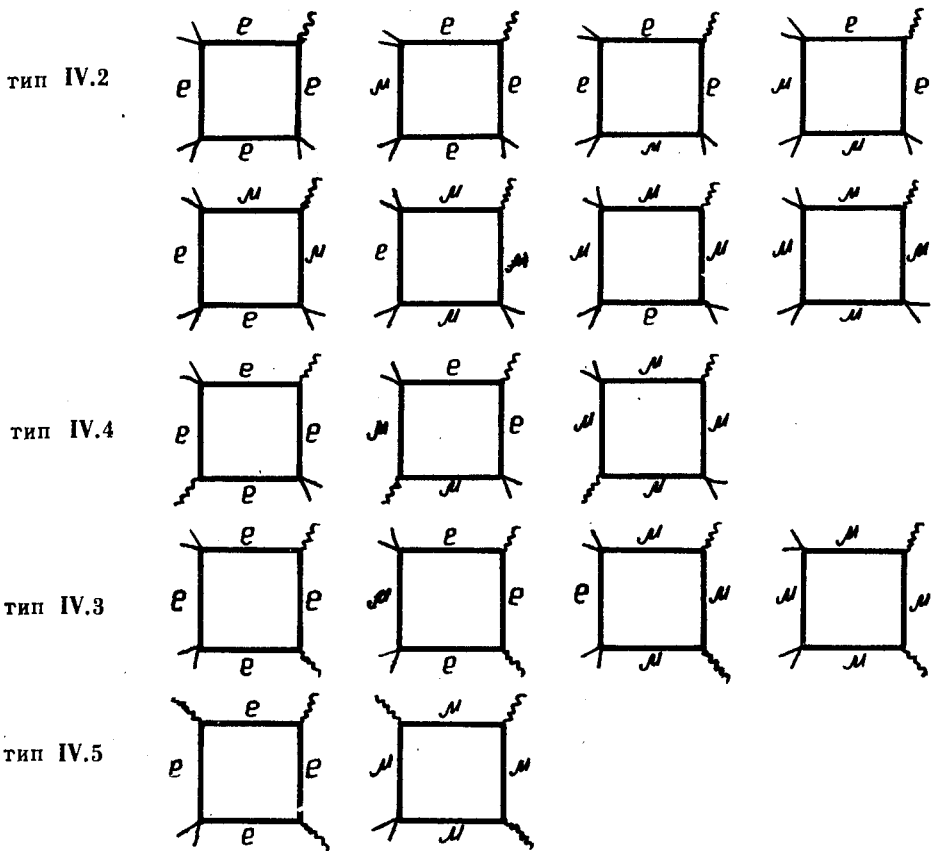


Рис. 8

Элементы S -матрицы четвертого порядка, соответствующие диаграммам IV. 1-5, записываются в виде:

$$S_4^{(IV.1)} = i 6 \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^4 \int \dots \int dx_1 \dots dx_4 J_a^{(1)}(x_1) J_\beta^{(l)}(x_2) J_\gamma^{(lm)}(x_3) J_\delta^{(m1)}(x_4) \times \quad (6.1)$$

$$\times \text{reg Sp} \{ O_a S^{(1)}(x_1-x_2) O_\beta S^{(l)}(x_2-x_3) O_\gamma S^{(m)}(x_3-x_4) O_\delta S^{(1)}(x_4-x_1) \},$$

$$S_4^{(IV.2)} = i 24 e \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^3 \int \dots \int dx_1 \dots dx_4 A_a(x_1) J_\beta^{(1l)}(x_2) J_\gamma^{(lm)}(x_3) J_\delta^{(m1)}(x_4) \times \quad (6.2)$$

$$\times \text{reg Sp} \{ \gamma_a S^{(1)}(x_1-x_2) O_\beta S^{(l)}(x_2-x_3) O_\gamma S^{(m)}(x_3-x_4) O_\delta S^{(1)}(x_4-x_1) \},$$

$$S_4^{(IV.3)} = i 24 e^2 \left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right)^2 \int \dots \int dx_1 \dots dx_4 A_\alpha(x_1) A_\beta(x_2) J_\gamma^{(\ell m)}(x_3) J_\delta^{(m\ell)}(x_4) \times$$

$$\times \text{reg Sp} \{ \gamma_\alpha S^{(\ell)}(x_1 - x_2) \gamma_\beta S^{(\ell)}(x_2 - x_3) O_\gamma S^{(m)}(x_3 - x_4) O_\delta S^{(\ell)}(x_4 - x_1) \}, \quad (6.3)$$

$$S_4^{(IV.4)} = i 12 e^2 \left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right) \int \dots \int dx_1 \dots dx_4 A_\alpha(x_1) J_\beta^{(i\ell)}(x_2) A_\gamma(x_3) J_\delta^{(\ell i)}(x_4) \times$$

