ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2418

И.С. Лупашина, С.Н. Соколов

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ НА СИСТЕМЕ ДВУХ ЧАСТИЦ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

Р-2418

И.С. Лупашина, С.Н. Соколов

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ НА СИСТЕМЕ ДВУХ ЧАСТИЦ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

В математическом исследовании квантовомеханической проблемы 3-х тел в настоящее время достигнут значительный прогресс, связанный главным образом с работами Л.Д. Фаддеева по изучению резольвенты оператора энергии [1]. Фаддеевым доказывается теорема разложения произвольной функции по собственным функциям этого оператора, причем на потенциалы парных взаимодействий накладываются такие ограничения (в частности, требование ограниченности этих потенциалов), что оператор энергии имеет как дискретный, так и непрерывный спектр. Оставаясь в рамках даже этих ограничений на потенциалы, решение проблемы нельзя считать вполне удовлетворительным, так как разложение по тому полному набору, который использован в [1], практически непригодно для счета. Трудности связаны с необходимостью выхода на комплексную плоскость и с последующим предельным переходом из комплексной плоскости на вещественную ось в ядре резольвенты оператора энергии. Получение каких-либо наглядных качественных предсказаний из этого весьма общего формализма также затруднительно.

Для получения качественных результатов и для численных расчетов более плодотворным является метод, использованный в работе [3], согласно которому из нескольких взаимодействующих частиц одна выделяется явно, а остальные рассматриваются как некая сложная частица, способная к возбуждениям. Разложение полной волновой функции по состояниям сложной частицы приводит к бесконечным системам простых дифференциальных уравнений. Огрубляя разными способами эти бесконечные системы, получают конечные, которые уже легко поддаются как аналитическому, так и численному исследованию. Чтобы приобрести уверенность в правильности основных результатов, уже полученных на этом пути, и открыть дорогу для изучения более тонких эффектов в поведении системы трех тел, необходимо количественное исследование бесконечных систем уравнений.

Данная работа, являющаяся развитием работы [3], посвящена количественному исследованию бесконечной системы уравнений для случая, когда сложная частица не может диссоциировать и не имеет непрерывного спектра, но имеет дискретный спектр произвольного вида. Рассмотрение ограничено одномерным случаем. Заметим, что потенциал, препятствующий диссоциации сложной частицы, не является ограниченной функцией, так что рассматриваемый в данной работе класс систем из трех случайных тел находится вне поля зрения общей теории, развитой Л.Д. Фаддеевым.

В предыдущей работе [3] в качестве полного набора выбирались так называемые свободные волновые функции, удовлетворяющие уравнению

$$-\frac{1}{2M_2}\ddot{\Phi}_n^0 + V_{12}\Phi_n^0 = E_n^0\Phi_n^0 \,, \tag{1}$$

где $M_2 = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\quad \Psi(x,y) = \sum\limits_n \phi_n(x)\Phi_n^0(y)$.

Если подставить в уравнение для $\Psi(x,y)$ это разложение и воспользоваться (1), то получим бесконечную систему зацепленных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \phi_m'' - 2M_1(E_m^0 + \Delta E_m^0 - E)\phi_m = \sum_n W_{mn}\phi_n \,, \\ W_{mn} = \int (V_{13} + V_{23})\Phi_n^0\Phi_m^0\,dy \qquad (m \neq n), \\ \Delta E_m^0(x) = \int (V_{13} + V_{23})\Phi_m^{0\,2}\,dy \,, \\ M_1 = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \,. \end{gathered} \tag{2}$$

Согласно [1] для коэффициентов W_{mn} справедливы следующие оценки:

$$|W_{mn}| < \frac{M_1}{M_2}\,\frac{\max\limits_y \{|\Phi_m\dot{\Phi}_n| + |\dot{\Phi}_m\Phi_n|\}}{|E_n - E_m|} \times \tag{3}$$

$$\times \underset{|y|<\infty}{\mathrm{var}}[V_{13}(x + By) + V_{23}(x - Ay)] \,,$$

где $A = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$, $\quad B = \dfrac{m}{m_1 + m_2}$.

В работе [1] показано, что если частицы 1 и 2 связаны потенциалом в виде прямоугольной ямы с бесконечными стенками, то бесконечная система зацепленных уравнений (2) может быть решена, например, методом Фредгольма. Там же отмечено, что имеется некоторый "запас" сходимости и сходимость сохранится при коэффициентах связи W_{mn}, убывающих несколько медленнее, чем $\dfrac{1}{|m-n|}$, и энергиях E_n, растущих не столь быстро, как $(2n+1)^2$.

