ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2505

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.М. Дубовик, А.А. Чешков

ФОРМФАКТОРЫ И МУЛЬТИПОЛИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

1965

P-2505

В.М.Дубовик, А.А.Чешков[x)]

ФОРМФАКТОРЫ И МУЛЬТИПОЛИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Направлено в ЖЭТФ

---

x) Московский Ордена Ленина Авиационный институт имени Серго Орджоникидзе.

1. Введение

В квантовой теории поля электродинамические свойства частиц полностью определяются их электромагнитными формфакторами, которые вводятся при параметризации матричных элементов оператора тока.

На основе общей методики параметризации матричных элементов локальных операторов в данной работе подробно разобраны следствия условий, накладываемых на оператор тока эрмитовостью, градиентной, P - и T -инвариантностями.

Формфакторы одночастичных матричных элементов оператора тока непосредственно выражены через мультипольные электромагнитые моменты частицы и их средние $2n$ -степенные радиусы распределений. Оказывается, что в отличие от классической электродинамики в квантовой теории поля имеет смысл говорить о целом ряде электромагнитных взаимодействий, каждое из которых определяется распределением своего "заряда". Это обстоятельство имеет чисто квантовое происхождение.

2. Параметризация тока

В работе [1] была получена общая формула для параметризации матричных элементов векторного локального оператора $\hat{I}_\mu$. В обозначениях [1] она имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&< \vec{P}', \kappa', j', m' | I_a(x) | \vec{P}, \kappa, j, m > = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \exp(-K_\lambda x_\lambda) \cdot a_{a\beta}(w) \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}'} D^{j'}_{m', \tilde{m}'}(\vec{P}', \vec{w}) \cdot \\
&\cdot < \frac{\vec{q}}{2}, \kappa', j', \tilde{m}' | I_\beta(0) | -\frac{\vec{q}}{2}, \kappa, j, \tilde{m} > D^{j*}_{\tilde{m} m}(\vec{P}, \vec{w}) .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\langle I_\beta(0)\rangle$ – матричный элемент оператора тока в брейтовской системе (б.с.) при $x_\mu = 0$, а w – скорость лоренцевского преобразования к ней. $a_{\alpha\beta}(w)$ – обычная матрица преобразования Лоренца. В б.с. параметризация скалярной и векторной частей имеет вид:

$$\langle \frac{\vec q}{2}, \kappa', j', \tilde m' | I_0(0) | -\frac{\vec q}{2}, \kappa, j, \tilde m \rangle = e \sum_{L,M} (-i)^L \frac{4\pi}{(2L+1)!!} q^L Y^*_{LM}(\vec n_q) \langle j \tilde m L M | j' \tilde m' \rangle \cdot \phi^{0,L}_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa'), \qquad (2)$$

$$\langle \frac{\vec q}{2}, \kappa', j', \tilde m' | I_i(0) | -\frac{\vec q}{2}, \kappa, j, \tilde m \rangle = e \sum_{J,\Lambda,L,M,\mu} a_{i\mu} (-i)^{J+1} \frac{4\pi}{(2L+1)!!} \langle 1\mu L M | J \Lambda \rangle \cdot \langle j \tilde m J \Lambda | j' \tilde m' \rangle q^L Y^*_{LM}(\vec n_q) \phi^{1,L,J}_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa'), \qquad (3)$$

где $a_{i\mu}$ – матрица преобразования от ортогонального базиса к каноническому.

В нашем случае, когда матричный элемент (1) недиагонален по массам, требование эрмитовости оператора тока приводит к условиям для каждого формфактора:

$$\phi_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa') = (-1)^{j-j'} \phi^*_{j'j}(q^2, \kappa', \kappa) \sqrt{\frac{2j+1}{2j'+1}}. \qquad (4)$$

Закон сохранения тока дает соотношение

$$(-1)^L \sqrt{\frac{8}{3}\pi L(2L+1)} \left\{ \phi^{1,L-1,L}_{jj'} - q^2 \phi^{1,L+1,L}_{jj'} \times \frac{\sqrt{(L+1)/L}}{(2L+1)(2L+3)} \right\} = -i q_0 \phi^{0,L}_{jj'}, \qquad (5)$$

где

$$q_0 = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \kappa'^2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \kappa^2}.$$

P – инвариантность оператора тока накладывает дополнительные условия на формфакторы:

$$\begin{aligned} &\phi^{0,L}_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa') = 0 && L = 2n+1 \\ &\phi^{1,L\pm1,L}_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa') = 0 && L = 2n+1 \\ &\phi^{1,L,L}_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa') = 0 && L = 2n. \end{aligned} \qquad (6)$$

