16/III-70

Б-705

Теор. и мат. физика, 1970, т. 4 №2, с. 145-152

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4942

Д.И. Блохинцев

О КВАНТОВАНИИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОГО ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P2 - 4942

Д.И. Блохинцев

О КВАНТОВАНИИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОГО ПОЛЯ

Доклад на Международный симпозиум по нелокальной квантовой теории поля

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика".

§1. Введение

Рассмотрим класс скалярных полей $\phi(x,t)$, подчиняющихся уравнению, вытекающему из релятивистски-инвариантного лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(K), \quad K = \frac{1}{2}(\phi_t^2 - \phi_x^2) \qquad (1)$$

(Здесь $\phi_t = \frac{\partial\phi}{dt}$, $\phi_x = \frac{\partial\phi}{dx}$). Само уравнение гласит:

$$A\phi_{tt} + 2B\,\phi_{tx} + C\phi_{xx} = 0, \qquad (2)$$

где ϕ_{tt}, ϕ_{tx}, ϕ_{xx} – вторые производные, а коэффициенты A, B и C – суть функции ϕ_t и ϕ_x. Поле $\phi(x,t)$, подчиняющееся этому уравнению, в широком классе функций $\mathcal{L}(K)$ не содержит сингулярностей, а важнейшие интегральные величины, как-то: энергия, импульс и т.п. оказываются конечными[ж/]. Уравнение (2) радикально отличается от рассмотренных до сих пор в квантовой теории поля тем, что имеет криволинейные характеристики. Чтобы подчеркнуть это отличие, мы называем его "существенно нелинейным полем". В локальной

[ж/] См. классическую работу /1/. Заметим, что ради простоты мы выписываем лагранжиан (1) для двухмерного мира.

системе координат, где коэффициент $B=0$, скорость распространения сигнала (взаимодействия)

$$u = \sqrt{-\frac{C}{A}} = u\ (\phi_t\ , \phi_x\ ) \qquad (3)$$

и зависит от производных поля ϕ_t, ϕ_x. Подобная ситуация имеет место и в гравитационном поле. В зависимости от конкретного вида лагранжиана (1) и начальных данных эта скорость может быть: а) всюду меньше скорости света в пустоте c, б) в некоторых областях пространства-времени, при больших ϕ_t / b ϕ_x / b (здесь b – поле, изменяющее масштаб нелинейности) больше c, наконец в) возможно, что в некоторой области станет мнимой – это состояние можно назвать "световым коллапсом"[ж/]. Ясно, что в случае а) применимы обычные правила квантовой теории поля, и квантование может быть введено посредством канонического правила, а именно:

$$[\ \hat{\Pi}\ (x', 0)\ \hat{\phi}\ (x'', 0)\ ] = i\hbar\delta\ (x' - x'')\ , \qquad (4)$$

где $\hat{\Pi}$ – оператор канонического импульса, ϕ – оператор поля и, как обычно: $[AB] = AB - BA$. Возникающая при этом задача нахождения собственных значений оператора Гамильтона H или задача вычисления S -матрицы представляют исключительные трудности.

В последнее время имеется успех в решении классической задачи Коши для уравнений поля, вытекающих из лагранжиана (1)[/4/].

В этой ситуации нам представляется полезным сперва привести методику решения квантово-механической задачи с одной степенью свободы, имеющей также "существенно нелинейный" лагранжиан, подражающий лагранжиану (1).

[х/] Ранее я называл это особое состояние "комком событий" (см.[/2,3/]).

§2. Простейшая существенно нелинейная система

Под такой системой мы будем подразумевать систему с одной степенью свободы, описываемую лагранжианом:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(K), \quad K = \frac{1}{2}\hat{p}^2 - U(q), \qquad (5)$$

где $\frac{1}{2}\hat{p}^2$ – оператор кинетической энергии, $\hat{p} = \frac{d\hat{q}}{dt}$ – оператор скорости, $U(q)$ – оператор потенциальной энергии; предполагается, что функция $U(q) = 0$ для $|q| > a$ и интегрируема в интервале $(-a, +a)$. Определим канонический импульс $\hat{\Pi}$ формулой:

