

5/x-70

200-696

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1 - 5306



ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Е.П. Жидков, Ю.М. Казаринов, Г.И. Макаренко,
А.В. Ракитский

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ
НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

1970

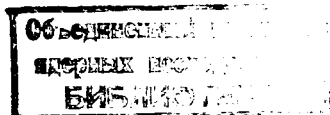
P1 - 5306

8489/2 48

Е.П. Жидков, Ю.М. Казаринов, Г.И. Макаренко,
А.В. Ракитский

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ
НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая
физика"



1⁰. Экспериментальное исследование упругого рассеяния нуклонов нуклонами ниже порога мезообразования в настоящее время можно считать в известной степени законченным. Амплитуда рассеяния определена однозначно вплоть до энергий 400 Мэв. В связи с этим в течение последних нескольких лет ряд авторов предпринимал попытки получить из известных сведений об амплитуде нуклон-нуклонного рассеяния выражение для потенциала, с помощью которого можно было бы описать нуклон-нуклонное взаимодействие в области энергий ниже порога мезообразования [1]. При решении уравнения Шредингера в перечисленных работах обычно предполагалось, что зависимость потенциала от относительного расстояния между взаимодействующими частицами имеет вид потенциала Юкавы. Найденные при этом выражения для потенциала позволяли, как правило, только качественно описать энергетические зависимости фазовых сдвигов.

Использование метода введения непрерывного параметра и метода регуляризации, развитых в работах [2] и [3], для решения обратной задачи теории рассеяния позволяет при определении радиальной зависимости потенциала избежать предположений о конкретной аналитической зависимости потенциала от расстояния между взаимодействующими частицами. Таким образом, возникает возможность решать задачу о нахождении потенциала системы двух нуклонов в более общем виде, чем это делалось до сих пор.

В настоящей работе продолжаются исследования [4] обратной задачи теории рассеяния методом введения непрерывного параметра.

2°. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$u'' + [\kappa^2 - V(x)]u = 0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \quad (2)$$

Вещественная функция $V(x)$ ($0 \leq x < \infty$) в уравнении (1) называется потенциалом. Предполагается, что $V(x)$ - достаточно гладкая функция и удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} |V(x)|x dx < \infty. \quad (3)$$

В уравнении (1) κ^2 - параметр.

Известно, что при больших значениях κ решение задачи (1)-(2) имеет асимптотику

$$u(x, \kappa) = A(\kappa) \sin[x\kappa + \delta(\kappa)] + o(1), \quad (4)$$

где $A(\kappa)$ называется предельной амплитудой, а $\delta(\kappa)$ ($0 \leq \kappa < \infty$) - предельной фазой.

Обратная задача теории рассеяния состоит в нахождении потенциала $V(x)$, если задана предельная фаза $\delta(\kappa)$ ($0 \leq \kappa < \infty$).

Другими словами, по заданной предельной фазе $\delta(\kappa)$ надо восстановить уравнение (1).

Первые важные результаты в исследовании обратной задачи теории рассеяния принадлежат Н. Левинсону (1949 г.) [5].

Другая формулировка обратной задачи теории рассеяния.

Продолжим заданную предельную фазу $\delta(\kappa)$ на всю вещественную ось ($-\infty < \kappa < +\infty$) по формуле

$$\delta(-\kappa) = -\delta(\kappa) \quad (5)$$

и введем функцию рассеяния

$$S(\kappa) = e^{2i\delta(\kappa)} \quad (-\infty < \kappa < +\infty). \quad (6)$$

Теперь задача свелась к нахождению потенциала $V(x)$ по заданной функции рассеяния $S(\kappa)$. Имеет место следующая теорема [6].

Теорема I.

Пусть задана функция рассеяния $S(\kappa)$ такая, что

$$1) |S(\kappa)| = S(0) = S(\infty) = 1,$$

$$2) S(-\kappa) = \bar{S}(\kappa) = S^{-1}(\kappa),$$

$$3) S(\kappa) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\kappa t} dt, \quad \text{где } \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt < \infty,$$

$$4) \arg S(\kappa) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -4\pi m, \quad \text{где } m - \text{целое.}$$

Тогда существует функция $V(x)$ для $0 \leq x < +\infty$ такая, что предельная фаза для уравнения (1) есть

$$\delta(\kappa) = \frac{1}{2} \arg S(\kappa). \quad (7)$$

При этом $V(x)$ ведет себя аналогично производной $F'(t)$ при $t > 0$.