$$\times \text{reg Sp} \{ \gamma_\alpha S^{(i)}(x_1 - x_2) O_\beta S^{(\ell)}(x_2 - x_3) \gamma_\gamma S^{(\ell)}(x_3 - x_4) O_\delta S^{(i)}(x_4 - x_1) \}, \quad (6.4)$$

$$S_4^{(IV.5)} = i 24 e^3 \frac{G}{\sqrt{2}} \int \dots \int dx_1 \dots dx_4 A_\alpha(x_1) A_\beta(x_2) A_\gamma(x_3) J_\delta^{(\ell\ell)}(x_4) \times$$

$$\times \text{reg Sp} \{ \gamma_\alpha S^{(\ell)}(x_1 - x_2) \gamma_\beta S^{(\ell)}(x_2 - x_3) \gamma_\gamma S^{(\ell)}(x_3 - x_4) O_\delta S^{(\ell)}(x_4 - x_1) \}. \quad (6.5)$$

Выписанные матричные элементы являются частными значениями общего выражения вида

$$\text{reg} \square_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{(2\pi)^{16}} \int \dots \int dq_1 \dots dq_4 e^{i \sum x_j q_j} \delta(q_1 + \dots + q_4) \times$$

$$\times \text{reg} \square(q_1, \dots, q_4 | m_1, \dots, m_4), \quad (6.6)$$

$$\text{reg} \square_{\alpha\beta\gamma\delta}(q_1, \dots, q_4 | m_1, \dots, m_4) = i 4^4 (2\pi)^4 \int \dots \int dx_1 \dots dx_4 e^{-i \sum x_j q_j} \times$$

$$\times \delta(x_1 + \dots + x_4) \text{Sp} \{ \Gamma_{1\alpha} S^{(1)}(x_1 - x_2) \Gamma_{2\beta} S^{(2)}(x_2 - x_3) \Gamma_{3\gamma} S^{(3)}(x_3 - x_4) \Gamma_{4\delta} S^{(4)}(x_4 - x_1) \}. \quad (6.7)$$

Приведенное выражение соответствует диаграмме

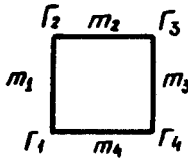


Рис. 9.

Здесь импульсы q_1, q_2, q_3, q_4 связаны законом сохранения $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$. Матрицы Γ_{ja} равны γ_a или 0_a , а массы m_j равны m_e или m_μ . Стандартный расчет дает:

$$\text{reg} \square_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx 2^{n-1} \frac{4\pi^2}{3} \ln \Lambda^2 (2g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) + \square_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\text{con}}(q_j | m_j), \quad (6.8)$$

где n - число слабых вершин в диаграмме.

Второе слагаемое $\square_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\text{con}}$ соответствует сходящейся части интеграла. Явный вид этого выражения мы здесь выписывать не будем ввиду его громоздкости. Первое слагаемое соответствует расходящейся части исследуемого интеграла. Существенно, что этот член не зависит от масс промежуточных лептонов. В x -представлении для расходящейся части получим представление

$$\square_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1 \dots x_4 | \Lambda^2) = 2^{n-1} \frac{4\pi^2}{3(2\pi)^4} \ln \Lambda^2 (2g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \int dx \prod_{j=1}^4 \delta(x - x_j). \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) в формулы (6.1-5), легко убедиться, что выражение для $S_4^{(IV.2)}$, $S_4^{(IV.3)}$, $S_4^{(IV.4)}$ и $S_4^{(IV.5)}$ тождественно обращаются в нуль. Ненулевым оказывается лишь выражение для диаграмм типа IV.1. Этот контрчлен имеет вид

$$S_4^{(IV.1)} = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{G}{\sqrt{2}} \right)^4 \ln \Lambda^2 \int dx \text{Sp} [J_a(x) J_\beta(x) J_a(x) J_\beta(x) - J_a(x) J_a(x) J_\beta(x) J_\beta(x)]. \quad (6.10)$$

Таким образом, чтобы устранить эту бесконечность, необходимо в лагранжиан взаимодействия ввести дополнительный член:

$$\mathcal{L}_w^4(x) = \frac{1}{2} h_4 \text{Sp} [J_a(x) J_\beta(x) J_a(x) J_\beta(x) - J_a(x) J_a(x) J_\beta(x) J_\beta(x)]. \quad (6.11)$$

