

**сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна**

P11-85-970

Е.П.Жидков, Э.Г.Никонов*, Б.Н.Хоромский

**ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ
ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ НА ПОЛУОСИ**

* Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

1985

§ I. Введение

При численном решении интегральных квазипотенциальных уравнений важным требованием является высокая относительная точность собственных чисел (СЧ) и собственных функций (СФ), необходимых для описания экспериментальных данных [1]. Суть математической проблемы заключается в том, что СФ, определенные на полуоси, имеют степенное убывание при $X \rightarrow \infty$ и, как правило, с достаточно малым показателем [2]. Поэтому при использовании приближенного уравнения на конечном отрезке длины R , даже с учетом главного члена в асимптотике СФ (если он известен), величина R может оказаться неприемлемо большой, что, в свою очередь, приводит к значительному увеличению трудоемкости вычислительного процесса. Если же в вычислительной схеме учитывать несколько первых членов асимптотики СФ, когда они известны, то это не только значительно усложняет алгебраическую проблему, но и делает ее, вообще говоря, нелинейной.

В работе проведена оценка практической эффективности и предложены оптимальные варианты реализации двухпараметрической экстраполяции [3], предназначенной для повышения точности приближенных решений (без существенного увеличения трудоемкости алгоритма) спектральных задач вида:

$$(I.1) \quad L\psi \equiv \nu(x)\psi(x) + \beta c(x) \int_0^{\infty} G(x,y) c(y)\psi(y)dy = \lambda\psi(x); \quad x \geq 0;$$

$$\int_0^{\infty} \psi^2(x) dx = 1; \quad G(x,y) = G(y,x),$$

в случае, когда решение $\psi(x)$ имеет асимптотику

$$(I.2) \quad \psi(x) = \sum_{i=0}^L \frac{b_i}{x^{\alpha+1}} + O(x^{-\alpha-L}); \quad s \geq 1; L \geq 0; \alpha > 1; X \rightarrow \infty;$$

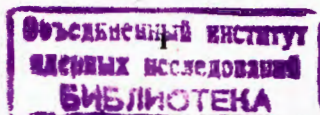
и достаточную гладкость по X , т.е. $\psi(x) \in C^M[0, \infty)$, $M \geq 4$.

В рамках построенного в [3] алгоритма задача (I.1) сводится к частичной проблеме на собственные значения для симметрической матрицы

$$(I.3) \quad Au_{\xi} = \lambda_{\xi} u_{\xi}; \quad u_{\xi} = (u_1, \dots, u_n, \nu \cdot u_{n+1})^T; \quad \xi = (\beta; \tau)$$

посредством метода Галеркина для системы φ_{κ} ; $\kappa = 1, \dots, n+1$, кусочно-линейных базисных, определенных на сетке $\omega_R = \{x_i; x_i = i \cdot h, i = 1, \dots, n+1\}$ функций, учитывающих первый член асимптотики (I.2). Здесь

$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i \varphi_i$; $(L\varphi, \varphi_{\kappa}) = \lambda_{\xi} (\varphi, \varphi_{\kappa})$, $\kappa = 1, \dots, n+1$; $h = R/(n+1)^{\frac{1}{s}}$; $\tau = R^{-1}$; $\nu = \|\varphi_{n+1}\| \cdot h^{-\frac{1}{s}}$, относительно скалярного произведения в L_2 . При этом порядок аппроксимации, так же, как и погрешность приближенных решений (u_{ξ}, λ_{ξ}) ,



зависят от двух малых параметров: h - шага дискретизации по переменной X , и $\tau = R^{-1}$, где R таково, что при $X \geq R$, $\varphi_{n+1}(x) = (R/X)^4$. Построенная система аппроксимирует исходное уравнение с точностью

$$\Delta_f = O(h^2) + O(\tau^{4+s-1}).$$

Двухпараметрическая экстраполяция основана на предположении о регулярной зависимости погрешности сеточных решений от параметров дискретизации h и τ :

$$(I.4) \quad P_3 u - u_f = P_3 \left[\sum_{i=1}^m c_i(x) h^{4+i} + \sum_{i=1}^k \frac{g_i(x, h)}{R^{4+3i-1}} \right] + \eta_f;$$

$$\lambda - \lambda_f = \sum_{i=1}^m d_i h^{4+i} + \sum_{i=1}^k \frac{v_i(h)}{R^{4+3i-1}} + \varepsilon_f;$$

$$\varepsilon_f, \|\eta_f\| = O(h^{4+s}) + O(R^{-4-4s}),$$

где $P_3 u = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n), \nu \cdot u(x_{n+1}))^T$, $x_i = i \cdot h$.

Отметим, что обоснование разложения погрешности по шагу h для интегро-дифференциального оператора на конечном отрезке получено в [4].

