

6/11-70

C-904

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Дубна

P2 - 4917



В.К. Сусленко

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

**РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФАЗОВЫЕ ОБЪЕМЫ
УГЛОВЫХ π N -КОРРЕЛЯЦИЙ В РЕАКЦИИ
 $N + N \rightarrow N + N + \pi$**

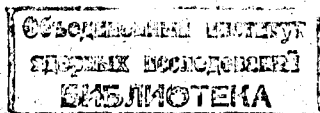
1970

P2 - 4917

В.К. Сусленко

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФАЗОВЫЕ ОБЪЕМЫ
УГЛОВЫХ π N-КОРРЕЛЯЦИЙ В РЕАКЦИИ
 $N + N \rightarrow N + N + \pi$

Направлено в ЯФ



1. В в е д е н и е

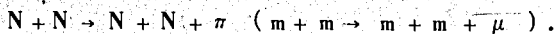
Теоретическое описание реакций с числом частиц в конечном канале $n > 3$ (в начальном канале две частицы) в конкретных применениях обычно не выходит за рамки весьма приближенных, часто феноменологических, рассмотрений. Сложность теоретического анализа обусловлена, в частности, тем, что матричный элемент реакции должен быть определен в виде функции от $\ell = 3n - 4$ независимых кинематических инвариантов.

При существующих трудностях в теории несомненный интерес представляет анализ, позволяющий на основе экспериментальных данных устанавливать детальную зависимость квадратов матричных элементов реакции от всех независимых инвариантов. В данной работе рассматриваются только реакции с $n = 3$, являющиеся объектом исследования как в физике элементарных взаимодействий, например, образование одиночных пионов в NN и πN соударениях, так и в области ядерных реакций типа $(p, p\pi)$, $(p, 2p)$, $(\alpha, 2\alpha)$ и т.п.

Для реакций с $n = 3$ именно измерение угловых корреляций каких-либо двух конечных частиц позволяет в каждом акте измерения фикси-

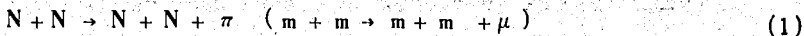
ровать все пять независимых инвариантов, предоставляя информацию о вышеуказанной зависимости. Очевидно, что такой анализ может быть выполнен только при условии, если известны фазовые объемы этих корреляций. Ранее в работе ^{1/} рассматривался лишь нерелятивистский случай.

Основная цель настоящей работы заключается в получении релятивистских выражений для фазовых объемов угловых корреляций двух частиц в реакциях при $n=3$. Для простоты результаты данной работы изложены на примере реакции



2. Дифференциальное поперечное сечение и фазовый объем угловых корреляций для реакции $p_1 + p_2 \rightarrow q + q_1 + q_2$

Наиболее общее выражение для дифференциального поперечного сечения реакции



или

$$P_1 + P_2 \rightarrow q_1 + q_2 + q$$

в обозначениях через соответствующие 4-импульсы имеет вид (см., например, ^{2/})

$$d\sigma = (2\pi)^{-5} \frac{1}{F} \frac{m^4}{2} \sum_{Spin} |M_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3 q_0 d^3 q_1 d^3 q_2}{q_0 q_{10} q_{20}}, \quad (2)$$

где, $\delta^4(P_f - P_i)$ - функция отражает законы сохранения энергии и импульса

$$P_f - P_i = p_1 + p_2 - q - q_1 - q_2 = 0, \quad (3)$$

$\sum_{Spin} |M_{fi}|^2$ - квадрат матричного элемента, просуммированный по конечным и усредненный по начальным состояниям, $F = [(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4]^{1/2}$ - инвариантный поток начальных частиц p_1 и p_2 , $d^3 q_k / q_{k0}$ - инвариантный элемент импульсного пространства частицы q_k ($k = 0, 1, 2$); $m(\mu)$ - масса нуклона (пиона).

Отметим, что выражение (2) содержит только пять независимых дифференциалов (из девяти четыре должны быть устранены с помощью δ^4 - функции). Учитывая, что

$$d^3 q_k = q_k q_{k0} dq_{k0} d\Omega_k, \quad (4)$$

и положив при фиксированных P_1 и P_2

$$(2\pi)^{-5} \frac{1}{F} \frac{m^4}{2} = \text{const};$$

получаем

$$d^5 \sigma_{0j} = \text{const} \int_{\Delta q_0, \Delta \Omega} q dq_0 d\Omega \int_{\Delta \Phi_j} \sum_{Spin} |M_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{q_{10} q_{20}}, \quad (5)$$

где Δq_0 , $\Delta \Omega$ и $\Delta \Phi_j$ - элементы фазового пространства частиц q и q_j ($j = 1, 2$), соответственно. Вид выражения, стоящего под знаком второго интеграла в (5), и пределы фазового пространства Φ_j частицы q_j при заданных энергии и импульсе частицы q определяются законами сохранения энергии и импульса (3) в виде

$$P_{10} + P_{20} - q_0 = q_{10} + q_{20} \quad (6)$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \quad (7)$$

и зависят от выбранной системы отсчета $S(D, R, L$ и т.д.). Эти пределы легко устанавливаются в D , R и L системах отсчета при преобразованиях следующего инвариантного выражения (см. Прилож. 1, 2 и рис. 1),

$$Y_j^S = \int \sum_{Spin} |M_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{q_{10} q_{20}} = \quad (8)$$

$$\frac{q_j^D}{z} \int_{-1}^{+1} dx_j^D \int_0^{2\pi} d\phi_j^D \sum_{Spin} |M_{fi}(x_j^D, \phi_j^D)|^2 = \quad (9a)$$

$$\sum_{(\pm)} \int_A^{+1} dx_j^R \rho^{(\pm)}(x_j^R) \int_0^{2\pi} \sum_{Spin} |M_{fi}(x_j^R, \phi_j^R)|^2 d\phi_j^R = \quad (9b)$$

$$\sum_{(\pm)} \int_D^{+1} dx_j^L \int_0^{2\pi} \rho^{(\pm)}(x_j^L, \phi_j^L) \sum_{Spin} |M_{fi}(x_j^L, \phi_j^L)|^2 d\phi_j^L, \quad (9b)$$

где $\rho^{(\pm)}(x_j^R)$ определяется выражением (П2.5), A - выражением (П1.13) или (П2.8) и

$$D(\phi_j^L) = \frac{A \cos \epsilon + \sin \epsilon \cdot \cos \phi_j^L \sqrt{(\cos^2 \epsilon + \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 \phi_j^L) - A^2}}{\cos^2 \epsilon + \sin^2 \epsilon \cdot \cos^2 \phi_j^L} \quad (10)$$