Вводя обозначение (1.7), можно получить

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w^4(x) &= -2h_4 [(\vec{B}_a(x) \times \vec{B}_\beta(x)) \cdot (\vec{B}_a(x) \times \vec{B}_\beta(x))] = \\ &= -2h_4 [(\vec{B}_a(x) \cdot \vec{B}_a(x))^2 - (\vec{B}_a(x) \cdot \vec{B}_\beta(x)) (\vec{B}_\beta(x) \cdot \vec{B}_a(x))]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Переходя к обычным обозначениям, получим окончательно:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w^4(x) &= h_4 [(J_{1a}(x) J_{3a}(x)) (J_{3\beta}^+(x) J_{3\beta}(x)) + (J_{2a}(x) J_{3a}(x)) (J_{3\beta}^+(x) J_{2\beta}(x)) + \\ &+ (J_{3a}(x) J_{3a}(x)) (J_{3\beta}^+(x) J_{3\beta}^+(x)) + 2(J_{1a}(x) J_{2a}(x)) (J_{3\beta}(x) J_{3\beta}^+(x)) - \\ &- (J_{1a}(x) J_{1a}^+(x)) (J_{3\beta}(x) J_{3\beta}^+(x)) - (J_{2a}(x) J_{2a}(x)) (J_{3\beta}(x) J_{3\beta}^+(x)) - \\ &- (J_{3a}(x) J_{3a}^+(x)) (J_{3\beta}(x) J_{3\beta}^+(x)) - (J_{1a}(x) J_{3a}(x)) (J_{2\beta}(x) J_{3\beta}^+(x)) - \\ &- (J_{1a}(x) J_{3a}^+(x)) (J_{2\beta}(x) J_{3\beta}(x))]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Этот член описывает контактное восьмифермионное ν - ν взаимодействие. Еще раз отметим, что это взаимодействие не может принести дополнительные расходимости в высшие порядки теории возмущений.

7. Общий вид полного лагранжиана

Выпишем полный лагранжиан взаимодействующих полей:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{in}(x), \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{in}(x) = & e(\bar{\ell}(x)\hat{A}(x)\ell(x)) + \frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{\ell}(x)\mathbf{O}_a J_a(x)\ell(x)) + \\ & + h_1 \text{Sp}\{M J_a(x) J_a(x)\} + h_2 \text{Sp}\{J_a(x)(\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) J_\beta(x)\} + \\ & + f \text{Sp}\{J_a(x)(\partial_\alpha \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \square) A_\beta(x) + i h_3 \text{Sp}\{J_a(x) J_\beta(x) R_{\alpha\beta}(x)\} + \\ & + \frac{1}{2} h_4 \text{Sp}\{J_a(x)[J_\beta(x), J_\alpha(x)] - J_\beta(x)\}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Обозначения введены выше.

Итак, нами доказано, что все расходимости теории возмущений с этим лагранжианом взаимодействия устраняются перенормировкой констант взаимодействия e , G , h_1 , h_2 , h_3 , h_4 и f , а также обычной перенормировкой масс и волновых функций взаимодействующих частиц. Соответствующие контрчлены мы для простоты не выписали в явном виде.

Полный лагранжиан взаимодействующих частиц явно градиентно-инвариантен, поскольку оператор нейтринного тока $J_a(x)$ не преобразуется при градиентном преобразовании.

Появившиеся дополнительные члены в лагранжиане взаимодействия по сравнению с (1.1) описывают чистое ν - ν взаимодействие, о существовании и величине которого мы в настоящее время ничего не зна-

ем. Как показано в /3/, существующие экспериментальные данные не противоречат существованию таких взаимодействий с довольно большими константами связи.

Следует отметить, что новое ν - ν взаимодействие

$$h_1 \text{Sp} \{ M J_\alpha(x) J_\alpha(x) \}$$

из-за присутствия матрицы

$$M = \begin{pmatrix} m_e^2 & 0 \\ 0 & m_\mu^2 \end{pmatrix}$$

не инвариантно относительно замены $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$. Фактически это приводит к различию взаимодействия электрона и μ -мезона. Не является ли появление этого взаимодействия причиной различия в массах электрона и μ -мезона?

Каков произвол в предлагаемой теории? Во-первых, введенный формфактор нейтрино $V(-k^2)$, о котором известно очень мало, кроме самых общих свойств. Во-вторых, новые варианты ν - ν взаимодействия с неизвестными константами связи h_1 , h_2 , h_3 , h_4 и f . В рамках предполагаемой теории все эти величины произвольны. Необходимо привлечь дополнительные соображения физического и математического характера, которые позволили бы уменьшить этот произвол.

В целом нам кажется, что предлагаемая схема заслуживает дальнейшего изучения.

Л и т е р а т у р а

1. Г.В. Ефимов. Препринты ИТФ, Киев, №№52,54,55 (1968); Commun. Math. Phys., 5, 42 (1967); Проблемы физики ЭЧАЯ, том 1, Атомиздат, 1970.
2. Д.А. Киржниц, А.Н. Лезнов. Труды международного совещания по не-локальной квантовой теории поля, Дубна, 1967.

3. Д.Ю. Бардин, С.М. Биленький, Б.М. Понтекорво. Препринт ОИЯИ, Р2-5036, Дубна, 1970.
4. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957.
5. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ., Москва, 1963; Г. Челлен. Физика элементарных частиц. Наука, Москва, 1966.
6. M. Fierz, *Zs. f. Physik*, 102, 512 (1936); Л.Б. Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел

7 мая 1970 года.