Как уже отмечалось, уменьшение слагаемых, зависящих от τ , в разложении (I.4) посредством простого увеличения расчетного интервала R при сохранении постоянного шага h по переменной X приводит к значительному увеличению вычислительной работы, так как, с одной стороны, растет размерность алгебраической задачи, а с другой, - увеличивается спектральный радиус ζ оператора A_f , что, в свою очередь, снижает скорость сходимости итерационного процесса решения задачи (I.3). Действительно, множитель релаксации используемого процесса пропорционален величине $q = 1 - \Delta/\zeta$, где $\Delta > 0$ не зависит от ζ , и для модели, рассмотренной в настоящей работе, справедливо соотношение $\zeta = O(R^2)$, откуда и следует быстрый рост вычислительной работы при увеличении величины R . В общем случае $\zeta = O(\nu(R)) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$.

Для реализации двухпараметрической экстраполяции в работе предложен специальный многоуровневый итерационный процесс, в котором, на наш взгляд, удачно сочетается движение по h -уровням и R -уровням. Подсчитан коэффициент экономии вычислительной работы при использовании такого процесса по сравнению с UG-методом и MG2-методом при фиксированном R . Численные эксперименты проводим на примере точно решаемой модели, описывающей кулоновское взаимодействие двух бесспиновых частиц.

$$(I.5) \quad \frac{X^2}{2} \psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| \psi(y) dy = \lambda \psi(x),$$

для которой $\lambda = 3$, $S = 2$ в разложении (I.2), $\lambda_1 = -0.5$, $\psi_1 = X \cdot (X^2 + 1)^{-2}$.

§ 2. Регулярный характер зависимости погрешности приближенных решений от τ

Учитывая, что для аппроксимации интеграла в задаче (I.1) использовалось кусочно-линейное представление неизвестной функции, можно предположить (в случае гладкого ядра $G(x, y)$ этот факт установлен в 4), что зависимость погрешности приближенных решений от шага h при фиксированном R имеет следующий вид:

$$(2.1) \quad \lambda_f - \lambda = c_1 h^2 + c_2 h^3 + c_3 h^4 + O(h^5).$$

Зависимость погрешности от τ определяется асимптотикой $u(x)$ при $X \rightarrow \infty$ (I.4).

В итоге мы используем следующее представление для погрешности:

$$(2.2) \quad \delta(h, \tau) = c_1 h^2 + c_2 h^3 + c_3 \tau^{-4} + O(h^5) + d_1 \tau^4 + d_2 \tau^6 + O(\tau^8),$$

где c_3 включает в себя N в соответствующей степени, так как $h = R \cdot N^{-1} = \tau^{-1} \cdot N^{-1}$. Разложение погрешности приближенных решений в таком виде позволит нам проводить экстраполяцию по τ , после соответствующей экстраполяции по h , более точно.

Отметим, что традиционный метод экстраполяции типа Ричардсона по параметру h является одним из универсальных средств повышения точности решений широкого круга задач [5, 6].

Тот факт, что разложение (2.2) с достаточной степенью точности описывает зависимость погрешности приближенных решений, подтверждается при анализе реальной погрешности на примере модельной задачи (I.5).

Ограничимся первыми членами разложения (2.2), тогда с точностью до членов более высокого порядка $\delta(\tau)$ принадлежит классу функций

$$(2.3) \quad \varphi(\tau) = A \tau^{-2} + B \tau^4,$$

где A и B - постоянные коэффициенты, которые найдем из условия

$$(2.4) \quad \begin{cases} \delta(\tau_1) = \varphi(\tau_1), \\ \delta(\tau_2) = \varphi(\tau_2). \end{cases}$$

где $\tau_1 = 1/5$; $\tau_2 = 1/22$. В результате получим $A = 1,2 \cdot 10^{-7}$; $B = 2,9 \cdot 10^{-2}$. Близость функций $\delta(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ видна на рис. 1,

где $\varphi(\tau)$ изображена сплошной линией, а $\delta(\tau)$ — точками, которые соответствуют реальной погрешности для соответствующего значения при $N = 1025$.

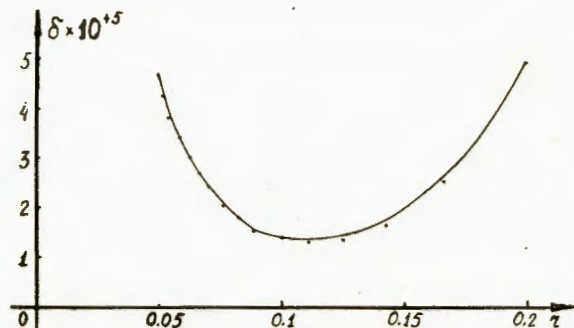


Рис. 1

§ 3. Двухпараметрическая экстраполяция

Применим экстраполяцию типа Ричардсона по трем значениям шага: $h_1, h_2 = 0.5 h_1, h_3 = 0.25 h_1$. Нетрадиционным является использование экстраполяции по параметру сингулярности τ . Необходимым условием эффективности такой экстраполяции является регулярная зависимость погрешности экстраполированных по Ричардсону приближенных решений

$\Delta(\tau)$, что очевидно из графиков $\Delta(\tau)$ на рис. 2, 3, 4, 5 для числа неизвестных 1024; 512, 256, 128 соответственно, где $\Delta(\tau)$ изображена сплошной линией. Поэтому, согласно исходным предположениям, кривая $\Delta(\tau)$ должна "хорошо" описываться функцией

$$(3.1) \quad \varphi_1(\tau) = A_1 \tau^{-4} + B_1 \tau^4.$$

Коэффициенты A_1 и B_1 не зависят от τ .

