ЯФ, 1966, т. 4, №1, с. 57-65.

27/X-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р - 2370

И.Ж. Петков, В.К. Лукьянов, Ю.С. Поль

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЯДРАХ С ФЕРМИЕВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P – 2370

И.Ж. Петков, В.К. Лукьянов, Ю.С. Поль

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЯДРАХ С ФЕРМИЕВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА

Направлено в "Ядерную физику"

1. Введение

Известно, что рассеяние электронов на ядрах дает ценную информацию об их статических и динамических свойствах. При рассмотрении рассеяния электронов на легких ядрах ($Z \gg 137$) ситуация оказывается наиболее простой. В этом случае, за исключением области углов возле дифракционных минимумов, можно пользоваться борновским приближением; для обычно принимаемых здесь распределений плотности заряда (гауссовского, либо модифицированного гауссовского вида) окончательное выражение для сечения получается в явном виде. В случае же средних и тяжелых ядер возникает необходимость учитывать искажение электронной волны в поле ядра (волны уже не плоские) и – в отличии от легких ядер – использовать в расчетах реальное фермиевское распределение плотности заряда. Обычно в этом случае пользуются точными расчетами фазового анализа, где численно решается уравнение Дирака и находятся парциальные фазы. Однако эти расчеты являются трудоемкими, в них теряется непосредственная связь распределения заряда и структуры сечения, и их трудно проводить для больших углов рассеяния. Далее при рассеянии на не центрально-симметричных потенциалах (деформированные ядра) использование подобного подхода наталкивается на принципиальные трудности. То же относится и к проблеме неупругого рассеяния электронов на ядрах.

В связи с этим, начиная с работы Шиффа [1], развивается другой, приближенный метод нахождения амплитуды рассеяния (метод больших энергий $E \gg V$). Фактически суть этого и других подобных методов [2-4] состоит в том, что расчеты проводятся по формуле, аналогичной борновской, где вместо плоских волн выступают волновые функции электронов, амплитуда и фаза которых искажены рассеивающим полем ядра. Таким образом, обычно исходным является следующее выражение:

$$f = \frac{E}{2\pi} (u^*_f, u_i) \int g(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x} + i\Phi(\vec{x},\vec{q})} V(\vec{x}) d^3x . \qquad (1)$$

Задача того или иного подхода состоит в нахождении с помощью некоторых допущений явного вида поправок к фазе $\Phi(\vec{x})$ и амплитуды $g(\vec{x})$. Очевидно, что в борновском приближении $\Phi = 0$, $g = 1$.

Недавно в работе [3] в приближении малых углов ($\theta < 1$) [5] сделан ряд конкретных численных расчетов дифференциальных сечений рассеяния электронов на ядрах, однако эти расчеты невозможно провести с фермиевским распределением плотности заряда. В другой работе [4] решается уравнение Дирака в квазиклассическом приближении и получено выражение для волновых функций. Действуя далее в рамках метода искаженных волн, авторы получают явное выражение для $g(x)$ и $\Phi(\vec{x})$ в формуле (1), при этом они используют выражение для потенциала взаимодействия внутри ядра ($V = c_1 + c_2 x^2$), полученное разложением по степеням x точного выражения для потенциала. Затем для случая распределения плотности заряда с резким обрезанием им удалось интегрированием по частям получить приближенное аналитическое выражение для амплитуды упругого и неупругого рассеяния электронов. Их результаты хорошо согласуются с расчетами по фазовому анализу для выбранного (ступенчатого) распределения плотности заряда.

В настоящей работе предлагается способ нахождения сечений в аналитическом виде, где, с одной стороны, учитывается искажение электронной волны и, с другой стороны используется реальное, фермиевское распределение плотности заряда в случае средних и тяжелых ядер. Этот способ состоит в отыскании вклада полюсов фермиевской плотности в амплитуду рассеяния, причем оказывается, что основной вклад в сечение дают два комплексно сопряженных полюса. Основные черты этого подхода удобно проследить на примере наиболее простого случая - борновского приближения, когда $\Phi(\vec{x}) = 0$, $g(\vec{x}) = 1$ (раздел 2). Затем, в разделе 3, мы рассмотрим общий случай, когда в формуле (1) учитывается искажение. Сравнение полученных результатов с экспериментом и точными расчетами фазового анализа дается в разделе 4.