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{2}[M(\hat{K})\hat{p} + \hat{p}M(\hat{K})], \qquad (6)$$

Здесь

$$M(\hat{K}) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K} \qquad (7)$$

есть оператор массы. Симметризованный оператор функции Гамильтона, в соответствии с функцией Лагранжа (5), имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi}\hat{p} + \hat{p}\hat{\Pi}) - \mathfrak{L}(\hat{K}) \qquad (8)$$

или

$$\hat{H} = T(\hat{K}) + \frac{1}{2}[UM(\hat{K}) - M(\hat{K})U], \qquad (8)$$

где

$$T(\hat{K}) = M(\hat{K})\,2\hat{K} - \mathfrak{L}(\hat{K}). \qquad (9)$$

Далее, согласно каноническому правилу квантования, имеем:

$$[\hat{\Pi}, \hat{q}] = i\hbar \ . \qquad (10)$$

Формулы (5), (6), (7) вместе с квантовым условием (10) определяют рассматриваемую механическую систему. Задача заключается в нахождении собственных значений и собственных функций оператора Гамильтона $\hat{H}$ (8).

Из формулы (6) видно, что в рассматриваемой задаче масса является оператором. Поэтому связь между скоростью частицы $\hat{p} = \frac{d\hat{q}}{dt}$ и каноническим импульсом $\hat{\Pi}$ оказывается стохастической. Это обстоятельство можно рассматривать и с иной точки зрения. Именно можно считать, что масса осталась постоянной (равной 1), а изменилась метрика времени; именно элемент времени изменяется теперь согласно формуле x/.

$$d\tau = \frac{1}{M(K)}\,dt \qquad (11)$$

Это соотношение подсказывает, что наиболее целесообразным представлением для решения поставленной задачи является представление, в котором оператор $\hat{K}$ диагонален ("K"-представление), или другое представление, близкое к нему.

§3. Приведение гамильтониана к диагональному виду

Обратимся к "K"- представлению. В этом представлении из (6) и (7) следует:

x/ Сходная ситуация имеет место в теории относительности, где вместо t можно рассматривать собственное время $d\tau = \frac{m_0}{m}\,dt$, здесь m – зависящая от скорости масса частицы, а m_0 – постоянная.

$$(\hat{K}' \mid \hat{\Pi} \mid \hat{K}'') = \frac{1}{2}(M(\hat{K}') + M(\hat{K}'')](K' \mid \hat{p} \mid \hat{K}'')$$

$$\sum_{K''} \frac{1}{2}[M(\hat{K}') + M(\hat{K}'')](\hat{K}' \mid \hat{p} \mid \hat{K}'')(\hat{K}''' \mid \hat{q} \mid \hat{K}'') - \qquad (,6')$$

$$-\sum_{K'''} \frac{1}{2}(\hat{K}' \mid \hat{q} \mid \hat{K}''')[M(\hat{K}''') + M(\hat{K}'')](\hat{K}''' \mid \hat{p} \mid \hat{K}'') = i\hbar\delta_{\hat{K}',\hat{K}''}$$

перепишем теперь (7) в виде:

$$\frac{1}{2}[M(\hat{K}') + M(\hat{K}'')](\hat{K}' \mid \hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} \mid \hat{K}'') +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{K'''}\{M(\hat{K}''') - M(\hat{K}'')\}(\hat{K}' \mid \hat{p} \mid K''')(K''' \mid \hat{q} \mid K'') - \qquad (7'')$$

$$-[M(K''') - M(K')](K' \mid \hat{q} \mid K''')(K''' \mid \hat{p} \mid K'') = i\hbar\,\delta_{K',K''}$$

Исходное приближение заключается в пренебрежении в (7'') членами, содержащими разности масс $M(K''') - M(K'')$ и $M(K''') - M(K')$ по сравнению с членами, содержащими сумму масс; разумеется, это приближение возможно не при всех видах лагранжиана $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(K)$ и потенциальной энергии $U(q)$. Оно будет тем лучше, чем меньше недиагональные члены $(K' \mid \hat{q} \mid K'')$ по сравнению с диагональными: в этом приближении соотношение (7'') принимает вид:

$$(K' \mid \hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} \mid K'') = \frac{i\hbar}{M(K')}\,\delta_{K',K''} \qquad (7''')$$

или, иначе,

$$[\hat{p}\hat{q}] = i\hbar^*, \qquad (12)$$

где

$$\hbar^* = \frac{\hbar}{M(K)} . \qquad (13)$$

Эта формула является ключевой. Она показывает, что в первом приближении дело сводится к замене постоянной Планка на "эффективную постоянную" $\hbar^*$, являющуюся функцией K. Величина $M(K)$ играет роль переменной массы.