В настоящей работе делается попытка полностью использовать этот "запас", тем самым определив рамки, в которых построенное по методу Фредгольма решение будет корректно.

Исследование удобно начать с рассмотрения энергетического спектра вида $E_n = (2n+1)^{2a}$, где $0 < a < 1$. Целесообразность выбора этого спектра обусловлена тем, что он качественно охватывает все возможные случаи, а именно: при $½ < a < 1$ с ростом номера n расстояние между соседними уровнями увеличивается; при $a = ½$ – налицо эквидистантное распределение уровней; при $0 < a < ½$ с ростом энергии плотность уровней сложной частицы увеличивается.

По виду энергетического спектра, используя правило квантования Бора-Зоммерфельда, находим, что частицы 1 и 2 связаны потенциалом

$$V_{12}(y) = |y|^{\frac{2a}{1-a}} \,, \qquad a = (2n+1)^{1-a} \,, \tag{4}$$

где a – точка поворота.

Из условия, которое накладывается на импульс при квазиклассическом приближении, легко получить границы применимости квазиклассики:

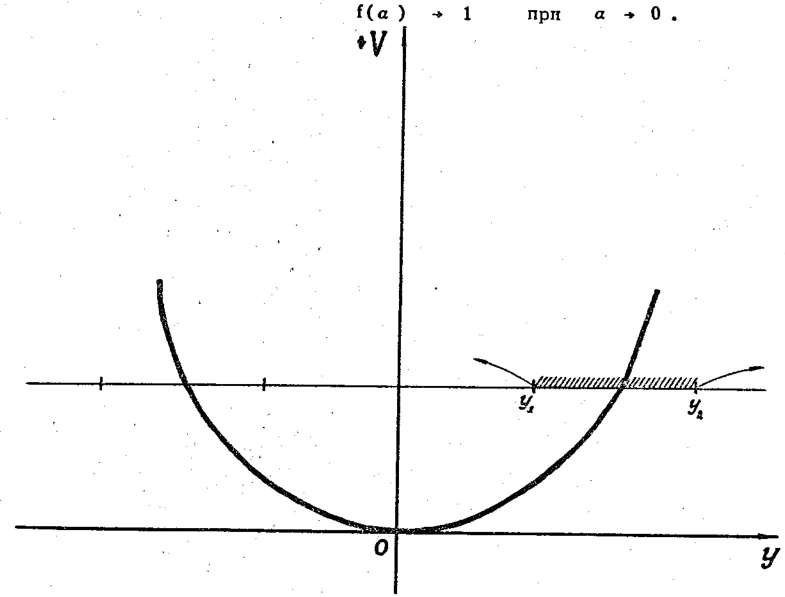
$$y_1 = \left[(2n+1)^{2a} - \sqrt[3]{\left(\frac{f(a)\cdot a}{1-a}\right)^2 (2n+1)^{2(3a-1)}}\,\right]^{\frac{1-a}{2a}} \,,$$

$$y_2 = \left[(2n+1)^{2a} + \sqrt[3]{\left(\frac{f(a)\cdot a}{1-a}\right)^2 (2n+1)^{2(3a-1)}}\,\right]^{\frac{1-a}{2a}} \,,$$

где $f(a) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^{\frac{2a}{1-a}}}\,dx$,

$$f(a) \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0 \,,$$

$$f(a) \to 1 \quad \text{при} \quad a \to 0 \,.$$



Р и с . 1

Между точками y_1 и y_2 квазиклассика не применима. Можно показать, что максимум волновой функции для потенциала вида (4) лежит внутри ямы в той области, где применима квазиклассика. Вообще можно получить

$$
y \le y_1 \quad \begin{cases}
|\Phi_n(y)| < \dfrac{C_n}{\sqrt[4]{2\mu}\,\sqrt[6]{\frac{\alpha f(\alpha)}{1-\alpha}(2n+1)^{3\alpha-1}}}\,, \\[2ex]
|\Phi_n(y)| < \dfrac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\,C_n\, y^{\frac{3\alpha-1}{1-\alpha}}}{2\sqrt[4]{2\mu}\,\sqrt[4]{[(2n+1)^{2\alpha} - y^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}]^5}} + C_n \sqrt[4]{2\mu[(2n+1)^{2\alpha} - y^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}]}\,,
\end{cases}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
|\Phi_n(y)| &< \frac{A \cdot C_n}{\sqrt[4]{2\mu}\,\sqrt[6]{\frac{\alpha f(\alpha)}{1-\alpha}(2n+1)^{3\alpha-1}}}\,, \\
|\Phi_n(y)| &< \frac{C_n \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}(A-B)\sqrt[6]{(2n+1)^{3\alpha-1}}}{\sqrt[4]{2\mu}\,\sqrt[6]{(\frac{\alpha f(\alpha)}{1-\alpha})^5}}\,,
\end{aligned}\right\} \quad y_1 \le y \le y_2\,,
$$