Коэффициенты для экстраполяции по τ находятся из системы:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \\ \mu_1 \tau_1^4 + \mu_2 \tau_2^4 + \mu_3 \tau_3^4 = 0, \\ \mu_1 / \tau_1^4 + \mu_2 / \tau_2^4 + \mu_3 / \tau_3^4 = 0. \end{cases}$$

Экстраполяцию проводим по формуле

$$(3.3) \quad \lambda \tau = \mu_1 \lambda(\tau_1) + \mu_2 \lambda(\tau_2) + \mu_3 \lambda(\tau_3).$$

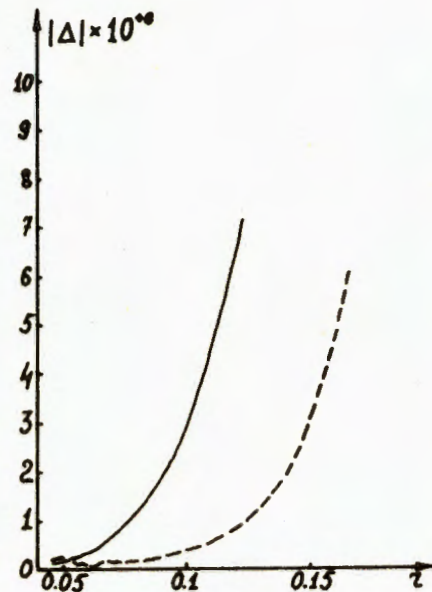


Рис. 2

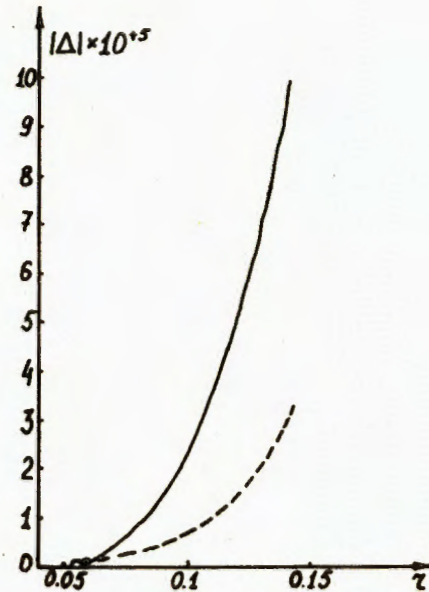


Рис. 3

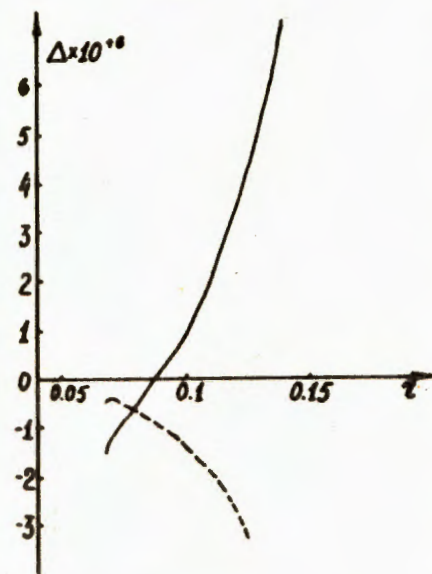


Рис. 4

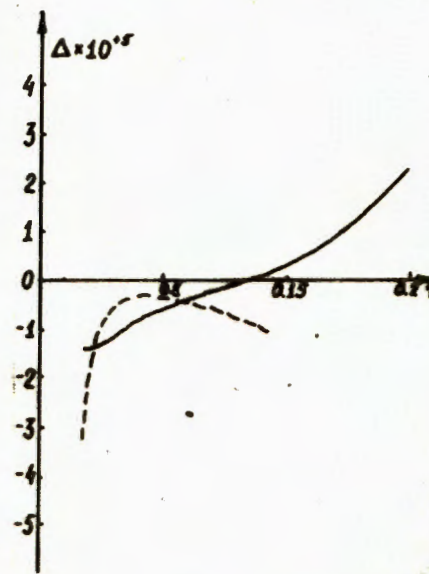


Рис. 5

Графики $\Delta_\tau(\tau) = \lambda_\tau - \lambda_\tau$ для соответствующих приближенных решений изображены на рис. 2, 3, 4, 5 прерывистой линией.