Требование T-инвариантности приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} &\phi^{0,L}_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa') = (-1)^{L+j-j'} \sqrt{\frac{2j+1}{2j'+1}} \phi^{0,L}_{j'j}(q^2, \kappa', \kappa) \\ &\phi^{1,L\pm1,L}_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa') = (-1)^{L+j-j'} \sqrt{\frac{2j+1}{2j'+1}} \phi^{1,L\pm1,L}_{j'j}(q^2, \kappa', \kappa) \\ &\phi^{1,L,L}_{jj'}(q^2, \kappa, \kappa') = (-1)^{L+j-j'} \sqrt{\frac{2j+1}{2j'+1}} \phi^{1,L,L}_{j'j}(q^2, \kappa', \kappa). \end{aligned} \qquad (7)$$

Из приведенных формул следует, что отказ от T-инвариантности оставляет формфакторы недиагонального матричного элемента оператора тока комплексными, иными словами, число формфакторов удваивается. Так, для скалярных частиц ($j = j' = 0$ но $\kappa \neq \kappa'$) формфактор "смешанного заряда" /2/ и связанный с ним соотношением (5) "смешанный магнитный монополь II рода" получают мнимые добавки, а у спинорных частиц добавку получает кроме того и формфактор "смешанного магнитного момента I рода"[x)]. Эти добавки будут ответственны за распады с нарушением T-инвариантности соответствующих частиц (см., например, /2/).

---

x) Смысл терминов будет ясен из дальнейшего.

3. Формфакторы и мультиполи

Формфакторы одночастичного матричного элемента оператора тока естественным образом связываются с мультипольными моментами частицы. Для этого изменим нормировку формфакторов в (2) и (3):

$$\phi^{0,L}_{jj}(q^2,\kappa,\kappa)=\frac{f^{0,L}(q^2)}{\langle jjL0\,|\,jj\rangle},$$

$$\phi^{1,L,J}_{jj}(q^2,\kappa,\kappa)=\frac{f^{1,L,J}(q^2)}{\langle jjJ0\,|\,jj\rangle}. \qquad (8)$$

Требование эрмитовости оператора тока теперь делает формфакторы действительными. Условия сохранения тока приводит к соотношению между формфакторами:

$$f^{1,J-1,J}=q^2 f^{1,J+1,J}\sqrt{\frac{J+1}{J}}\,[(2J+1)(2J+3)]^{-1}. \qquad (9)$$

Поэтому

$$\langle \frac{\vec q}{2},\kappa,j,m'|\,I^{(1)}_\mu(0)\,|-\frac{\vec q}{2},\kappa,j,m\rangle=4\pi e\sum_{J=1}^{\infty}(-i)^{J+1}\cdot$$

$$\cdot\frac{\langle jmJ\Lambda\,|\,jm'\rangle}{\langle jjJ0\,|\,jj\rangle}\Big\{\frac{\langle 1\mu JM\,|\,J\Lambda\rangle}{(2J+1)!!}\,q^J\,Y^*_{JM}(\vec n_q)\,f^{1,J,J}(q^2)+$$

$$+\frac{q^{J+1}}{(2J+3)!!}\Big[\langle 1\mu\ J+1\,M\,|\,J\Lambda\rangle\,Y^*_{J+1,M}(\vec n_q)+ \qquad (10)$$

$$+\sqrt{\frac{J+1}{J}}\,\langle 1\mu\ J-1\,M\,|\,J\Lambda\rangle\,Y^*_{J-1,M}(\vec n_q)\Big]\,f^{1,J+1,J}(q^2)\Big\}.$$

Формфакторы $f^{0,L}(q^2)$ и $f^{1,L,L}(q^2)$ при $q^2=0$ определяют соответственно L-польные электрические Q_L и обычные магнитные моменты $\hat{M}^I_L$ (магнитные моменты I рода):

$$\langle\frac{\vec q}{2},\kappa,j,m'|\,\hat Q_{LM}\,|-\frac{\vec q}{2},\kappa,j,m\rangle=$$

$$=\int d^3x\,x^L Y_{LM}(\vec n_x)\,\langle|\,I_0(x)\,|\rangle= \qquad (11)$$

$$=\delta^3(\vec q)\,\frac{\langle jmLM\,|\,jm'\rangle}{\langle jjL0\,|\,jj\rangle}\,Q_L,$$

$$Q_L=e\,f^{0,L}(0), \qquad (11a)$$

$$\langle\frac{\vec q}{2},\kappa,j,m'|\,\hat{\mathfrak M}^I_{LM}\,|-\frac{\vec q}{2},\kappa,j,m\rangle=$$

$$=i\sum_{M',\mu}\int d^3x\,x^L Y_{LM}(\vec n_x)\,\langle|\,I^{(1)}_\mu(x)\,|\rangle\,\langle 1\mu\,LM'\,|\,LM\rangle= \qquad (12)$$

$$=\delta^3(\vec q)\,\frac{\langle jmLM\,|\,jm'\rangle}{\langle jjL0\,|\,jj\rangle}\,\mathfrak M^I_L,$$

$$\mathfrak M^I_L\equiv e\,f^{0,L,L}(0). \qquad (12a)$$

Формфакторы $f^{1,L+1,L}(q^2)$ при $q^2=0$ являются L-польными магнитными моментами II рода[x)] $\mathfrak M^{II}_L$:

$$\langle\frac{\vec q}{2},\kappa,j,m'|\,\hat{\mathfrak M}^{II}_{LM}\,|-\frac{\vec q}{2},\kappa,j,m\rangle=$$

$$=\sum_{M',\mu}\int d^3x\,x^{L+1}\,Y^*_{L+1,M'}(\vec n_x)\,\langle|\,I^{(1)}_\mu(x)\,|\rangle\,\langle 1\mu\,L+1\,M'\,|\,LM\rangle= \qquad (13)$$

$$=\delta^3(\vec q)\,\frac{\langle jmLM\,|\,jm'\rangle}{\langle jjL0\,|\,jj\rangle}\,\mathfrak M^{II}_L$$

$$\mathfrak M^{II}_L=e\,f^{1,L+1,L}(0). \qquad (13a)$$

---

x) В работе /3/ допущена неточность при параметризации электромагнитной вершины, что привело к потере семейства магнитных мультиполей II рода.

Средние значения $2n$ -степенных радиусов распределения электрического мультиполя запишутся в виде:

$$< \frac{\vec{q}}{2}, \kappa, j, m' \,|\, \hat{r}^{2n}_{LM} \,|\, -\frac{\vec{q}}{2}, \kappa, j, m > =$$

$$\int d^3x \, x^{2n+L} \, Y^*_{LM}(\vec{n}_x) < | I_0(x) | > = \qquad (14)$$

$$= \delta^3(\vec{q}) \frac{< jm \; LM \,|\, jm'>}{< jj \; L0 \,|\, jj >} (2n+1)! \; \bar{r}^{2n}_L ,$$

$$\bar{r}^{2n}_L = \frac{e}{n!} [f^{0,L}(q^2)]^{(n)}_{q=0} . \qquad (14a)$$

Соответствующие формулы для магнитных мультиполей идентичны приведенной:

$$< \frac{\vec{q}}{2}, \ldots \,|\, \hat{\rho}^{2n}_{ILM} \,|\, -\frac{\vec{q}}{2}, \ldots > = e \frac{<jmLM|jm'>}{<jj\;L0|jj>} \frac{(2n+1)!}{n!} [f^{1,L,L}(q^2)]^{(n)}_{q=0} \qquad (14в)$$

$$< \frac{\vec{q}}{2}, \ldots \,|\, \hat{\rho}^{2n}_{IILM} \,|\, -\frac{\vec{q}}{2}, \ldots > = e \frac{< jm\;LM \,|jm'>}{< jj\;L\;0 |\, jj>} \frac{(2n+1)!}{n!} [f^{1,L+1,L}(q^2)]^{(n)}_{q=0} \qquad (14c)$$

Таким образом, электромагнитные формфакторы выражаются прямо через мультиполи и их средние $2n$ -степенные радиусы распределений. Так, электрический формфактор равен:

$$e f^{0,L}(q^2) = Q_L + \sum_{n=1}^{\infty} (-q^2)^n \, \bar{r}^{2n}_L . \qquad (15)$$

Требование P -инвариантности дает в случае одночастичного матричного элемента оператора тока те же условия (6).

Требование T -инвариантности приводит теперь к условиям:

$$\begin{aligned} & f^{0,L}(q^2) = 0 && L = 2n+1 \\ & f^{1,L\pm1,L}(q^2) = 0 && L = 2n \\ & f^{1,L,L}(q^2) = 0 && L = 2n . \end{aligned} \qquad (16)$$

Из формулы (16) видно, что только магнитные мультиполи II рода являются T -неинвариантными характеристиками частицы. Такие мультиполи могут иметь частицы со спином $j \geq 1$.

4. Формфакторы и электромагнитные взаимодействия

Интересным является то обстоятельство, что если в классической электродинамике только две функции - плотности распределений заряда и тока - позволяют определить все мультиполи системы, являющиеся просто числами, то в квантовой механике электромагнитные мультиполи (мультипольные формфакторы) являются независимыми функциями и сами разлагаются в ряд по средним $2n$ -степенным радиусам распределений ("средненулевой" радиус распределения обычно и называют соответствующим мультиполем частицы). Поэтому в квантовой электродинамике имеет смысл говорить о различных видах мультипольных электромагнитных взаимодействий, каждое из которых определяется своим распределением "заряда" (мультипольным формфактором). Число видов электромагнитных взаимодействий растет с увеличением спина частицы. Необходимо заметить, что существование многих видов электромагнитных взаимодействий является чисто квантовым эффектом. При переходе к классическому пределу выживает лишь зарядовый формфактор, при этом фурье-образ плотности заряда будет пропорционален $f^{0,0}(q^2)$, а фурье-образ плотности тока будет равен нулю.

Литература

1. А.А.Чешков, Ю.М.Широков. ЖЭТФ, 44, 1982 (1963).
2. J.Bernstein, G.Feinberg, T.D.Lee. Phys. Rev., 139, 1650 (1965).
3. В.Л.Любошиц. ЖЭТФ, 44, 561 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
21 декабря 1965 г.