$$
\left.\begin{aligned}
|\Phi_n(y)| &< \frac{C_n}{2\sqrt[4]{2\mu}\,\sqrt[6]{\frac{\alpha f(\alpha)}{1-\alpha}(2n+1)^{3\alpha-1}}}\,, \\
|\dot{\Phi}_n(y)| &< \frac{C_n \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}\, y^{\frac{3\alpha-1}{1-\alpha}}}{4\sqrt[4]{2\mu}\,\sqrt[4]{[y^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} - (2n+1)^{2\alpha}]^5}} + \frac{C_n}{2}\sqrt[4]{2\mu[y^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} - (2n+1)^{2\alpha}]}\,,
\end{aligned}\right\} \quad y \ge y_2\,,
$$

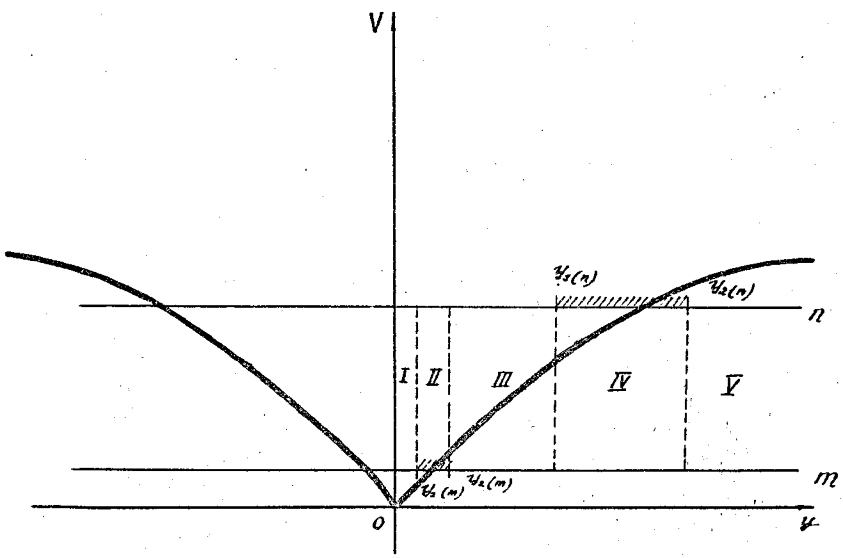
где коэффициент C_n, найденный из условия нормировки, есть:

$$
C_n \le \frac{\sqrt[4]{2\mu}}{(2n+1)^{1/2-\alpha}}\,, \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right), \\
B &= \frac{e^{-\frac{\pi}{8}}}{2}\,, \\
\sqrt{2\mu} &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{f(\alpha)}\,.
\end{aligned} \tag{6}
$$

При оценке коэффициентов W_{mn} должны быть учтены два случая:

1) Уровни m и n достаточно удалены друг от друга, и области, где квазиклассика не применима, взаимно не перекрываются (рис. 2).



Р и с. 2

Тогда

$$
(2n+1)^{2\alpha} - (2m+1)^{2\alpha} > \sqrt[3]{(\frac{\alpha f(\alpha)}{1-\alpha})^2}\,[\sqrt[3]{(2n+1)^{2(3\alpha-1)}} + \sqrt[3]{(2m+1)^{2(3\alpha-1)}}]\,. \tag{7}
$$

Оценив $|\Phi_m \dot{\Phi}_n + \dot{\Phi}_m \Phi_n|$ в каждой из областей, показанных на рисунке 2, используя при этом (3),)5), (6), (7), выбрав максимальную из этих оценок, получим:

$$
|W_{mn}| < \frac{\pi M_1 N}{4M_2 f(\alpha)} \cdot \frac{\operatorname*{var}_{|y|<\infty}(V_{13} + V_{23})}{(2m+1)^{1-2\alpha}[(2n+1)^{2\alpha} - (2m+1)^{2\alpha}]}\,, \quad \alpha \le 1/3\,, \tag{8}
$$

$$
|W_{mn}| < \frac{\pi M_1 N}{4M_2 f(\alpha)} \cdot \frac{\operatorname*{var}_{|y|<\infty}(V_{13} + V_{23})}{(2m+1)^{1/3-\alpha/2}\,(2n+1)^{2/3-3/2\alpha}\,[(2n+1)^{2\alpha} - (2m+1)^{2\alpha}]}\,, \quad \alpha \ge 1/3\,. \tag{8'}
$$