где

$$\cos \epsilon = \frac{1}{R} (p_1^L - q^L \cos \Theta_{p_1 q}^L) .$$

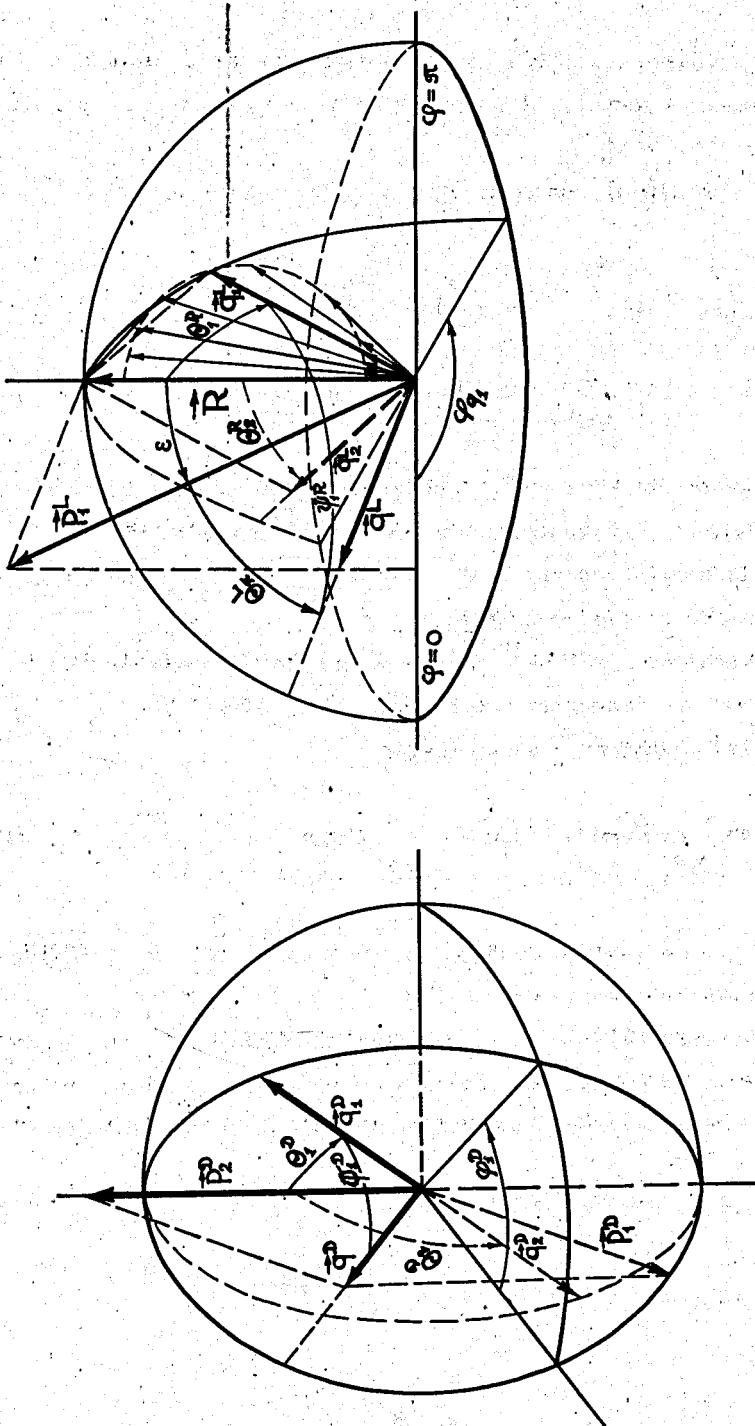


Рис. 1. Расположение векторов и отсчет углов в D- и R-системах отсчета.

Это выражение для $D(\phi_j^L)$ легко получается из соотношения (ПЗ.5) при подстановке в него $x=A$ и $x'=D(\phi_j^L)$ с дальнейшим решением относительно $D(\phi_j^L)$.

Если в (9а)-(9в) положить $\sum_{Spin} |M_{II}|^2 = 1$, то выражение

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{q_j^D}{z} \int_{-1}^{+1} dx_j^D \int_0^{2\pi} d\phi_j^D = \sum_{(\pm)} \int_A^{+1} \rho^{(\pm)}(x_j^R) dx_j^R \int_0^{2\pi} d\phi_j^R = \\
 &= \sum_{(\pm)} \int_{D(\phi_j^L)}^{+1} dx_j^L \int_0^{2\pi} \rho^{(\pm)}(x_j^L, \phi_j^L) d\phi_j^L
 \end{aligned} \tag{11}$$

приобретает смысл отнесенной к единице импульса плотности фазового объема частицы q , регистрируемой в интервалах полной энергии от q_0^S до $q_0^S + \Delta q_0^S$ и телесного угла от Ω^S до $\Omega^S + \Delta \Omega^S$, в то время как частица q_j вообще не регистрируется.

Если вместе с частицей q регистрируется одновременно и частица q_j в интервале телесного угла $\Omega_j^S, \Omega_j^S + \Delta \Omega_j^S$ ($\Delta \Omega^S = \Delta x_j^S \cdot \Delta \phi_j^S$), то вместо (11) следует рассматривать

$$\Delta J = \frac{q_j^D}{z} \int_{\Delta x_j^D} dx_j^D \int_{\Delta \phi_j^D} d\phi_j^D \rightleftharpoons \int_{\Delta x_j^R} \rho^{(\pm)}(x_j^R) dx_j^R \int_{\Delta \phi_j^R} d\phi_j^R \rightleftharpoons \int_{\Delta x_j^L(\phi_j^L)} dx_j^L \int_{\Delta \phi_j^L} \rho^{(\pm)}(x_j^L, \phi_j^L) d\phi_j^L \tag{12}$$

где в R- и L- системах знак \sum должен быть опущен вследствие однозначного соответствия между x_j^D и $q_{j0}^{R(\pm)}(x_j^R)$ (рис. 2).