В частности, для того чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{\infty} |V(x)|x dx < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{\infty} |F'(t)|t dt < \infty.$$

Если $m = 0$, то потенциал $V(x)$ определяется однозначно.

Если $m > 0$, то потенциал $V(x)$ не определяется однозначно, а существует целое m - параметрическое семейство потенциалов таких, что уравнение (1) имеет $\delta(\kappa)$ в качестве предельной фазы и данные числа $\lambda_n = -\gamma_n^2$ ($n = 1, 2, \dots, m$) в качестве собственных значений.

Теорема I полностью выясняет вопросы о разрешимости обратной задачи и о количестве ее решений.

Отметим, что фактически $\delta(\kappa)$ наблюдается лишь в конечном интервале энергий (κ). Кроме того, при больших значениях κ процесс рассеяния не может быть описан уравнением Шредингера.

Таким образом, возникает вопрос о возможности нахождения потенциала $V(x)$ приближенно, если предельная фаза $\delta(\kappa)$ задана приближенно на конечном промежутке энергий κ .

В работах [7] показано, что потенциал $V(x)$ можно восстановить приближенно, если фаза $\delta(\kappa)$ задана лишь на конечном промежутке $[\kappa_1, \kappa_m]$.

3°. Как известно [8], уравнение (I) с начальными условиями (2) преобразуется к виду

$$y'(x) = -\frac{V(x)}{\kappa} \sin^2(\kappa x + y) \quad (8)$$

с начальным условием

$$y(0, \kappa) = 0 \quad (9)$$

Предельная фаза находится по формуле

$$\delta(\kappa) = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x, \kappa). \quad (10)$$

Уравнение (8) с начальным условием (9) и соотношение (10) задают некоторое преобразование P , такое, что каждому потенциалу $V(x)$ из рассматриваемого класса ставится в соответствие предельная фаза $\delta(\kappa)$:

$$\delta(\kappa) = P[V(x)]. \quad (11)$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти такой потенциал $V^*(x)$, который бы с помощью оператора P переводился в заданную фазу $\delta_3(\kappa)$ (экспериментальная фаза).

Другими словами, надо решить операторное нелинейное уравнение

$$\Phi(v) \equiv P(v) - \delta_3(\kappa) = 0 \quad (12)$$

относительно $V(x)$ ($0 < x < \infty$, $0 \leq \kappa < \infty$).

Предполагается, что $\delta_3(\kappa)$ удовлетворяет условию

$$\delta_3(0) = \delta_3(\infty) = 0. \quad (13)$$

В этом случае, согласно теореме I, потенциал $V^*(x)$ можно определить с помощью предельной фазы $\delta_3(\kappa)$ однозначно.

Для решения уравнения (12) применим метод введения непрерывного параметра. Суть этого метода заключается в том, что вместо уравнения (12) рассматривается уравнение

$$\frac{d\Phi[v(x,t)]}{dt} = -\Phi[v(x,t)] \quad (14)$$

при начальном условии

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad (15)$$

где $v_0(x)$ - начальное значение потенциала.

Считая, что потенциалу $V(x,t)$ соответствует расчетная предельная фаза $\delta_p(\kappa, t)$, то-есть, что

$$P[v(x,t)] = \delta_p(\kappa, t),$$

функцию $\Phi(v)$ в уравнении (12) можно представить в виде

$$\Phi(v) \equiv \delta_p(\kappa, t) - \delta_3(\kappa), \quad (16)$$

а тогда уравнение (14) переписется так

$$\frac{d\delta_p(\kappa, t)}{dt} = -[\delta_p(\kappa, t) - \delta_3(\kappa)]. \quad (17)$$

Найдем выражение для левой части уравнения (17).