Замечание I. Из (3.3) следует, что Δ_τ , вообще говоря, зависит от τ_1, τ_2, τ_3 . Но принимая во внимание формулы:

$$\tau_1 = \frac{1}{R_1}; \tau_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 - \varepsilon_1} = \frac{1}{\tau_1^{-1} - \varepsilon_1}; \tau_3 = \frac{1}{R_2 - \varepsilon_2} = \frac{1}{\tau_1^{-1} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2},$$

можно считать, что $\Delta_\tau \equiv \Delta_\tau(\tau_1)$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - постоянные. Все расчеты проводились для $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

Для характеристики эффективности двухпараметрической экстраполяции введем следующие величины:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \bar{\delta} &= \frac{1}{\tau_n - \tau_m} \int_{\tau_m}^{\tau_n} |\delta(\tau)| d\tau, & \mathcal{X}_1 &= \bar{\delta} / \bar{\delta}_R, \\ \bar{\delta}_R &= \frac{1}{\tau_n - \tau_m} \int_{\tau_m}^{\tau_n} |\delta_R(\tau)| d\tau, & \mathcal{X}_2 &= \bar{\delta}_R / \bar{\delta}_\tau, \\ \bar{\delta}_\tau &= \frac{1}{\tau_n - \tau_m} \int_{\tau_m}^{\tau_n} |\delta_\tau(\tau)| d\tau, & \mathcal{X}_3 &= \bar{\delta} / \bar{\delta}_\tau = \mathcal{X}_1 \cdot \mathcal{X}_2. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\delta}, \bar{\delta}_R, \bar{\delta}_\tau$ - средние интегральные погрешности приближенных решений. Численные значения величин $\bar{\delta}, \bar{\delta}_R, \bar{\delta}_\tau, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ приведены в таблице I.

Таблица I

K	4	5	6	7
N	128	256	512	1024
$\bar{\delta}$	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
$\bar{\delta}_R$	$5,9 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$
$\bar{\delta}_\tau$	$7,2 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^{-6}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$
\mathcal{X}_1	131,1	81,1	14,3	3,7
\mathcal{X}_2	0,8	1,15	3,3	7,1
\mathcal{X}_3	107,3	93,7	46,5	26,2

Замечание 2.

Использование усредненных характеристик погрешности (3.4) связано с тем, что функции $\Delta(\tau)$ имеют на отрезке $[\tau_m, \tau_n]$ корень для всех сеток, кроме последней, поэтому использование минимального значения этой функции приводит к слишком оптимистическим выводам относительно эффективности экстраполяции типа Ричардсона. Например, при $\tau = 1/17$ для $N = 512$ - $\Delta(\tau) = 9,7 \cdot 10^{-9}$, что является лишь свойством данной модели.

Анализ приведенных в таблице I данных приводит к следующему выводу: несмотря на уменьшение величины \mathcal{X}_2 с уменьшением числа неизвестных N , общая эффективность двухпараметрической экстраполяции \mathcal{X}_3 увеличивается с уменьшением числа N , что имеет важное практическое значение.

Перепишем разложение (2.2) с учетом экстраполяции Ричардсона в следующем виде:

$$(3.5) \quad \Delta(\tau) = c_1' \tau^{-4} N^{-4} + c_2' \tau^{-5} N^{-5} + O(\tau^{-6} N^{-6}) + d_1 \tau^4 + d_2 \tau^6 + O(\tau^8).$$

Очевидно, что при фиксированном τ вклад слагаемого

$$(c_1' \tau^{-4} N^{-4} + c_2' \tau^{-5} N^{-5} + O(\tau^{-6} N^{-6}))$$

в погрешность $\Delta(\tau)$ уменьшается с ростом числа N . Поэтому экстраполяцию по τ целесообразнее при больших числах N проводить без учета вклада от аппроксимации по χ [3]. Рассмотрим две возможности.

а) Коэффициенты экстраполяции μ_1, μ_2 находятся из системы

$$(3.6) \quad \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1, \\ \mu_1 \tau_1^4 + \mu_2 \tau_2^4 = 0. \end{cases}$$

Уточнение проведем по формуле

$$(3.7) \quad \lambda_1 = \mu_1 \lambda(\tau_1) + \mu_2 \lambda(\tau_2).$$

б) Для получения более высокой точности обратимся к следующим "трехточечным" формулам

$$(3.8) \quad \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \\ \mu_1 \tau_1^4 + \mu_2 \tau_2^4 + \mu_3 \tau_3^4 = 0, \\ \mu_1 \tau_1^6 + \mu_2 \tau_2^6 + \mu_3 \tau_3^6 = 0, \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \mu_1 \lambda(\tau_1) + \mu_2 \lambda(\tau_2) + \mu_3 \lambda(\tau_3).$$

Графики для абсолютных погрешностей приведены на рис. 6. $|\Delta(\tau)|$ соответствует сплошная линия, $|\Delta_1(\tau)|$ - прерывистая, $|\Delta_2(\tau)|$ - штрихпунктирная, $N=1024$. Для анализа эффективности экстраполяции такого типа введем аналогичные (3.4) величины:

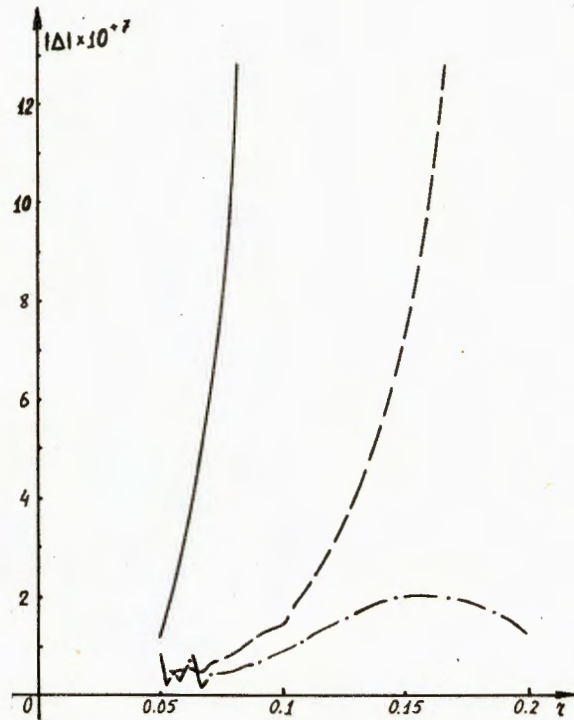


Рис. 6

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}_A &= \frac{1}{\tau_M - \tau_m} \int_{\tau_m}^{\tau_M} |\Delta(\tau)| d\tau, & \alpha^\tau &= \bar{\delta}_A / \bar{\delta}_1, \\
 \bar{\delta}_1 &= \frac{1}{\tau_M - \tau_m} \int_{\tau_m}^{\tau_M} |\Delta_1(\tau)| d\tau, & \alpha_1^\tau &= \bar{\delta}_1 / \bar{\delta}_2, \\
 \bar{\delta}_2 &= \frac{1}{\tau_M - \tau_m} \int_{\tau_m}^{\tau_M} |\Delta_2(\tau)| d\tau, & \alpha_2^\tau &= \bar{\delta}_A / \bar{\delta}_2 = \alpha^\tau \cdot \alpha_1^\tau.
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Для $N=1025$ эти величины равны

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}_A &= 4,5 \cdot 10^{-6}, & \alpha^\tau &= 20, \\
 \bar{\delta}_1 &= 2,2 \cdot 10^{-7}, & \alpha_1^\tau &= 21, \\
 \bar{\delta}_2 &= 1 \cdot 10^{-7}, & \alpha_2^\tau &= 42.
 \end{aligned}$$

Таким образом, из сравнения величин α_2^τ и α_2^τ следует, что при том же объеме вычислительной работы для больших значений N экстре-

поляции по τ по формулам (3.8) эффективнее экстраполяции по формулам (3.2), (3.3): $\alpha_2^\tau / \alpha_2^\tau \approx 6$.

§ 4. MGHR - алгоритм двухпараметрической экстраполяции

Проанализируем эффективность двухпараметрической экстраполяции с точки зрения суммарной вычислительной работы. Для этого сравним расчетное время, необходимое для получения одинаковой точности приближенных решений для MG- и UG-методов.

В UG-методе [3] для получения необходимой точности приближенного решения вычисляется ρ максимальных собственных чисел. Зависимость счетного времени T (в секундах) от величины R для $\rho = 4$, $N = 1025$, $\varepsilon = 10^{-6}$ изображены на рис. 7. Для получения точности при-

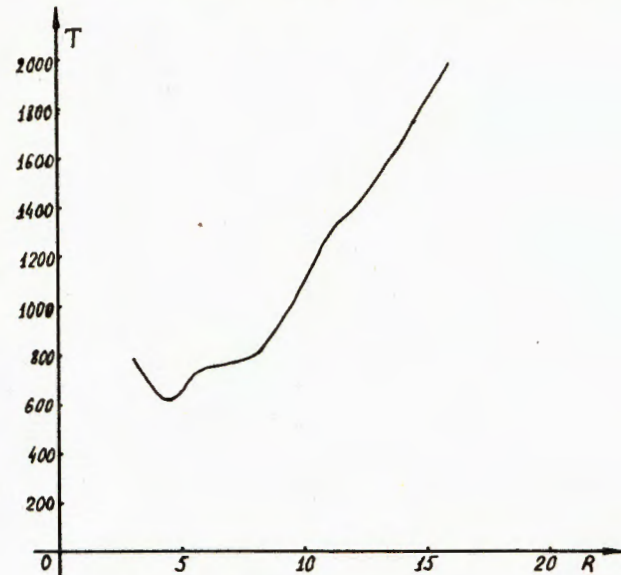


Рис. 7

ближенного решения, достаточной для двухпараметрической экстраполяции, можно проводить расчеты для $\rho = 1$. При этом счетное время T_1 на одну итерацию уменьшится приблизительно в 4 раза. Зависимость T от R для $\rho = 1$, $N = 1025$ изображена на рис. 8.