Из (12) и (13) видно, что при больших значениях величины $M(K)$ система "расквантовывается", так как в этом случае $\hbar^* \to 0$. Напротив, при малых $M(K)$ эффективная постоянная $\hbar^*$ становится большой, квантовые флуктуации величин $\hat{p}$ и $\hat{q}$ также становятся большими и мы приходим к крайнему квантовому случаю. В этом случае исходное приближение становится сомнительным. Если вернуться к аналогии с квантовым полем $\phi(x,t)$, описываемым уравнением (2), то случай $\hbar^* \to 0$ соответствовал бы сильным флуктуациям в скорости распространения сигнала u или, в переводе на язык геометрии, - сильным квантовым флуктуациям метрики[x/]. Такая исключительная особенность этого случая дает нам право выделить из других и дать ему особое название случая "суперквантового поля" (или "суперквантовой системы").

Обратимся теперь к приведению оператора K к диагональному виду. Из эффективного соотношения неопределенностей (12) следует, что оператор $\hat{p}$ в координатном представлении может быть записан в виде:

$$\hat{p} = i\,\hbar^* \frac{d}{dq} . \qquad (14)$$

[x/] Связь существенно нелинейной теории с метрикой была уже намечена в работе[6] и описана подробнее в работах[7] и[8].

Из (5) следует, что в этом представлении оператор $\hat{K}$ равен

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^*}{2}\frac{d^2}{dq^2} - U(q) , \tag{15}$$

так что уравнение для собственных функций этого оператора $\Psi_x(q)$ запишется в виде:

$$\left[\frac{\hbar^*}{2}\frac{d^2}{dq^2} + U(q)\right]\Psi_K(q) = K\,\Psi_K(q) . \tag{16}$$

В силу принятых ранее ограничений на потенциал U, функции $\Psi_K(q)$ имеют асимптотический вид:

$$\Psi_K(q) \approx N_K\, e^{\pm ipq} . \tag{17}$$

где

$$p = \sqrt{2K}\,/\hbar^* \tag{18}$$

и N_K есть нормировочный множитель, который может быть найден обычным методом; функции $\Psi_K(q)$ образуют ортогональную систему функций:

$$\int \Psi^*_{K'}(q)\,\Psi_{K''}(q)\,dq = \delta\,(K' - K'') \tag{19}$$

(при условии, что спектр оператора $\hat{K}$ – непрерывен); соответствующий этому предположению вид операторов $\hat{K}$ и $\hat{H}$ условно (при $p=0$) изображен на рис. 1. Оператор $\hat{H}$ может иметь и дискретный спектр.

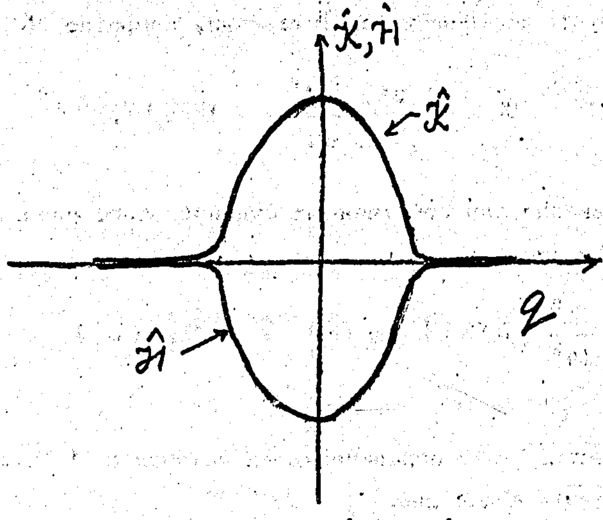

Рис. 1. Вид операторов $\hat{K}$ и $\hat{H}$, при $p = 0$

Из формулы (8) следует, что уравнение для собственных функций $\Psi_E(K)$ оператора гамильтониана $\hat{H}$:

$$\hat{H}\,\Psi_E = E\,\Psi_E \tag{20}$$

в "K"- представлении будет иметь вид:

$$T(K')\,\Psi_E(K') + \frac{1}{2}\int [M(K') + M(K'')]\,(K'|\,\hat{U}\,|K'')\,\Psi_E(K'')\,dK'' \tag{21}$$

$$= E\,\Psi_E(K'),$$

где матричный элемент потенциальной энергии равен:

$$(K'|\,\hat{U}\,|K'') = \int \Psi^*_{K'}(q)\,U(q)\,\Psi_{K''}(q)\,dq \tag{22}$$

Уравнение (21) является линейным и может быть решено обычными приемами.

В частности, если $U(q)$ мало, то в первом приближении получим для собственных значений энергии

$$E = T(K) \tag{23}$$

и собственных функций:

$$\Psi_E(K) = \phi_E(K)\,\delta^+(E - T(K)). \tag{24}$$

Причем функция $\phi_E(K)$ определится формулой:

$$\phi_E(K) = \frac{1}{2}\int [M(K) + M(-K)](K/U/K') \times \tag{25}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{E - T(K')} + i\pi\delta[E - T(K')] \right\} dK'.$$

Рассмотренный простой пример показывает, что в задаче о квантовании существенно нелинейного поля главная проблема заключается в выборе благоприятного приближения для метрики пространства-времени, которая становится стохастичной в силу стохастичности основной метрической величины скорости распространения сигнала $u(\phi_x, \phi_t)$ [x/].

[x/] Это соображение подтверждается также результатами работы /4/, где показано, что успех в решении существенно нелинейной задачи основывается на переходе от декартовой системы координат (x, t) к криволинейной (α, β), оси которой совпадают с направлениями характеристических кривых.

§4. Квантование существенно налинейного поля

Обратимся теперь к квантованию поля, описываемого лагранжианом типа (1). Непосредственное применение метода, описанного в §3, требовало бы приведения к диагональному виду оператора

$$\hat{K} = \frac{1}{2}\left(\hat{\phi}_t^2 - \hat{\phi}_x^2\right) \qquad (26)$$

в каждой точке пространства-времени $x = (\vec{x}, t)$, расположенной на какой-либо пространственноподобной поверхности $\sigma(x)$. Эта задача встречается с трудностью рационального определения оператора частоты $\hat{\omega} = \sqrt{-\nabla^2 - m^2}\,\delta(\vec{x})$ в координатном пространстве $\mathcal{R}_3(\vec{x})$. Поэтому мы избираем другой путь, основанный на том обстоятельстве, что в определенном классе лагранжианов (1) и начальных данных, эффективная постоянная Планка $\hbar^*$ может оказаться малой, а, следовательно, система будет находиться в состоянии, близком к возможному состоянию классического поля. Это соображение позволяет применить для решения задачи о квантовании существенно-нелинейного поля метод функционального интегрирования по путям /8/. Согласно этому методу, волновая функция $\Psi\{v(x)\, t_2 / u(x)\, t_1\}$, описывающая состояние, в котором поле $\phi(x, t_2) = v(x)$ в момент времени $t = t_2$, если в момент времени $t = t_1$ имелось состояние с $\phi(x, t_1) = u(x)$, равна:

$$\Psi\{v(x), t_2 / u(x), t_1\} = \int e^{\frac{i}{\hbar} S\{\phi(x,t)\}}\, d\Omega\{\phi(x,t)\}, \qquad (27)$$

где

$$S\{\phi(x,t)\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx\, \mathcal{L}(K) \qquad (28)$$

есть классическое действие, а $\mathfrak{L}(K)$ – классический лагранжиан (1). Функциональное интегрирование в (27) производится по всем "путям" (по всем полям $\phi(x,t)$, ведущим от поля $\phi(x,t_1)= u(x)$ к полю $\phi(x,t_2)= v(x)$).