Для этого продифференцируем по t обе части уравнения (8) в предположении, что y и v зависят как от x , так и от t :

$$y''_{xt} = -\frac{v'_t(x,t)}{\kappa} \sin^2[\kappa x + y(x,t)] - \frac{v(x,t)}{\kappa} \sin 2[\kappa x + y(x,t)] y'_t(x,t). \quad (18)$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} y'_t(x,t) &= w(x,t), \\ v'_t(x,t) &= z(x,t), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

перепишем уравнение (18) в виде

$$w'_x(x,t) = -\frac{z(x,t)}{\kappa} \sin^2[\kappa x + y(x,t)] - \frac{v(x,t)}{\kappa} \sin 2[\kappa x + y(x,t)] w(x,t). \quad (20)$$

Линейное дифференциальное уравнение (20) относительно функции решаем при краевом условии

$$w(0,t) = y'_t(0,t) = 0. \quad (21)$$

Получим

$$w(x,t) = -\frac{1}{\kappa} \int_0^x z(s,t) \sin^2[\kappa s + y(s,t)] e^{-\frac{1}{\kappa} \int_s^x v(\xi,t) \sin 2[\kappa \xi + y(\xi,t)] d\xi} ds,$$

откуда

$$w(\infty,t) = -\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty z(s,t) \sin^2[\kappa s + y(s,t)] e^{-\frac{1}{\kappa} \int_s^\infty v(\xi,t) \sin 2[\kappa \xi + y(\xi,t)] d\xi} ds. \quad (22)$$

Но, учитывая (10) и (19), получим

$$w(\infty,t) = \lim_{x \rightarrow \infty} y'_t(x,\kappa,t) = \frac{d\delta(\kappa,t)}{dt},$$

а тогда (17) приобретает вид

$$\int_0^\infty z(x,t) \sin^2[\kappa x + y(x,t)] e^{-\frac{1}{\kappa} \int_x^\infty v(\xi,t) \sin 2[\kappa \xi + y(\xi,t)] d\xi} dx = \kappa [\delta'_p(\kappa,t) - \delta'_p(\kappa)], \quad (23)$$

$$\text{где } z(x,t) = \frac{dv(x,t)}{dt}. \quad (24)$$

Система (23)-(24), решаемая при начальном условии

$$v(x,0) = v_0(x), \quad (25)$$

и дает нам решение уравнения (12), а именно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x,t) = v^*(x). \quad (26)$$

4°. Опишем кратко схему численного решения задачи (23)-(24)-(25).

Подставляя начальное значение потенциала $v_0(x)$ в уравнение (8) и решая это уравнение при условии (9), получим $y(x,0)$ и $\delta_p(\kappa,0)$.

Далее, полученные функции $y(x,0)$, $\delta_p(\kappa,0)$ и $v_0(x)$ подставим в уравнение (23), из которого определяем неизвестную функцию $z(x,0)$.

Отметим, что интегральное уравнение (23) является интегральным уравнением Фредгольма I рода. Как известно, задача о решении таких уравнений является некорректной задачей. Для ее решения мы применили метод регуляризации, разработанный А.Н.Тихоновым. Заменяя уравнение (24) при $t=0$ приближенным разностным соотношением, получим

$$\frac{v(x,\tau) - v(x,0)}{\tau} = z(x,0), \quad (27)$$

откуда

$$v(x,\tau) = v(x,0) + \tau \cdot z(x,0), \quad (28)$$

где τ - шаг по переменной t .

Далее описанный цикл вычислений можно повторить, используя полученное по формуле (28) $V(x, \tau)$ в качестве начального значения потенциала.

Процесс вычислений повторяется до тех пор, пока расчетный потенциал не стабилизируется. Критерием стабилизации можно взять, например, следующее условие

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum_{k_i} [\delta_p(k_i) - \delta_3(k_i)]^2}{m}} \leq \sigma_3, \quad (29)$$

где

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\Delta \sigma_i)^2}{m}}, \quad (30)$$

$\Delta \sigma_i$ - ошибка фазы $\delta_3(k)$ в точке $k = k_i$.

5°. Результаты численных расчетов на ЭВМ.