В выражении (12) между представлениями для ΔJ в D-и R-системах отсчета знак равенства теперь имеет место только в том случае, когда точки границ интервалов полярных углов в D- и R-системах

$$(\Delta x_j^R = \gamma_j'' - \gamma_j') \rightleftharpoons (\Delta x_j^D = a_j'' - a_j') \tag{13}$$

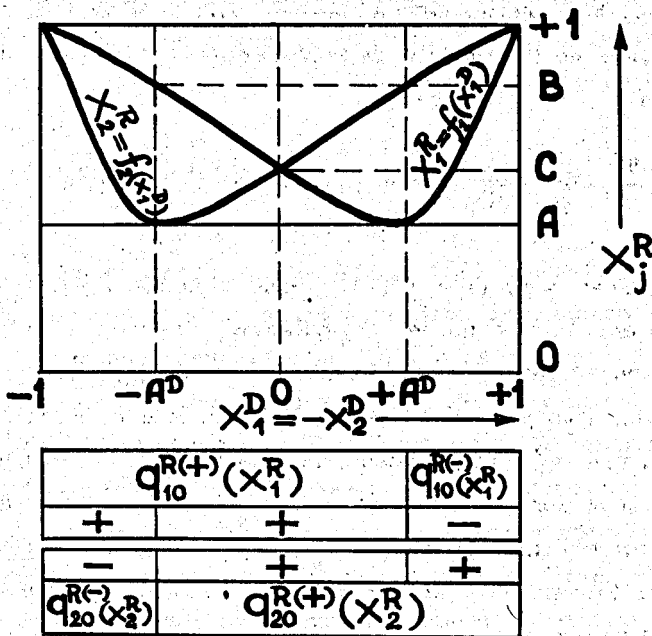


Рис.2. Схематически изображенная связь полярных углов в D- и R-системах отсчета и интервалы переменной x_1^D , соответствующие функциям $q_{j0}^{R(\pm)}(x_j^R)$ в R-системе.

связаны преобразованиями (П1.5) и (П1.12), соответственно. Между азимутальными углами в D- и R-системах отсчета имеет место связь $\phi_j^R = \phi_j^D$ (см. Прил. 1), вследствие чего $\Delta\phi_j^R = \Delta\phi_j^D$.

Интегралы в (12) в D- и R-системах легко представляются через первообразные функции:

$$F(x_j^D) = \frac{q_j^D}{z} \int dx_j^D = \frac{q_j^D}{z} \cdot x_j^D \quad (14)$$

в D-системе и (см. Прил. 2)

$$F^{(\pm)}(x_j^R) = \int \rho^{(\pm)}(x_j^R) dx_j^R = \frac{1}{R} [(\pm) q_{j0}^{(\pm)}(x_j^R)] \quad (15)$$

в R-системе.

Другое представление первообразной, отличной от (15) по виду, но эквивалентной по результату вычислений с ней, получается из (14) при подстановке в него (П1.5)

$$F(x_j^D) = \frac{q_j^D}{z} \cdot x_j^D = \frac{1}{R} \left(\frac{R_0}{2} - q_{j0}^{R(\pm)}(x_j^R) \right) = F^{*(\pm)}(x_j^R). \quad (16)$$

В эквивалентности (15) и (16) легко убедиться, учтя, что (15) предполагает одинаковую последовательность пределов по x_j^R у $q_{j0}^{R(+)}$ и $q_{j0}^{R(-)}$, в то время как в (16) расположение пределов по x_j^R у $q_{j0}^{R(+)}$ и $q_{j0}^{R(-)}$ необходимо устанавливать в соответствии с местом (+) и (-) решений на шкале x_j^D (см. рис.2). Теперь очевидно, что введением

R-системы производится разделение переменных x и ϕ для частицы q_j и выполняется интегрирование по x_j^R с помощью первообразной (15) или (16) (интегрирование по ϕ_j^R выполняется тривиально). Разделение переменных в L-системе не имеет места, вследствие чего не удается найти простого выражения для первообразной и интегрирование необходимо выполнять непосредственно.

В результате, для фазового объема угловых корреляций $\Delta \Phi_{0j}^{SS}$ частиц q и q_j (частица q регистрируется с полной энергией от q_0^S до $q_0^S + \Delta q_0^S$ в интервале телесного угла $\Omega^S, \Omega^S + \Delta \Omega^S$, а частица q_j одновременно регистрируется в интервале телесного угла $\Omega_j^S, \Omega_j^S + \Delta \Omega_j^S$) получаем следующие точные релятивистские выражения

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_{0j}^{SD} &= \Delta^S \sigma_{0j}^{SD} (|M_{fi}|^2 = 1) = \\ &= \int_{\Delta q_0^S, \Delta \Omega^S} q^S dq_0^S d\Omega^S \left\{ \frac{q_j^D}{z} x_j^D \left| \frac{\alpha''}{\alpha'} \cdot \phi_j^D \right| \frac{\xi''}{\xi'} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta \Phi_{0j}^{SR(\pm)} = \Delta^5 \sigma_{0j}^{SR(\pm)} (|M_{r1}|^2 = 1) =$$

$$= \int_{\Delta q_0^S, \Delta \Omega^S} q^S d q_0^S d \Omega^S \left\{ \frac{1}{R} [(\pm) q_{j0}^{R(\pm)} (x_j^R)] \gamma'' \cdot \phi_j^R | \xi'' \right\}, \quad (18)$$

$$\Delta \Phi_{0j}^{SL(\pm)} = \Delta^5 \sigma_{0j}^{SL(\pm)} (|M_{r1}|^2 = 1) = \quad (19)$$

$$= \int_{\Delta q_0^S, \Delta \Omega^S} q^S d q_0^S d \Omega^S \int_{\Delta x_j^L(\phi_j^L)} dx_j^L \int_{\Delta \phi_j^L} \rho^{(\pm)}(x_j^L, \phi_j^L) d \phi_j^L,$$

где подинтегральные выражения являются также функциями q_0^S, x^S и ϕ^S (через q^L, R_0, R и x_j^S).

Например, в выражении (18) пределы интегрирования по x_j^R в виде зависимости от $q_0^L, x^L = \cos \theta_{p_1 q}^L$ и ϕ^L представляются следующим образом. (см. рис. 4)

$$\gamma'' \cdot \phi_j^R = (x_j^R)'' \cdot \phi_j^R = \cos \epsilon \cdot \cos \delta'' \cdot \phi_j^R + \sin \epsilon \cdot \sin \delta'' \cdot \phi_j^R \cdot \cos \phi^L =$$

$$= \frac{(p_1^L - q^L x^L) \cos \delta'' \cdot \phi_j^R + q^L \sqrt{1 - x^{L2}} \sin \delta'' \cdot \phi_j^R \cdot \cos \phi^L}{|\sqrt{p_1^{L2} + q^{L2} - 2 p_1^L q^L x^L}|}, \quad (20)$$

где δ'' и δ' - пределы по x_j^L , выделяемые поверхностью счётчика, относительно вектора \vec{p}_1^L .