Для эффективной реализации MGHR-алгоритма выбрана вычислительная схема, в которой сочетается движение по h -уровням с расчетами для различных значений $R_i, i=1, \dots, t$. Для $i=1$ применяется MG2-алгоритм [3] при $\rho = 1$, а при переходе от R_i к R_{i+1} про-

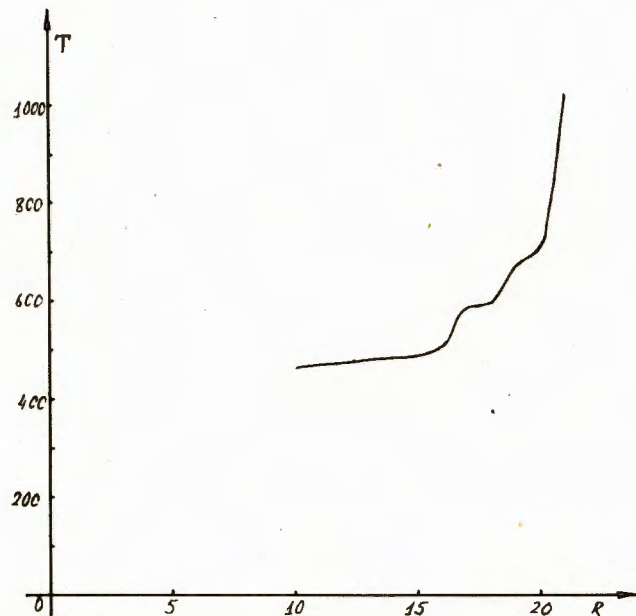


Рис. 8

водится экстраполяция решения U_{R_i} на сетку с параметром R_{i+1} при самом мелком шаге h , т.е. на самом высоком "уровне" по h , затем используется обратный ход при фиксированном R_{i+1} с увеличением шага h нужное число раз. Соответствующая блок-схема приведена на рис. 9.

В качестве начального приближения берется набор случайных N_1 чисел - $U_1^{R_1}$. Далее при помощи линейной экстраполяции I_1^2 получается вектор $U_2^{R_2}$ на 2-й сетке с числом узлов N_2

$$U_2(\ell, 2k-1) = I_1^2(U_1) \equiv \frac{1}{2}(U_1(\ell, k-1) + U_1(\ell, k+1)); k=1, \dots, N_1; \ell=1, \dots, N_2;$$

$$U_2(\ell, 2k) = U_1(\ell, k).$$

Для всех последующих сеток по X используется экстраполяция по двум предыдущим сеточным решениям:

$$U_m(\ell, k) = I_{m-1, m-2}^m(U_{m-1}; U_{m-2}) = \omega P_{m-1} U_{m-1}(\ell, k) + (1-\omega) P_{m-2} U_{m-2}(\ell, k);$$

$$m=1, \dots, M; \ell=1, \dots, p; k=1, \dots, N_{m-1}; \nu=1, \dots, N_{m-2}; \omega = \frac{5}{4}.$$

Операторы P_{m-1}, P_{m-2} интерполируют векторы из $R^{N_{m-1}}$ и $R^{N_{m-2}}$ в R^{N_m} с точностью $O(h^2)$, согласованной с порядком аппроксимации

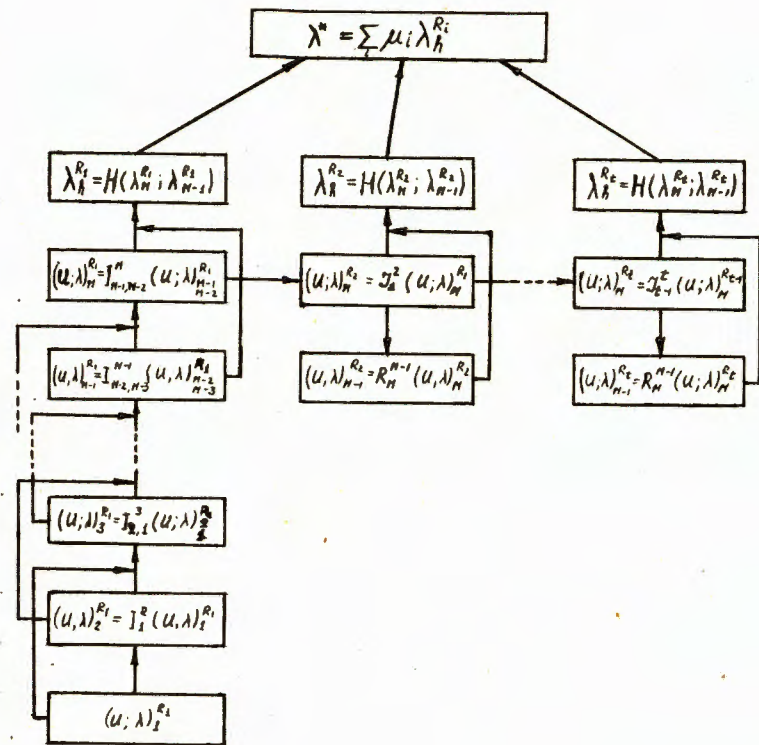


Рис. 9

ции непрерывной задачи. На каждой сетке с помощью процедуры итерирования подпространства [3] решается задача $A_m U_m = \lambda U_m$.