В таблице I (см. также рис. I) приводятся: 1) значения экспериментальной фазы $\delta_3(k)$, по которой вычислялся искомый потенциал; 2) значения фазы $\delta_0(k)$, соответствующей начальному потенциалу $V_0(x)$ и 3) значения расчетной предельной фазы $\delta_p(k)$, вычисленной по восстановленному потенциалу $V(x)$.

В таблице 2 (см. также рис. 2) приводятся значения начального потенциала $V_0(x)$ и значения восстановленного потенциала $V(x)$.

При этом для $x > 1$ значения для $V(x)$ вычислялись по формуле

$$V(x) = A \cdot \frac{e^{-\gamma x}}{x}, \quad \text{где } A = 0,13, \quad \gamma = 2,02.$$

Значения $\delta(k)$ заданы в радианах, $k = \sqrt{\frac{M T_\Lambda}{2 \mu^2}}$, где

M - масса нуклона, μ - масса π -мезона, T_Λ - энергия нуклона в лабораторной системе,

Таблица I

к	Экспериментальная фаза $\delta_3(k)$.	Расчетная фаза $\delta_0(k)$ для потенциала $V_0(x)$.	Расчетная фаза $\delta_p(k)$ для потенциала $V(x)$.
0.1547	1.0896 ± 0.0002	0.6326	1.0883
0.2188	1.1346 ± 0.0005	0.7517	1.1377
0.2679	1.1402 ± 0.0010	0.8055	1.1453
0.3094	1.1348 ± 0.0014	0.8337	1.1410
0.3459	1.1252 ± 0.0019	0.8489	1.1319
0.3789	1.1140 ± 0.0024	0.8565	1.1208
0.4375	1.0901 ± 0.0035	0.8595	1.0962
0.4892	1.0660 ± 0.0045	0.8538	1.0708
0.5359	1.0430 ± 0.0056	0.8436	1.0461
0.5788	1.0210 ± 0.0065	0.8311	1.0225
0.6187	0.9999 ± 0.0073	0.8173	0.9997
0.6563	0.9798 ± 0.0082	0.8028	0.9778
0.6918	0.9606 ± 0.0091	0.7880	0.9569
0.7734	0.9159 ± 0.0110	0.7508	0.9083
0.8473	0.8749 ± 0.0126	0.7145	0.8641
0.9783	0.8011 ± 0.0152	0.6464	0.7865
1.0938	0.7353 ± 0.0175	0.5845	0.7198
1.1982	0.6753 ± 0.0195	0.5282	0.6613
1.2942	0.6199 ± 0.0216	0.4766	0.6090
1.3836	0.5686 ± 0.0236	0.4291	0.5616
1.4675	0.5206 ± 0.0255	0.3850	0.5183
1.5469	0.4758 ± 0.0272	0.3438	0.4782
1.6945	0.3939 ± 0.0304	0.2688	0.4058
1.8303	0.3211 ± 0.0326	0.2014	0.3412
1.9567	0.2564 ± 0.0342	0.1402	0.2824
2.0753	0.1984 ± 0.0349	0.0841	0.2282
2.1876	0.1468 ± 0.0351	0.0320	0.1776
2.2944	0.0998 ± 0.0347	-0.0165	0.1301
2.3964	0.0579 ± 0.0342	-0.0618	0.0853
2.4942	0.0199 ± 0.0337	-0.1044	0.0430
2.5884	-0.0143 ± 0.0337	-0.1445	0.0027
2.6793	-0.0452 ± 0.0340	-0.1824	-0.0356
2.7671	-0.0733 ± 0.0354	-0.2182	-0.0721
2.8523	-0.0988 ± 0.0375	-0.2523	-0.1070
2.9350	-0.1216 ± 0.0407	-0.2846	-0.1404
3.0154	-0.1426 ± 0.0445	-0.3155	-0.1725
3.0937	-0.1614 ± 0.0490	-0.3450	-0.2033
3.1701	-0.1787 ± 0.0543	-0.3732	-0.2330
3.2447	-0.1943 ± 0.0599	-0.4004	-0.2616
3.3177	-0.2082 ± 0.0660	-0.4265	-0.2894