Вследствие сложности подинтегральных функций и значительного числа необходимых интегрирований выражения (17)-(19) трудно использовать в практических приложениях, поэтому следует получить приближенные выражения, оправданные выбором геометрии эксперимента и разрешающей способности регистрирующих частицы приборов. В частности, для достаточно малых интервалов

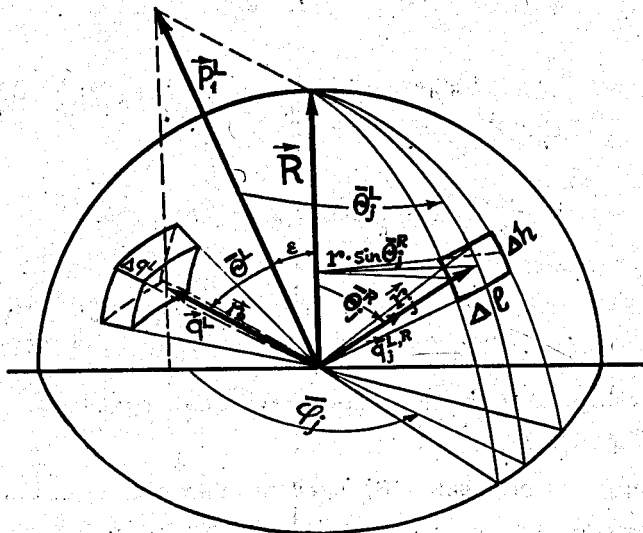


Рис.3. Расположение счетчиков, регистрирующих на совпадения частицы q и q_1 . Изображенное расположение счетчика частицы q_1 соответствует ее регистрации в R -системе (прибор, регистрирующий частицу q_1 , может вращаться относительно вектора $\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}_1^L$).

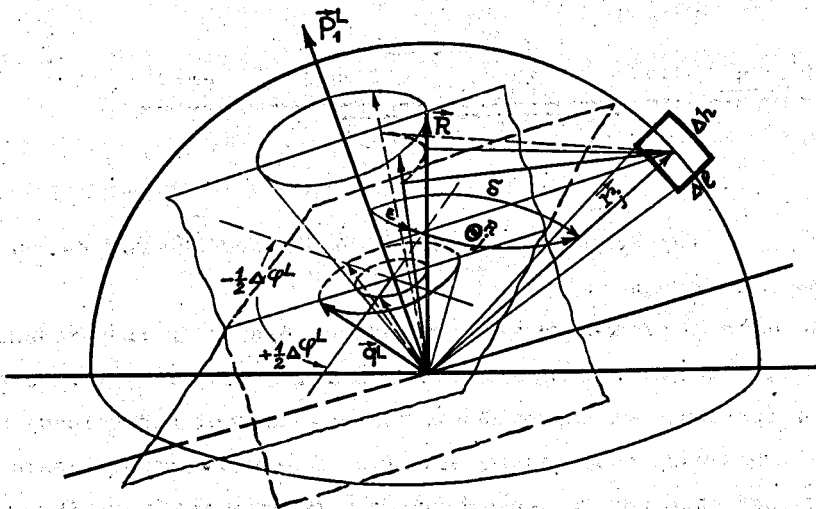


Рис.4. Схематическая иллюстрация "подвижности" вектора \vec{R} , возникающей за счет азимутального разрешения $\Delta\phi^L$ прибора, регистрирующего частицу q (для простоты рисунка роль разрешений Δq_0^L и Δx^L не рассматривается).

$$\Delta q_0 \ll q_0, \quad (\Delta x, \Delta x_j) \ll 1, \quad (\Delta \phi, \Delta \phi_j) \ll \pi, \quad (21)$$

применяя теорему о среднем и учитывая (14) и (15), выражения (17)-(19) с известной степенью приближения можно представить в дифференциальном виде

$$\Delta \Phi_{0j}^{SD} = \Delta^5 \sigma_{0j}^{SD} (|M_{fi}|^2 = 1) \cong q^S \cdot \frac{q_j^D}{z} \cdot \Delta q_0^S \Delta \Omega^S \Delta \Omega_j^D, \quad (22)$$

$$\Delta \Phi_{0j}^{SR(\pm)} = \Delta^5 \sigma_{0j}^{SR(\pm)} (|M_{fi}|^2 = 1) \cong q^S \cdot \rho^{(\pm)}(x_j^R) \Delta q_0^S \Delta \Omega^S \Delta \Omega_j^R, \quad (23)$$

$$\Delta \Phi_{0j}^{SL(\pm)} = \Delta^5 \sigma_{0j}^{SL(\pm)} (|M_{fi}|^2 = 1) \cong q^S \cdot \rho^{(\pm)}(x_j^L, \phi_j^L) \Delta q_0^S \Delta \Omega^S \Delta \Omega_j^L, \quad (24)$$

где между выражениями (22) и (23) имеет место знак равенства, если точки границ интервалов $\Delta \Omega_j^D$ и $\Delta \Omega_j^R$ связаны преобразованиями (П1.5) и (П1.12). Выражение (24) может быть получено как из (19), так и из (23) путем замены переменных (П3.5) в выражении для $\rho^{(\pm)}(x_j^R)$ с учетом того, что для интервалов $\Delta \Omega_j^R$ и $\Delta \Omega_j^L$ выполняется соотношение $\Delta \Omega_j^R = \Delta \Omega_j^L$ (см. Прил. 3).

3. Условия, предъявляемые к эксперименту при измерении угловых корреляций

Полученные в разделе 2 выражения для фазового объема могут быть использованы для извлечения из эксперимента информации о квадрате матричного элемента реакций типа (1) на основе соотношения

$$\frac{\Delta^5 \sigma_{0j}^{SS(\text{экс})}}{\Delta \Phi_{0j}^{SS}} \cong \sum_{\text{Spin}} |M_{fi}(R_0, R, x^S, \Omega^S, \Omega_j^S)|^2, \quad (25)$$

где знак "≈" означает усреднение по интервалам

$$(\bar{x}^S, \bar{x}^S + \Delta x^S), (\bar{\Omega}^S, \bar{\Omega}^S + \Delta \Omega^S), (\bar{\Omega}_j^S, \bar{\Omega}_j^S + \Delta \Omega_j^S).$$