Последнее выражение можно переписать в несколько ином виде, вспомнив, что при $\alpha \geqslant 1/3$

$$
(2n+1)^{2\alpha} - (2m+1)^{2\alpha} < 2\sqrt[3]{(\frac{\alpha f(\alpha)}{1-\alpha})^2\,(2n+1)^{2(3\alpha-1)}}\,.
$$

Выбрав $(2m+1) > \frac{\alpha f(\alpha)}{1-\alpha}$ (что всегда возможно), после несложных преобразований получаем

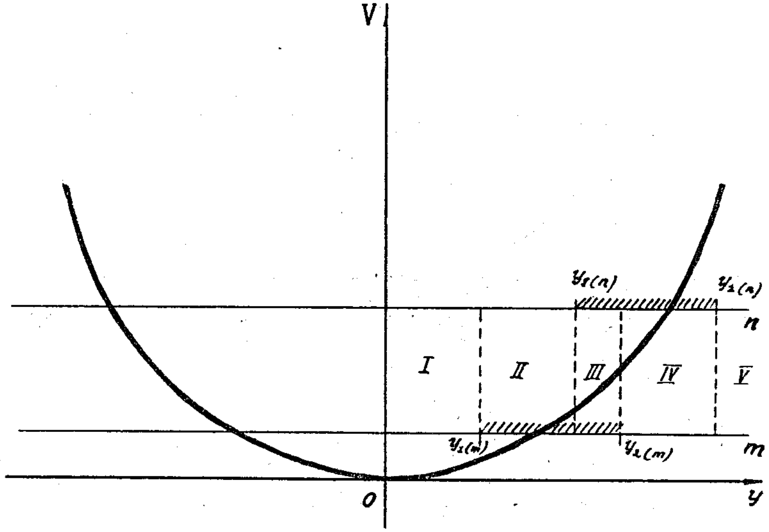
$$
(2n+1) < 3^{3/2}\,(2m+1).
$$

Откуда

$$|W_{mn}| < \frac{\pi\sqrt[4]{3}\, M_1 N}{4M_2 f(a)\cdot(2n+1)^{1-2a}\left[(2n+1)^{2a}-(2m+1)^{2a}\right]} \operatorname*{var}_{|y|<\infty}(V_{13}+V_{23}), \quad (8'')$$

$$a \geq 1/3$$

2) Уровни m и n расположены достаточно близко друг к другу, и области, где квазиклассика не применима, частично перекрываются (рис. 3).



Р и с. 3

Тогда

$$(2n+1)^{2a}-(2m+1)^{2a} < \sqrt[3]{\left(\frac{a f(a)}{1-a}\right)^2}\left[\sqrt[3]{(2n+1)^{2(3a-1)}} - \sqrt[3]{(2m+1)^{2(3a-1)}}\right].$$

Используя это соотношение, а также выражения (3), (5) и (6), будем иметь

$$|W_{mn}| < \frac{\pi M_1 M (2m+1)^{a-1/2}(2n+1)^{1/3-3/2a}}{4M_2 f(a)\sqrt[6]{\frac{a}{1-a}f(a)}\left[(2n+1)^{2a}-(2m+1)^{2a}\right]^{3/4}} \operatorname*{var}_{|y|<\infty}(V_{13}+V_{23}), \quad a \leq 1/3, \quad (10)$$

$$|W_{mn}| < \frac{\pi M_1 M (2n+1)^{a-1/2}(2m+1)^{-1/3+1/2a}}{4M_2 f(a)\sqrt[6]{\frac{a}{1-a}f(a)}\left[(2n+1)^{2a}\ (2m+1)^{2a}\right]^{3/4}} \operatorname*{var}_{|y|<\infty}(V_{13}+V_{23}), \quad a \geq 1/3. \quad (10')$$

Здесь

$$M = \left(\frac{8}{\pi} + \sqrt[4]{2} + 1\right), \quad N = \left(\frac{8}{\pi} + \sqrt[4]{3} + 1\right).$$