2. Борновское приближение

Запишем амплитуду рассеяния быстрых электронов в борновском приближении при учете только кулоновского взаимодействия (поперечным взаимодействием для средних и тяжелых ядер можно пренебрегать [6]):

$$f_Б = - \frac{E}{2\pi} (u^*_f u_i) \int e^{i\vec{q}\vec{r}} V(\vec{r}) d^3 r , \qquad (2)$$

где u_f и u_i –спиноры, соответствующие импульсам $\vec{k}_f$ и $\vec{k}_i$, $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ - переданный импульс, E - энергия электрона ($h = c = 1$). Подставляя сюда потенциал взаимодействия

$$V(\vec{r}) = - 2 e^2 \int \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{r} - \vec{x}|} d^3 x \ ; \quad \int \rho(\vec{x}) d^3 x = 1$$

и вводя новую переменную $\vec{u} = \vec{r} - \vec{x}$, получаем:

$$f_Б = 2Ze^2 \, E(u^*_f \cdot u_i)\left[\frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{i\vec{q}\vec{u}}}{u} d^3u\right]\cdot\int\rho(\vec{x})e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3x \, . \tag{3}$$

Выражение в квадратных скобках есть $\frac{1}{q^2}$ и выписано для того, чтобы проследить аналогию с выкладками следующего раздела (ср. формулу (9)). Таким образом, задача сводится к вычислению фурье-образа от плотности распределения заряда, которое выберем в виде ферми-распределения:

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{1}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} \quad ; \quad \rho_0 = \left[4\pi\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}}\right]^{-1} = \frac{3}{4\pi R^3}\left[1+\frac{b^2\pi^2}{R^2}+0\left(\frac{b}{R}\right)\right]. \tag{4}$$

Тогда, выбирая координатную систему, в которой ось $0\vec{z} \parallel \vec{q}$, и обозначая $\mu = \cos\widehat{\vec{q}\vec{x}}$ $(d^3x = x^2 dx d\mu d\phi)$, получаем:

$$\int\rho(\vec{x})e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3x = 2\pi\rho_0\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}}\cdot\int e^{iqx\mu}d\mu = \frac{2\pi\rho_0}{iq}\sum_{\epsilon=\pm1}\epsilon\int_0^\infty \frac{e^{i\epsilon qx}\cdot xdx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} \, . \tag{5}$$

Интеграл в формуле (5) легко преобразовать, если рассмотреть подынтегральную функцию на комплексной плоскости x. Видно, что она имеет простые полюса $x_s = R + i\epsilon(2s+1)\pi b$ $(\epsilon = \pm 1, s = 0,1,2\ldots)$ и стремится к нулю на контуре $C^{(\epsilon)}$ бесконечного радиуса (см. рис. 1). Запишем теперь интеграл в формуле (5) через сумму интеграла по контуру $C^{(\epsilon)}$, интеграла по мнимой оси и сумму вычетов в полюсах, то есть

$$\int_0^\infty \frac{e^{i\epsilon qx}xdx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} = -\int_{C(\epsilon)} \frac{e^{i\epsilon qx}xdx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} - \int_{i\epsilon\infty}^0 \frac{e^{i\epsilon qx}x\cdot dx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} + 2\pi i\epsilon\sum_{s=0}^\infty \operatorname{Res} w^{(\epsilon)}(x_s^\epsilon)\,, \tag{6}$$

где

$$w^{(\epsilon)}(x) = \frac{e^{i\epsilon qx}x}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} \, .$$

Поскольку здесь $\int_{C^{(\epsilon)}} = 0$, то остается оценить интегралы по мнимой оси. Покажем, что их вклад в формулу (5) из-за разных знаков пренебрежимо мал. Действительно,

$$\Delta = \sum_\epsilon \epsilon\int_{i\epsilon\infty}^0 \frac{e^{i\epsilon qx}xdx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} \le \frac{1}{q^2}e^{-\frac{R}{b}}$$

и ее вклад в сечение имеет порядок $e^{-R/b}$ по сравнению с единицей, т.е. в реальных задачах ($R \gg b$) им можно пренебречь. Итак, исходное выражение (5) определяется лишь вычетами в полюсах x_s :

$$\operatorname{Res} w^{(\epsilon)}(x_s) = -b x_s e^{i\epsilon q x_s}$$

и равно

$$\int \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3x = -\frac{8\pi^2}{q} b\rho_0 \sum_{s=0}^{\infty} (R \operatorname{Cos} qR - (2s+1)\cdot \pi b \operatorname{Sin} qR) e^{-(2s+1)\pi b q} . \qquad (7)$$