Таблица 2

x	$V_0(x)$	$V(x)$
0.1	333.9000	331.8777
0.2	178.0000	175.9631
0.3	22.7700	20.8199
0.4	7.0000	4.5861
0.5	-2.6000	-4.3790
0.6	-3.3000	-5.4356
0.7	-3.1000	-4.0775
0.8	-2.6800	-2.9041
0.9	-2.0900	-2.1434
1.0	-1.5000	-0.9637
1.1	-1.0000	-0.7158
1.2	-0.7000	-0.5362
1.3	-0.5100	-0.4044
1.4	-0.3500	-0.3068
1.5	-0.2000	-0.2340
1.6	-0.1500	-0.1792
1.7	-0.1200	-0.1378
1.8	-0.0925	-0.1064
1.9	-0.0637	-0.0823
2.0	-0.0350	-0.0639
2.1	-0.0316	-0.0497
2.2	-0.0282	-0.0388
2.3	-0.0248	-0.0303
2.4	-0.0214	-0.0237
2.5	-0.0180	-0.0186

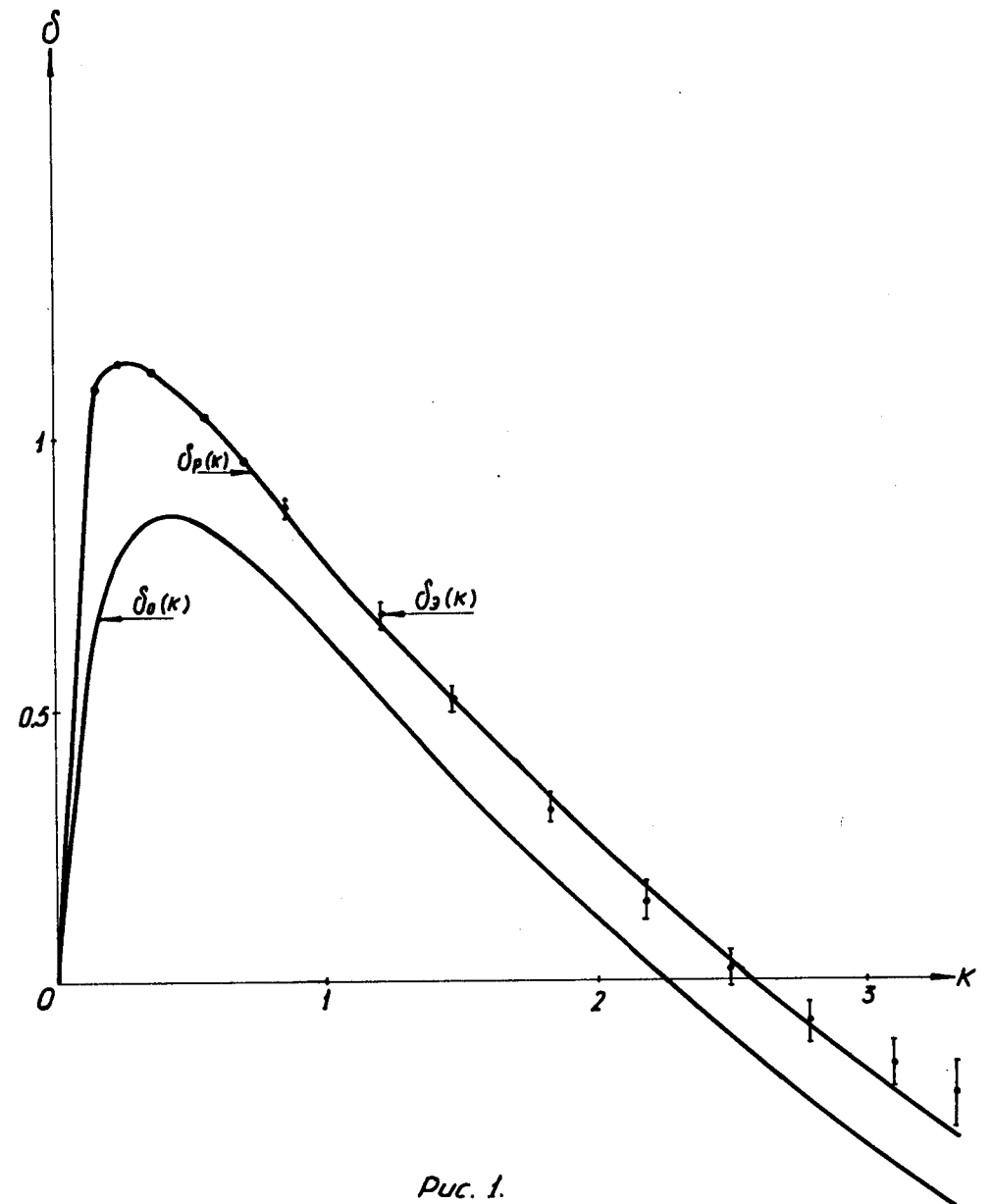


Рис. 1.