Экстраполяция сеточного решения при переходе от R_{i-1} к R_i ($R_{i-1} < R_i$) при самом малом h осуществляется по формуле линейной интерполяции:

$$U_{R_i}(y_j) = J_{i-1}^i(U_{R_{i-1}}(x_j)) = a_1 + a_2(y_j - x_j) + a_3(y_j - x_j)(y_j - x_{j-1});$$

$$j=1, \dots, N_i; y_j = j \cdot h_i; x_j = j \cdot h_{i-1}; h_i = \frac{R_i}{N_i}; h_{i-1} = \frac{R_{i-1}}{N_{i-1}}.$$

Оператор интерполяции с последней сетки на предпоследнюю при фиксиро-

вном R_i :

$$u_{N-1}^{R_i}(k) = R_N^{N-1} (u_N^{R_i}(\ell)) \equiv u_N^{R_i}(2k); u_{N-1}^{R_i}(N_{N-1}+1) = \eta \cdot u_N^{R_i}(N_N+1);$$

$$k=1, \dots, N_{N-1}; \ell=1, \dots, N_N; N_N = 2^m.$$

По окончании расчетов для всех необходимых значений $R_i; i=1, \dots, t$; при каждом фиксированном R_i проводим экстраполяцию приближенных СЧ относительно шага h по двум (или более) сеткам:

$$\lambda_h^{R_i} = H_{N, N-1}(\lambda_N^{R_i}; \lambda_{N-1}^{R_i}) = \gamma_1 \lambda_N^{R_i} + \gamma_2 \lambda_{N-1}^{R_i};$$

где γ_1, γ_2 - известные коэффициенты экстраполяции по Ричардсону [5].

На ЭВМ CDC-6500 решалась задача (I.5) для $\rho=1$, максимального числа сеток $M=5$, $N_N=256$, $\tau_1=1/11$; $\tau_2=1/10$; $\tau_3=1/9$. Погрешность приближенного решения после двухпараметрической экстраполяции $\Delta_\tau=1,9 \cdot 10^{-7}$, соответствующее счетное время $T_\tau=75,4$ с. Применение только экстраполяции типа Ричардсона дает аналогичную погрешность $\Delta=2,1 \cdot 10^{-7}$ при затратах времени $T=595$ с, $T/T_\tau=7,9$. Получение подобного результата УГ-методом требует значительных затрат машинного времени (см. таблицу I и рис. 7), $T \sim 1,5$ ч при восьмикратном увеличении необходимой памяти ЭВМ (требуется $N_N=2049$).

§ 5. Другие модификации MGNR-алгоритма

Экстраполяцию по малому параметру τ будем проводить методом наименьших квадратов. Представим разложение приближенного СЧ в виде

$$(5.1) \quad \lambda_f = c_0 + c_1 \tau^{-4} + c_2 \tau^4.$$

Будем минимизировать по параметрам c_0, c_1, c_2 следующий функционал:

$$(5.2) \quad \Phi(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=1}^n (\lambda(\tau_i) - \lambda_s(\tau_i))^2 \rightarrow \min,$$

где n - число используемых СЧ $\lambda_s(\tau_i)$. При этом c_0 и будет уточненным по τ СЧ. Значение c_0 , полученное таким образом, слабо зависит от числа n (см. таблицу 2), где $\Delta = |c_0 - \lambda_{\tau=0}|$.

Таблица 2

$\Delta(n) \backslash N$	256	512	1024
$\Delta(3)$	$4,4 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$6,1 \cdot 10^{-9}$
$\Delta(7)$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-8}$
$\Delta(11)$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-7}$	$5,8 \cdot 10^{-8}$

Зависимость $\lambda_f(\tau)$ можно фитировать параметрической функцией

$$(5.3) \quad F(\tau) = c_0 + c_1 \tau^{-\alpha} + c_2 \tau^\beta; \Phi_f = \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda(\tau_i) - F(\tau_i))^2}{\tau_i^2} \rightarrow \min$$

при помощи подпрограммы HFIT пакета прикладных программ NBOOK. Здесь $c_0, c_1, c_2, \alpha, \beta$ - параметры. При этом c_0 есть искомое уточнение по τ для СЧ. Результаты получились следующие: для $N=1025$ получим $\Delta=4,3 \cdot 10^{-9}$ ($n=20$), для $N=512$ - $\Delta=1 \cdot 10^{-7}$ ($n=15$), для $N=256$, $\Delta=7 \cdot 10^{-7}$ ($n=11$).

Последний алгоритм позволяет при меньшей априорной информации о поведении погрешности получить приближение к собственному числу достаточно высокой точности.