Полагая, что поле мало отличается от классического, положим:

$$\phi(x,t) = \bar{\phi}(x,t) + \psi(x,t), \tag{29}$$

где $\bar{\phi}(x,t)$ – классическое поле, и разложим лагранжиан (1) в ряд:

$$\mathfrak{L}(K) = \mathfrak{L}(K) + \frac{1}{1!}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}(\phi_t \psi_t - \phi_x \psi_x) + \frac{M}{2!} Q(\psi_t\ \psi_x) + \ldots \tag{30}$$

Здесь $Q(\psi_t\ \psi_x)$ – квадратичная форма:

$$Q(\psi_t\ \psi_x) = g^{tt}\psi_t^{\,2} + 2g^{tx}\psi_t\psi_x + g^{xx}\phi_x, \tag{31}$$

а g^{tt}, g^{tx}, g^{xx} – контравариантный тензор. Его компоненты равны:

$$g^{tt} = \epsilon(1+a\bar{\phi}_t^2),\ g^{tx} = -\epsilon a\bar{\phi}_t\bar{\phi}_x,\ g^{xx} = -\epsilon(1-a\bar{\phi}_x^2), \tag{32}$$

где

$$a = \overline{\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial K^2}} \Big/ \overline{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}}, \qquad \epsilon = \overline{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}} / M, \tag{33}$$

а M – среднее значение времени $\overline{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}}$ на классической траектории (ср. с (7)).

Заметим, что уравнение:

$$Q\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 \qquad (34)$$

определяет семейство поверхностей $f(x,t) = \mathrm{const}$, которые суть поверхности фронта распространения сигнала (слабого разрыва, см.[2,3,6]) в пространстве с метрикой:

$$ds^2 = g_{tt}\,dt^2 + 2g_{tx}\,dt\,dx + g_{xx}\,dx^2, \qquad (35)$$

где g_{tt}, g_{tx}, g_{xx} – ковариантный метрический тензор, в отличие от контравариантного тензора (32).

При подстановке функции Лагранжа, взятой в виде ряда (30) в (28), второй член, содержащий производные в первой степени, исчезает в силу классических уравнений поля (2), поэтому, пользуясь (27), (28) и (30), получим:

$$\Psi\{v(x), t_2 / u(x), t_1\} = e^{\frac{i}{\hbar}S_{кл}} \times \int e^{\frac{i}{\hbar^*}\int Q(\psi_t\psi_x)\,dt\,dx}\, d\Omega\{\psi(t,x)\}, \qquad (36)$$

где, как и в (13), положено: $\hbar^* = \hbar / M$.

Если известно классическое решение[x/], то, как следует из (36), задача сводится к гауссовым квадратурам в функциональном простран-

---

[x/] См. работу[4].

стве $\mathfrak{R}\{\psi(x,t)\}$. При этом целесообразно ввести такую систему координат (ξ, r), в которой элемент длины ds^2 принимает вид:

$$ds^2 = dr^2 - d\xi^2. \qquad (35')$$

В этом случае кривые $r = r(x,t)$ и $\xi = \xi(x,t)$ являются характерис ками уравнения (2). Из (36) видно, что классические приближения точнее, чем меньше эффективная постоянная Планка[x/].

Литература

1. M. Born. Proc.Roy.Soc., A 143, 410 (1934).
2. Д. Блохинцев. Докл. АН СССР, 32, 553 (1952).
3. Д. Блохинцев, и В. Орлов. ЖЭТФ, 25, 503 (1953).
4. Б. Барбашов и Н.А. Черников. ЖЭТФ, 51, №2 (1966).
5. D.I. Blohincev. Nuovo Cimento Suppl. al Vol. 3, ser. X, n 4 p. 629 (1956).
6. Д.И. Блохинцев. Докл. АН СССР, 168, 774 (1966).
7. Дао Вонг Дык и Нгуен Ван Хьеу. Препринт Р2-4605, Дубна (1969
8. Р. Фейман, А. Хибс. Квантовая механика и интегралы по путям. Изд-во "Мир" (1968).

Рукопись поступила в издательский отде
23 февраля 1970 года.