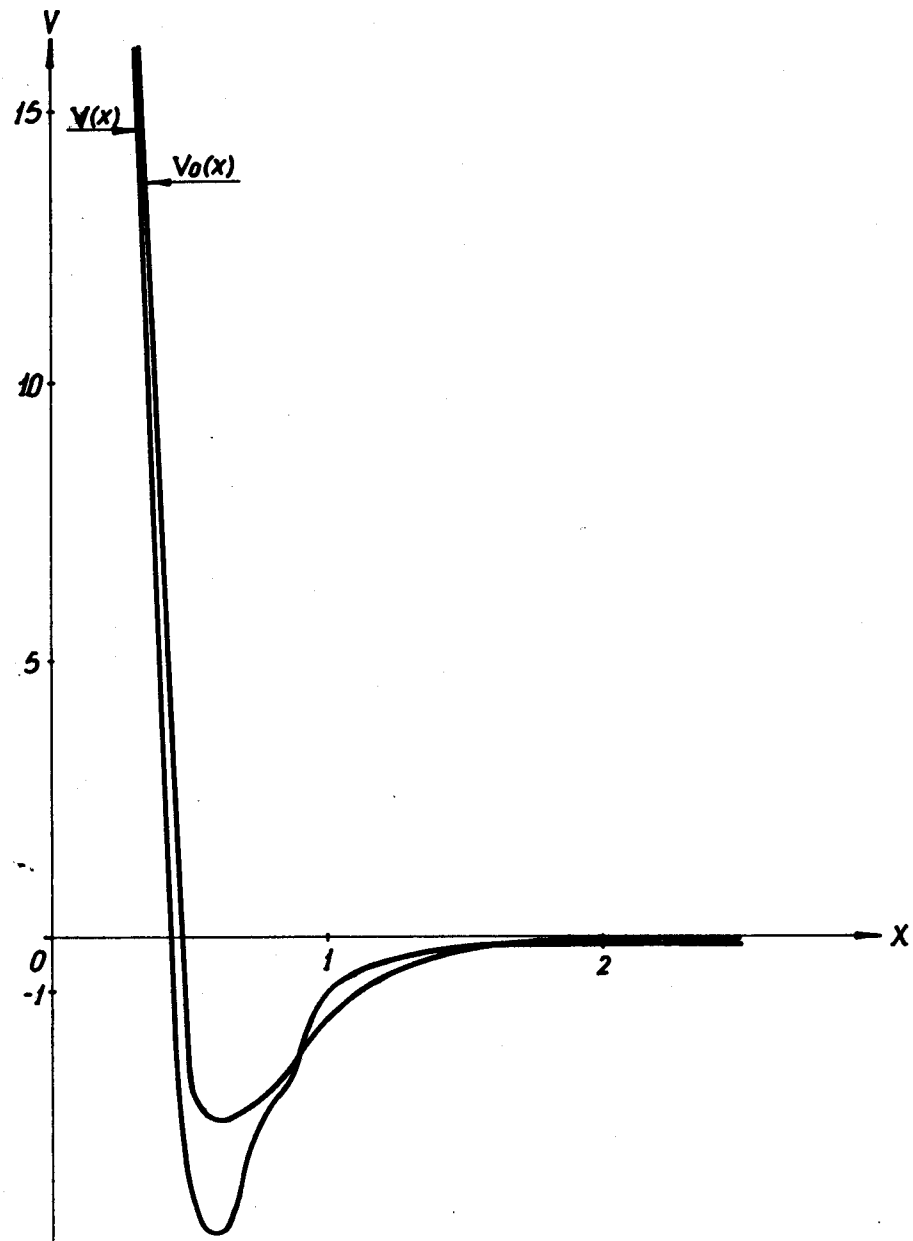


Рис. 2

$V(x)$ - потенциал в единицах $\frac{\mu^2}{M}$,

x - расстояние между нуклонами, выраженное в длинах комптоновской волны π -мезона.

Дифференциальное уравнение (8) решалось с точностью до пяти значащих цифр; верхний предел в интегралах, входящих в уравнение (23), мы полагали равным $x_n = 2,5$; шаги по t , $t_i = t_{i+1} - t_i$, выбирались так, что $0,01 \leq t_i \leq 1$.

Для заданной экспериментальной фазы $\delta_2(\kappa)$ величина

$\sigma_2 = 0,030$, для $\delta_0(\kappa)$ соответствующая величина $\sigma_0 = 0,196$.

Мы стремились получить такой потенциал $V(x)$, для расчетной фазы которого выполнялось бы условие $\sigma_p \leq 0,030$. Для найденного нами потенциала $\sigma_p = 0,024$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.L.Gammel, R.M.Thaler. *Phys.Rev.*, 108, 163, 1957.
 P.S.Signell, R.E.Marshak. *Phys.Rev.*, 106, 832, 1957.
 P.S.Signell, R.E.Marshak. *Phys.Rev.*, 109, 1229, 1958.
 R.A.Bryan. *Nuovo Cim.*, 16, 895, 1960.
 T.Namada, J.D.Jonston. *Nucl.Phys.*, 24, 382, 1962.
 K.E.Lassila, H.H.Hull, H.M.Ruppel, F.A.Mac Donald, G.Breit.
Phys.Rev., 126, 881, 1962.
 I.Ulehla, F.Lehar, I.Bystricky. Preprint E-2440, Dubna, 1965.