При использовании оценок (8), (8'), (8''), (10), (10'), а также соотношения

$$|q_{m_1}(x')\theta(x'-x)q_{m_2}(x)| < \frac{\gamma}{(2m+1)^a},$$

где γ – некоторая константа, все сведется к рассмотрению сходимости сумм

$$N_A < \sum_{\substack{m \text{ и } n \text{ такие, что} \\ \text{области частично} \\ \text{перекрываются.}}} \frac{z_1\cdot 27\sqrt[4]{3}}{(2n+1)^{2-2a}\left[(2n+1)^{2a}-(2m+1)^{2a}\right]^2} + \quad a > 1/3 \quad (11)$$

$$+ \sum_{\substack{m \text{ и } n \text{ такие, что} \\ \text{что области, где} \\ \text{квазиклассика не} \\ \text{применима, не} \\ \text{перекрываются.}}} \frac{z_2}{(2n+1)^{1-2a}(2m+1)^{2/3+a}\left[(2n+1)^{2a}-(2m+1)^{2a}\right]^{3/2}}$$

$$N_A < \sum_{\substack{m \text{ и } n \\ \text{перекр}}} \frac{z_1}{(2m+1)^{2-2a}\left[(2n+1)^{2a}\ (2m+1)^{2a}\right]^2} +$$

$$+ \sum_{\substack{m \text{ и } n \\ \text{не перекр}}} \frac{z_2}{(2m+1)(2n+1)^{3a-2/3}\left[(2n+1)^{2a}-(2m+1)^{2a}\right]^{3/2}}, \quad a \leq 1/3 \quad (12)$$

$$z_1 = \frac{\pi^2\gamma^2 R^2 M_1^2 N^2}{4M_2^2 f^2(a)}; \quad z_2 = \frac{\pi^2\gamma^2 R^2 M_1^2 M^2}{4M_2^2 f^2(a)\sqrt[3]{\frac{a}{1-a}f(a)}};$$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname*{var}_{|y|<\infty}\left[V_{13}(x+By) + V_{23}(x-Ay)\right]dx \qquad (R \text{ должно быть } < \infty).$$

Можно показать, что для потенциалов, у которых $a > 1/2$, $N_A < \frac{z}{2}\frac{\pi^4}{36}$,

где

$$z = \frac{27\pi^2\gamma^2 R^2 M_1^2 N^2\sqrt{3}}{4M_2^2 f^2(1/2)} + \frac{\pi^2\gamma^2 R^2 M_1^2 M^2}{4M_2^2\cdot f^{7/3}(1/2)},$$

а для $a \leq 1/2$ ряды (11) и (12) расходятся. Правда, из расходимости рядов при $a \leq 1/2$ еще не следует расходимость соответствующего интеграла N_A, так как эти ряды ограничивают его лишь сверху. Сейчас возможно вынести заключение только о том, что метод Фредгольма "хорошо работает" лишь для потенциалов $V_{12}(y) = |y|^{\frac{2a}{1-a}}$, у которых $a > 1/2$. В принципе, конечно, можно было бы сделать оценку интеграла N_A снизу и, возможно, доказать его расходимость для $a \leq 1/2$. Но эта трудоемкая работа, к счастью, не представляет физического интереса, так как, даже строго доказав расходимость этого интеграла, невозможно сделать заключение о том, что не существует ни одной сходящейся процедуры получения решения системы (2), в силу того, что признак сходимости Фредгольма является лишь достаточным признаком.

Таким образом, если плотность уровней сложной частицы убывает с ростом энергии, то волновая функция трех тел может быть найдена методом Фредгольма. В случае сгущающихся или эквидистантных уровней задача остается нерешенной.

Литература

1. Л.Д. Фаддеев. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. Труды математического института им. В.А. Стеклова. Изд. АН СССР, 1963.
2. H.Feshbach. Unified Theory of Nuclear Reactions. Ann. of Phys., 5, 357 (1958).
3. Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов. О виртуальных возбуждениях сложной частицы. Препринт ОИЯИ, Р-1593, Дубна, 1964 .
4. Steven Weinberg. Sistimatic Solution of Multiparticle Scattering Problems. Phys. Rev., 133, 1B (1964).
5. С.Г. Михлин. Интегральные уравнения. ГИТТЛ, 1949.
6. И.А. Ицкович. О рядах Фредгольма. ДАН СССР, 423 (1948).
7. В.А. Фок. Таблицы функций Эйри. Издание информационного отдела НИИ-108 (1946).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 ноября 1965 г.