§ 6. Выводы

Анализируя результаты проведенных вычислительных экспериментов (все расчеты проводились на ЭВМ CDC-6500), прежде всего можно сделать вывод о том, что двухпараметрическая (ДЭ) экстраполяция в рамках двухуровневого итерационного процесса, использующего предложенный здесь способ движения по h - и R -уровням, значительно снижает трудоемкость численных алгоритмов для рассматриваемого класса задач. Для модели, выбранной при исследовании, характерна асимптотика СФ $O(x^{-4})$.

$x \rightarrow \infty$ при $\alpha=3$, которая является типичной для широкого класса квазилинейных уравнений, где величина α меняется, как правило, в пределах $1 < \alpha \leq 4$. Характерно, что при уменьшении α относительная эффективность экстраполяции по параметру R возрастает, т.к. увеличивается погрешность аппроксимации по этому параметру. Как уже отмечалось, учет членов более высокого порядка в асимптотике СФ при помощи специальных базисных элементов приводит к существенно нелинейной проблеме на СЗ, которая уже требует применения методов типа исчерпывания. Здесь естественно ожидать и значительного ухудшения обусловленности матрицы A .

В каждой конкретной задаче наиболее эффективный способ экстраполяции может выбираться в широком диапазоне, начиная от использования "точного" представления погрешности на основе априорной информации о решении до "феноменологического" подхода, когда все сводится к минимизации некоторого функционала на достаточно большом числе расчетных данных, при определенном выборе аппроксимирующей эти данные функции. Будучи более надежным, последний подход является, очевидно, и более трудоемким.

Реальную эффективность ДЭ можно оценить, по крайней мере, двумя критериями. Во-первых, сравнивая вычислительную работу для получения заданной точности для УГ- и MGNR-алгоритмов, а также для получе-

ния максимально возможной точности в рамках фиксированной аппроксимации и при заданных ограничениях на ресурсы ЭВМ.

Во втором случае было установлено, что точность СЧ, оцениваемая в некоторой интегральной метрике, повышается в $\mathcal{X} \sim 10$ раз для MGHR-процедуры, причем \mathcal{X} увеличивается при уменьшении размерности системы N и для $N_1 = 128$, $N_2 = 256$ составляет уже приблизительно $\mathcal{X} = 100$.

В первом случае установлено, что для получения точности СЧ порядка $\varepsilon = 1.9 \cdot 10^{-7}$ У6-метод требует в ~ 60 раз больше счетного времени и в 8 раз больше оперативной памяти ЭВМ, чем MGHR-алгоритм, причем достижение большей точности для У6-метода практически неосуществимо для дискретизации порядка $O(R^2)$.

Результаты уточнения СЧ при помощи минимизации специального функционала на большом числе расчетных данных представлены в § 5. При таком подходе можно извлечь наибольшую информацию о точном решении в рамках заданной аппроксимации уравнения.

В заключение следует отметить, что предлагаемые в [3] и настоящей работе алгоритмы "обработки" результатов численных расчетов, полученных для большого набора различных параметров дискретизации исходного уравнения, могут, по-видимому, применяться при решении широкого круга задач, в которых имеет место достаточно регулярная зависимость расчетных величин от параметров дискретизации, даже при отсутствии информации о явном виде этой зависимости.

Литература

1. Сидоров А.В., Скачков Н.Б. ОИЯИ, P2-84-502, Дубна, 1984.
2. Жидков Б.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, PII-85-465, Дубна, 1985.
3. Жидков Б.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, PII-84-740, Дубна, 1984.
4. Нгуен М., Хоромский Б.Н., Ямалеев Р.М. Дифф. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1293-1302.
5. Г.И.Марчук, В.В.Шейдуров. Повышение точности решений разностных схем. М., "Наука", 1979.
6. Жидков Б.П., Хоромский Б.Н. Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики. Вып. 4. ЦИФИ-ОИЯИ, 1983, с. 43.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1985 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Жидков Е.П., Никонов Э.Г., Хоромский Б.Н. P11-85-970
Оценки эффективности двухпараметрической экстраполяции для одного класса спектральных задач с интегральным оператором на полуоси

Проведены вычислительные эксперименты по оценке эффективности двухпараметрической экстраполяции при численном решении одного класса спектральных задач на полуоси для интегрального оператора. Предложена вычислительная схема для реализации такой экстраполяции, в которой оптимальным образом сочетается движение по h - и R -уровням. В результате применения экстраполирующей процедуры можно добиться увеличения точности собственных чисел в среднем на два порядка и уменьшения трудоемкости алгоритма на 1-2 порядка.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P., Nikonov E.G., Khoromskij B.N. P11-85-970
Evaluation of Two-Parameter Extrapolation Efficiency for One Class of Spectral Problems with Integral Operator on a Half-Axis

The computational experiments on the evaluation of two-parameter extrapolation efficiency at numerical solving of one class of spectral problems for integral operator on the half-axis are carried out. The computational scheme to realize this extrapolation is proposed. The motion along h - and R -levels is combined optimally in this type of extrapolation. Due to the application of extrapolation procedure the eigenvalue precision could be improved twice on the average and algorithm complexity decreases by 1-2 orders.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985