Величина (25) тем точнее воспроизводит квадрат матричного элемента в точке $(x^S, \Omega^S, \Omega_j^S)$, чем лучше выполняются в эксперименте условия (21). Удовлетворение условий (21) в принципе всегда может быть достигнуто путем улучшения энергетического разрешения и удаления счетчиков на достаточно большие расстояния $r_{0,j}$ от мишени. Необходимо учитывать также еще две особенности, содержащиеся в выражении (25). Во-первых, функции

$$\rho^{(\pm)}(x_j^R) = [q_j^{R(\pm)}(x_j^R)]^2 / mR \sqrt{x_j^{R2} - A^2}$$

при $x_j^R = A$ в R-системе и

$$\rho^{(\pm)}(x_j^L, \phi_j^L) = [q_j^{L(\pm)}(x_j^L, \phi_j^L)]^2 / mR \sqrt{(x_j^L \cos \epsilon - \sin \epsilon \sqrt{1 - x_j^{L2} \cos^2 \phi_j^L})^2 - A^2}$$

при $x_j^L = D(\phi_j^L)$ в L-системе обращаются в бесконечность, вследствие чего выражения (23) и (24) не могут быть использованы для вычисления величин $\Delta \Phi_{0j}^{S,(R;L)}$ в окрестности этих точек. При регистрации частицы q_j в R-системе для вычисления величины $\Delta \Phi_{0j}^{SR}$ в интервале $\Delta x_j^R = \gamma'' - \gamma'$, когда γ'', γ' лежат вблизи точки $x_j^R = A$ (и если даже $\gamma' = A$) следует использовать выражение

$$\Delta \Phi_{0j}^{SR(\pm)} = (q^S \Delta q_0^S \Delta \Omega^S) \left\{ \frac{1}{R} [(\pm) q_{j0}^{R(\pm)}(x_j^R)]_{\gamma'}^{\gamma''} \cdot \Delta \phi_j^R \right\}, \quad (26)$$

не содержащее особенностей.

При регистрации частицы q_j в L -системе для вычисления $\Delta \Phi_{0j}^{SL(\pm)}$ не удается дать выражения, аналогичного (26). Более того, в L -системе допустимая область обнаружения частицы q_j имеет более сложную конфигурацию, чем в R -системе (где допустимы все полярные углы в интервале $(0 \leq x_j^R \leq A)$). Именно, для каждого азимутального угла ϕ_j^L в L -системе имеет место своя величина граничного угла $D(\phi_j^L)$, определяемого из (10), что приводит к следующим возможным интервалам углов ϕ_j^L , если вращение регистрирующей частицы q_j прибора совершается под заданным полярным углом x_j^L ($D(\pi) \leq x_j^L < +1$): а) для интервала $\cos(\theta_{j\max}^R - \epsilon) \leq x_j^L \leq +1$ допустимы все азимутальные углы $0 \leq \phi_j^L \leq 2\pi$ и б) для интервала $\cos(\theta_{j\max}^R + \epsilon) \leq x_j^L \leq \cos(\theta_{j\max}^R - \epsilon)$ допустимы лишь углы, определяемые из соотношения

$$-1 \leq \cos \phi_j^L \leq [(\cos \phi_j^L)_{\text{lim}} = \frac{x_j^L \cos \epsilon - A}{\sin \epsilon \sqrt{1 - x_j^{L2}}}], \quad (27)$$

где

$$\cos \theta_{j\max}^R = A = \frac{1}{2mR} \sqrt{4m^2 R_0^2 - z^4}.$$

Во-вторых, вследствие того, что вектор $\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}^L$ является вектором физической азимутальной симметрии вылета частиц q_j с одинаковой энергией $q_{j0}^{R(\pm)}$, его наличие проявляется в том, что помещенный вблизи этого вектора регистрирующий прибор начинает выделять слишком большой интервал азимутальных углов, нарушая одно из условий (21). Формально такой же эффект имеет место для направления вектора \vec{p}_1^L , выполняющего роль оси вращения прибора в L -системе. Однако из всех лабораторных систем системой, отвечающей физической симметрии в реакциях с $n=3$, является R -система, вследствие чего важен лишь учет особенности при $\sin \Theta_j^R \rightarrow 0$,

$$\Delta y = \Delta y' [\sin(\Theta_j^R + \epsilon) / \sin \Theta_j^R] \rightarrow \infty.$$

Поэтому для окрестности вблизи направления \vec{R} необходима проверка выполнения условий (21) в R -системе для размеров прибора, регистрирующего частицу q_j в L -системе.

4. Заключение

Полученные в разделе 2 точные релятивистские выражения для фазовых объемов корреляций сложны для получения конкретных численных результатов. Самым сложным является выражение (19) для $\Delta \Phi_{0j}^{SL}$, что обусловлено отсутствием для частиц q_j азимутальной симметрии в L -системе. Более удобными для целей расчета являются приближенные выражения (22)-(24), причем при их применении необходимо выполнение условий (21) и условий, указанных в разделе 3. Наиболее желательный эксперимент должен был бы заключаться во вращении прибора, регистрирующего частицу q_j , относительно направления вектора $\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}^L$. Однако вектор \vec{R} при заданном векторе \vec{p}_1^L является функцией величин q_0^L и $x^L = \cos \Theta_{p_1^L q}^L$, меняя в зависимости от них свою величину и направление относительно вектора \vec{p}_1^L . Эта "подвижность" вектора \vec{R} затрудняет его использование в качестве оси вращения прибора, регистрирующего частицу q_j , и по этой причине наиболее вероятно, что эксперименты по исследованию угловых корреляций в реакции (1) будут выполнены в обычной геометрии, когда прибор вращается относительно направления вектора \vec{p}_1^L (L -система). Для эксперимента в L -системе приближенное выражение (24) достаточно простое для расчета и при соблюдении выше указанных условий оно может быть широко использовано для извлечения из эксперимента информации о квадрате матричного элемента реакции (1).

Автор считает своим приятным долгом выразить сердечную благодарность профессорам И. Агановичу, Н.А. Черникову, С.В. Измайлову, Р.М. Рындину и доктору М. Фримену за полезные обсуждения и советы, профессору Э. Фьери за сообщение независимо полученного им результата о связи углов в D- и R- системах отсчета, профессорам В.П.Джелепову и Л.И.Лapidусу за гостеприимство и обеспечение условий для выполнения данной работы в ОИЯИ.