 E.Lomon, H.Feshbach. *Rev.Mod.Phys.*, 39, 611, 1967.
 В.В.Бабилов, В.С.Киселев. Изв. АН СССР (сер. физ.) 32, 556, 1968.
 2. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. ДАН СССР, 180, 18, 1968.
 Е.П.Жидков, Г.А.Ососков. ДАН СССР, 180, 1279, 1968.
 Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко. ДАН СССР, 187, 723, 1969.
 3. А.Н.Тихонов. ДАН СССР, 151, 501, 1963.
 А.Н.Тихонов. ДАН СССР, 153, 49, 1963.
 А.Н.Тихонов. ДАН СССР, 156, 1296, 1964.
 А.Н.Тихонов. ДАН СССР, 163, 591, 1965.
 4. Я.Визнер, Е.П.Жидков, В.Лелек. Препринт ОИЯИ Р5-3895, Дубна, 1968.
 5. N.Levinson. *Det.Kgl. Danske Videnskab.Selskab. mat-fys.*
medd., 25, №9, 1949.
 6. З.С.Агранович, В.А.Марченко. Обратная задача теории рассеяния,
 Харьков, 1960.
 Л.Д. Фаддеев. Успехи матем. наук., 14, 57, 1959.
 7. В.А.Марченко, Матем. сборник, 77 (II9), 139, 1968.
 Д.Ш.Лундина, В.А.Марченко. Матем.сборник, 78(I20), 475, 1969.

8.Г.Ф.Друкарев. ЖЭТФ, 19, 247, 1949.

В.В.Бабилов. Метод фазовых функций в квантовой механике.
 "Наука", Москва, 1968.

9. M.H.Mac Gregor, R.A.Arndt, R.M.Wright.
 Preprint UCRL-70075, (Part I), 39, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
 4 августа 1970 года.