П р и л о ж е н и е 1

Связь полярных углов, определяющих направления вылета частиц q_j ($j=1,2$) в D- и R- системах отсчета (рис. 1), получим, используя выражения для инвариантов

$$\bar{t}^2 = -(q_1 - p_2)^2, \quad (1.1)$$

$$\Delta^2 = -(q_2 - p_2)^2. \quad (1.2)$$

В частности,

$$\bar{t}^2 = 2(p_{20}^D q_{10}^D - m^2 - p_2^D q_1^D \cos \theta_1^D) \quad (1.3)$$

в D-системе ($\vec{q}_1^D + \vec{q}_2^D = 0$, $z^2 = (q_{10}^D + q_{20}^D)^2 = 4q_{10}^{D2}$,

$$x_j^D = \cos \theta_j^D = \frac{(\vec{q}_j^D \cdot \vec{p}_2^D)}{|\vec{q}_j^D| \cdot |\vec{p}_2^D|}$$

и

$$\bar{t}^2 = 2m(q_{10}^R - m) \quad (1.4)$$

в R-системе ($\vec{p}_2^L = 0$, $\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}^L$, $R_0 = p_{10}^L + m - q_0^L$, $z^2 = (q_{10}^R + q_{20}^R)^2 -$

$$-(q_1^R + q_2^R)^2 = R_0^2 - R^2, \quad x_j^R = \cos \theta_j^R = \frac{(\vec{q}_j^R \cdot \vec{R})}{|\vec{q}_j^R| \cdot |\vec{R}|}.$$

Учитывая, что $z^2 = (q_1 + q_2)^2 = 4 q_{j0}^{D2} = R_0^2 - R^2$,

$$p_{20}^D = m \frac{R_0}{z}, \quad p_2^D = m \frac{R}{z}, \quad q_{10}^D = q_{20}^D = \frac{z}{2}, \quad q_1^D = q_2^D = q = \frac{1}{2} \sqrt{z^2 - 4m^2},$$

из (1.3) и (1.4) и подобных выражений для Δ^2 сразу получаем

$$x_j^D = \cos \theta_j^D = \frac{z}{Rq} \left(\frac{R_0}{2} - q_{j0}^R \right). \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) представляет искомую зависимость вида $x_j^D = f(x_j^R)$, поскольку в качестве q_{j0}^R следует брать ($x_j = x_j^R$)

$$q_{j0}^R = q_{j0}^{R(\pm)}(x_j) = \frac{1}{2(R_0^2 - R^2 x_j^2)} \left[R_0^2 \pm R x_j \sqrt{z^2 - 4m^2 (R_0^2 - R^2 x_j^2)} \right], \quad (1.6)$$

являющееся решением законов сохранения энергии и импульса, записанных в R-системе для фиксированных полной энергии q_0 и полярного угла $x^L = \cos \theta_{p_1 q}^L$ частицы q ,

$$R_0 = p_{10}^L + m - q_0^L = q_{10}^L + q_{20}^L = q_{10}^R + q_{20}^R, \quad (1.7)$$

$$\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}^L = \vec{q}_1^L + \vec{q}_2^L = \vec{q}_1^R + \vec{q}_2^R, \quad (1.8)$$

где

$$R = \left| \sqrt{p_1^{L2} + q^{L2} - 2 p_1^L q^L x^L} \right|.$$

Для нахождения обратной зависимости вида $x_j^R = f^*(x_j^D)$ используем (1.5) и очевидное соотношение $x_2^D = -x_1^D$. Тогда

$$q_{(20)}^R = \frac{R_0}{2} + \frac{R}{z} q x_1^D \quad (1.9)$$

$$q_{(21)}^R = \sqrt{\left(\frac{R_0}{2} + \frac{R}{z} q x_1^D\right)^2 - m^2}. \quad (1.10)$$

Далее, рассмотрев скалярные произведения векторов $\vec{R} = \vec{p}_1^L - \vec{q}_1^L$ и \vec{q}_2^R с вектором \vec{R} , легко приходим к соотношению

$$x_{(21)}^R = \cos \theta_{(21)}^R = \frac{R}{2q_{(21)}^R} \left[1 + \frac{1}{R^2} (q_{(20)}^{R2} - q_{(20)}^{R2})\right]. \quad (1.11)$$

Подставив (1.9) и (1.10) в (1.11) и имея в виду, что $\frac{R_0^2}{4} - m^2 = q^2 + \frac{R^2}{4}$, после несложных преобразований получим соотношение

$$x_{(21)}^R = \cos \theta_{(21)}^R = \frac{\frac{R}{2} + \frac{R_0}{z} q x_1^D}{\sqrt{\left(\frac{R}{2} + \frac{R_0}{z} q x_1^D\right)^2 + q^2(1 - x_1^{D2})}}, \quad (1.12)$$

представляющее искомую зависимость вида $x_j^R = f^*(x_j^D)$.

Графически зависимости (1.12) и (1.5) схематично изображены на рис. 2.

Соответствие следующих величин в R-системе

Этот результат независимо получен Э. Феррари путем преобразования Лоренца непосредственно для компонент вектора \vec{q}_j^D при переходе из D-системы в R-систему.

$$(x_j^R)_A = A = \frac{1}{2mR} \sqrt{4m^2 R_0^2 - z^4},$$

$$(x_j^R)_B = B = \frac{1}{2m} \frac{z^2 - 2m^2 A^2}{|\sqrt{R^2 - (R_0^2 - m^2) A^2}|}, \quad (1.13)$$

$$(x_j^R)_C = C = R / \sqrt{R_0^2 - 4m^2}$$

величинам в D-системе

$$(x_1^D)_B = \pm A^D = \pm \frac{2q R_0}{Rz} = -(x_2^D)_B, \quad (x_j^D)_C = 0 \quad (1.14)$$

легко устанавливается из (1.5), если учесть, что из (1.6) следует

$$q_{j0}^R(A) = R_0 \frac{2m^2}{z^2}, \quad q_{j0}^{R(+)}(B) = R_0 \left(1 - \frac{2m^2}{z^2}\right), \quad q_{j0}^{R(+)}(C) = \frac{R_0}{2}. \quad (1.15)$$

На рис. 2 чередование знаков у величин q_{j0}^R , определяемых из (1.6), указывает на необходимый способ сложения величин q_{10}^R и q_{20}^R так, чтобы их сумма равнялась R_0 ; при этом связь углов θ_1^R и θ_2^R определяется из соотношения (см. 1.8)

$$R = q_1^R x_1^R + q_2^R x_2^R; \quad (1.16)$$

например, если заданы x_1^R и $q_{10}^{R(\pm)}(x_1^R)$, то

$$x_2^R = \frac{R - \sqrt{q_{10}^{R2} - m^2} \cdot x_1^R}{\sqrt{(R_0 - q_{10}^R)^2 - m^2}}. \quad (1.17)$$

Наконец, преобразование азимутальных углов ϕ_j^D и ϕ_j^R следует из инвариантов t^2 и $\bar{\Delta}^2$, записанных через переменные в D- и R-системах отсчета, и имеет вид

$$\cos \phi_j^R = \cos \phi_j^D, \quad \phi_j^R = \phi_j^D. \quad (1.18)$$

Приложение 2

Фазовый объем для частиц q , образующихся в реакции (1), определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(q_0, \Omega) &= \left[\frac{d^2 \sigma (|M_{fi}|^2 = 1)}{dq_0 d\Omega} \right] \Delta q_0 \Delta \Omega = \\ &= \frac{m^4}{(2\pi)^5} \cdot \frac{1}{F} \cdot |\vec{q}| \left\{ \int \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{q_{10} q_{20}} \right\} \Delta q_0 \Delta \Omega, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где величины q_0 , $|\vec{q}|$ и Ω задаются в той системе координат, для которой вычисляется фазовый объем, а выражение

$$J = \int \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{q_{10} q_{20}} = \text{invar.}, \quad (2.2)$$

представляющее плотность фазового объема частицы q , является инвариантом и может быть вычислено в любой системе отсчета. В частности, величина J легко вычисляется в D -системе (см. Прил. 1):

$$J = \frac{q_j^D}{z} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta_j^D \int_0^{2\pi} d \phi_j^D = 2\pi \frac{q_j^D}{q_{j0}^D} = 2\pi \sqrt{1 - \frac{4m^2}{z^2}}. \quad (2.3)$$

Если интегрирование по δ^4 -функции в (2.2) выполнить в R -системе, то получим выражение ($x_j^R = x_j$)

$$J = 2\pi \int_A^{+1} \{ \rho^{(+)}(q_{j0}^{R(+)}(x_j), x_j) + \rho^{(-)}(q_{j0}^{R(-)}(x_j), x_j) \} dx_j \quad (2.4)$$

$$\rho^{(\pm)}(q_{j0}^{R(\pm)}(x_j), x_j) = \frac{[q_j^{R(\pm)}(x_j)]^2}{|R_0 q_j^{R(\pm)}(x_j) - q_{j0}^{R(\pm)}(x_j) R x_j|} = \frac{[q_j^{R(\pm)}(x_j)]^2}{mR |\sqrt{x_j^2 - A^2}|}, \quad (2.5)$$

$$q_{j0}^{R(+)}(x_j) = \frac{1}{2R(c^2 - x_j^2)} [a c + 2mR x_j \sqrt{x_j^2 - A^2}], \quad (2.6)$$

$$q_j^{R(+)}(x_j) = \frac{1}{2R(c^2 - x_j^2)} [a x_j + 2mR c \sqrt{x_j^2 - A^2}], \quad (2.7)$$

$$A_j = (x_j)_{lim}^{low} = \frac{1}{2mR} |\sqrt{4m^2 R_0^2 - a^2}|, \quad (2.8)$$

$$c = R_0 / R, \quad a = z^2 = R_0^2 - R^2.$$

Поскольку интеграл (2.4) является несобственным (при $x_j = A$ подинтегральная функция (2.5) терпит бесконечный разрыв), то вопрос о существовании предела интеграла должен быть решен нахождением первообразной, соответствующей функции (2.5).

Для удобства обозначим

$$J = 2\pi (J^{(+)} + J^{(-)}), \quad (2.9)$$

где

$$J^{(+)} = \int_A^{+1} \rho^{(+)}(x_j) dx_j, \quad J^{(-)} = \int_A^{+1} \rho^{(-)}(x_j) dx_j.$$

Возведя в квадрат выражение (2.7) и подставив результат для $[q_j^{R(\pm)}(x_j)]^2$ в (2.9), получим

$$J^{(+)} = \int_A^{+1} \rho^{(+)}(x) dx = J_1 + J_2 + J_3, \quad (2.10)$$

$$J^{(-)} = \int_A^{+1} \rho^{(-)}(x) dx = J_1 + J_2 - J_3, \quad (2.11)$$

$$J_1 = \frac{a^2}{4mR^3} \int_A^{+1} \frac{x^2 dx}{(c^2 - x^2)^2 \sqrt{x^2 - A^2}} = \frac{a^2}{4mR^3} J_1', \quad (2.12)$$

$$J_2 = \frac{mR_0^2}{R^3} \int_A^{+1} \frac{\sqrt{x^2 - A^2} dx}{(c^2 - x^2)^2} = \frac{mR_0^2}{R^3} J_2', \quad (2.13)$$

$$J_3 = \frac{aR_0}{R^3} \int_A^{+1} \frac{x dx}{(c^2 - x^2)^2} = \frac{aR_0}{R^3} J_3'. \quad (2.14)$$

Подстановкой $\eta = \frac{x^2 - A^2}{x^2}$ интегралы (2.12) и (2.13) приводятся к виду

$$J_1' = A^2 \frac{1}{2c^4} \int_0^{1-A^2} \frac{d\eta}{z_1^2 \sqrt{\eta}} = A^2 \frac{1}{2c^4} \left\{ \frac{\sqrt{\eta}}{k^2 z_1} \Big|_0^{1-A^2} + \frac{1}{2k^2} \int_0^{1-A^2} \frac{d\eta}{z_1 \sqrt{\eta}} \right\}, \quad (2.15)$$

$$J_2' = A^2 \frac{1}{2c^4} \int_0^{1-A^2} \frac{\sqrt{\eta} d\eta}{z_1^2} = A^2 \frac{1}{2c^4} \left\{ \frac{\sqrt{\eta}}{z_1} \Big|_0^{1-A^2} - \frac{1}{2} \int_0^{1-A^2} \frac{d\eta}{z_1 \sqrt{\eta}} \right\}, \quad (2.16)$$

где

$$k^2 = \frac{c^2 - A^2}{c^2}, \quad z_1 = k^2 - \eta.$$

Учитывая, что

$$\left[\frac{a^2}{4mR^3k^2} + \frac{mR_0^2}{R^3} \right] = \left\{ \frac{0}{2} \frac{mc^2}{R} \right\} \quad (2.17)$$

получим

$$\begin{aligned} J^{(+)} + J^{(-)} &= 2(J_1 + J_2) = \frac{A^2}{c^4} \left[\frac{a^2}{4mR^3k^2} + \frac{mR_0^2}{R^3} \right] \frac{\sqrt{\eta}}{(k^2 - \eta)} \Big|_0^{1-A^2} = \\ &= \frac{2m \cdot x}{R(c^2 - x^2)} \sqrt{x^2 - A^2} \Big|_A^{+1} = \frac{2mR}{z^2} \sqrt{1 - A^2} = 2 \frac{q_1^D}{z} \quad (2.18) \end{aligned}$$

Из (2.18) следует, что первообразная плотности полного фазового объема частицы q является непрерывной функцией во всем интервале $(A, +1)$, а окончательный результат совпадает с (2.3). Необходимо отметить, что интеграл

$$J'_3 = \int_A^{+1} \frac{x dx}{(c^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(c^2 - x^2)} \Big|_A^{+1} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \left(1 - \frac{4m^2}{z^2} \right) \quad (2.19)$$

не входит в (2.18) и, следовательно, в (2.4); однако он необходим, если требуется вычислить отдельно величины $J^{(+)}$ и $J^{(-)}$, соответствующие полным энергиям $q_{j0}^{R(+)}$ и $q_{j0}^{R(-)}$ частицы q . Затем из (2.18) и (2.19) сразу следует, что первообразная функция плотности фазового объема частицы q есть

$$\begin{aligned} F^{(\pm)} &= F_1 + F_2 \pm F_3 = \frac{m \cdot x}{R(c^2 - x^2)} \sqrt{x^2 - A^2} \pm \frac{1}{2} \frac{a \cdot c}{R^2} \frac{1}{(c^2 - x^2)} = \\ &= \left(\frac{\pm}{\pm} \right) \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{1}{2R(c^2 - x^2)} (ac \pm 2mR x \sqrt{x^2 - A^2}) \right] \right\} = \left(\frac{\pm}{\pm} \right) \left[\frac{1}{R} q_{j0}^{R(\pm)}(x) \right], \quad (2.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= F^{(+)} + F^{(-)} = \\
 &= \frac{1}{R} [q_{j0}^{R(+)}(x) - q_{j0}^{R(-)}(x)] = \frac{2m\alpha}{R(c^2 - \alpha^2)} \sqrt{x^2 - A^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Приложение 3

Приведем формулы преобразований углов при переходах $R \rightleftharpoons L$. Графически расположение векторов \vec{p}_j^L , \vec{q}_j^L , \vec{R} , $\vec{q}_j^{L,R}$ и элемента телесного угла $\Delta\Omega_j^{L,R}$, выделяемого счетчиком в направлении вектора $\vec{q}_j^{L,R}$, изображено на рис. 3.

Телесный угол $\Delta\Omega_j = \Delta\cos\theta_j \Delta\phi_j$, в котором производится регистрация частицы q_j , представим в виде прямоугольной малой площадки ΔS со сторонами Δh и Δl , находящейся на расстоянии r_j от начала координат R- и L-систем отсчета. Для простоты обозначим $\cos\theta_j^R = x$, $\phi_j^R = y$ для R-системы и $\cos\theta_j^L = x'$, $\phi_j^L = y'$ для L-системы. Тогда для интервалов углов, выделяемых малой площадкой $\Delta S = \Delta h \cdot \Delta l$ в R- и L-системах отсчета, имеем соотношения ($\Delta\theta_j^R = \Delta\theta_j^L = \frac{\Delta h}{r_j}$)

$$\Delta x = \sin\theta_j^R \cdot \Delta\theta_j^R = \frac{\Delta h \cdot \sin\theta_j^R}{r_j}, \quad \Delta y = \frac{\Delta l}{r_j \cdot \sin\theta_j^R}, \tag{3.1}$$

$$\Delta x' = \sin\theta_j^L \cdot \Delta\theta_j^L = \frac{\Delta h \cdot \sin\theta_j^L}{r_j}, \quad \Delta y' = \frac{\Delta l}{r_j \cdot \sin\theta_j^L}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$\Delta x \cdot \Delta y = \Delta x' \cdot \Delta y' = \frac{\Delta h \cdot \Delta l}{r_j^2} = \frac{\Delta S}{r_j^2} = \Delta \Omega_j^R = \Delta \Omega_j^L, \quad (3.3)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{\sin \theta_j^R}{\sin \theta_j^L} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x'^2}} \quad (3.4)$$

Также должны производиться следующие преобразования углов

$$[\cos \epsilon = \frac{1}{R} (p_1^L - q^L x^L)]:$$

$$x' = x \cdot \cos \epsilon - \sin \epsilon \sqrt{1-x'^2} \cdot \cos y', \quad (3.5)$$

$$\cos y = \frac{x' \cdot \sin \epsilon + \cos \epsilon \sqrt{1-x'^2} \cdot \cos y'}{\sqrt{1-(x' \cdot \cos \epsilon - \sin \epsilon \sqrt{1-x'^2} \cos y')^2}} \quad (3.6)$$

при переходе $L \rightarrow R$ и

$$x' = x \cdot \cos \epsilon + \sin \epsilon \sqrt{1-x^2} \cos y, \quad (3.7)$$

$$\cos y' = \frac{-x \cdot \sin \epsilon + \cos \epsilon \sqrt{1-x^2} \cos y}{\sqrt{1-(x \cos \epsilon + \sin \epsilon \sqrt{1-x^2} \cos y)^2}} \quad (3.8)$$

при переходе $R \rightarrow L$. Полученные соотношения вместе с (3.4) означают, что вследствие инвариантности телесного угла $\Delta \Omega_j$ при переходах $R \rightleftharpoons L$ отношения малых интервалов полярных и азимутальных углов подвергаются взаимнообратным преобразованиям.

Следует иметь в виду, что соотношения (3.1), (3.2) и (3.4) точно выполняются лишь для компланарной геометрии (векторы \vec{p}_1^L , \vec{R} и $\vec{q}_j^{R,L}$ лежат в одной плоскости); в случае, когда $\vec{q}_j^{R,L}$ не лежит в одной плоскости с \vec{p}_1^L и \vec{R} , эти соотношения выполняются приближенно, если $\cos \epsilon$ мало отличается от единицы. Наконец, инвариантность телесного угла при преобразованиях (3.5)-(3.6) и (3.7)-(3.8) следует из равенства их якобианов единице.

Л и т е р а т у р а

1. G.G. Ohlsen. Nucl.Instr.Methods., 37, 240 (1965).
2. E. Ferrari and F. Selleri. Nuovo Cim., 27, 1450 (1963); Suppl. Nuovo Cim., 24, 453 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1970 года.