Подставляя (7) в борновскую амплитуду (3) и учитывая, что $\overline{\sum |u_f^* \cdot u_i|^2} = \operatorname{Cos}^2 \frac{\theta}{2}$, получим выражения для дифференциального сечения

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_Б = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \cdot \left| \frac{8\pi^2}{q} \rho_0 R b \sum_{s=0}^{\infty} \left(\operatorname{Cos} qR - (2s+1)\frac{\pi b}{R} \operatorname{Sin} qR\right) e^{-(2s+1)\pi b q} \right|^2 , \quad (8)$$

где

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = \left(\frac{Ze^2}{2E}\right)^2 \frac{\operatorname{Cos}^2 \frac{\theta}{2}}{\operatorname{Sin}^4 \frac{\theta}{2}} \quad -$$

дифференциальное сечение рассеяния на точечном заряде (формула Мотта). Итак, в борновском приближении получено простое аналитическое выражение для сечения в случае фермиевского распределения заряда. Основной вклад в сечение дает первый член ряда с $s = 0$ (два комплексно сопряженных полюса). Каждый последующий член ряда в $e^{2\pi b q}$ раз меньше предыдущего и поэтому им можно пренебрегать. Тогда сечение принимает наиболее простой вид:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_Б = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \cdot \frac{1}{q^2} (8\pi^2 R b \rho_0)^2 \left(\operatorname{Cos} qR - \frac{\pi b}{R} \operatorname{Sin} qR\right)^2 e^{-2\pi b q} .$$

Отметим, что сечение (8) содержит в себе как частный случай сечение с плотностью распределения с резким обрезанием. Чтобы убедиться в этом, нужно устремить параметр размазки b к нулю. В этом случае полюса сгущаются и переходят в сплошную линию, проходящую через точку $x = R$. Тогда в формуле (8) $\sum_{s=0}^{\infty}$ можно заменить интегралом по s . Элементарные выкладки приводят к известному результату:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_Б = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \cdot \left| \frac{3}{(qR)^2} \left(\frac{\operatorname{Sin} qR}{qR} - \operatorname{Cos} qR \right) \right|^2 .$$

3. Учет искажения

Полученные выше результаты применимы в тех случаях, когда искажение электронной волны кулоновским полем ядра несущественно (например, рассеяние на легких ядрах). Интересно развить аналогичный метод для тех задач, где искажением пренебрегать нельзя (рассеяние на средних и тяжелых ядрах). В этом случае будем исходить из выражения (1) для амплитуды рассеяния, где это искажение учтено с помощью введения фазы $\Phi(\vec{x})$ и модулирующей амплитуды $g(\vec{x})$. Дальнейшее рассмотрение, вообще говоря, не зависит от конкретного выбора этих функций. Но поскольку, по-видимому, наиболее корректный учет искажения электронной волны дан в работе /4/, то далее мы будем пользоваться полученными в этой работе выражениями для Φ и g.

Так же, как и в разделе 1, подставим в исходную формулу (1) выражение для потенциала через плотность распределения заряда и введем переменную $\vec{u} = \vec{r} - \vec{x}$. Тогда

$$f = 2Ze^2 E(u^*_f \cdot u_i) \cdot \int \left[\frac{1}{4\pi} \int g(\vec{u},\vec{x}) \frac{e^{i\vec{q}\vec{u} + i\Phi(\vec{u},\vec{x})}}{u} d^3u \right] \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3x . \quad (9)$$

Основной вклад в интеграл в квадратных скобках из-за больших осцилляций подынтегральной функции при больших переданных импульсах дает область малых значений переменной $\vec{u}$. С другой стороны, поправка к фазе $\Phi(\vec{x})$ мала ($\sim \frac{V}{E}$) и является плавной функцией. Модулирующая амплитуда $g(\vec{x})$ близка к единице и тоже есть плавная функция. Поэтому разложим функции $g(\vec{x},\vec{u})$ и $\Phi(\vec{x},\vec{u})$ в ряд по $\vec{u}$ и ограничимся первыми членами, то есть

$$g(\vec{x},\vec{u}) = g(\vec{x}) + \ldots$$

$$\Phi(\vec{x},\vec{u}) = \Phi(\vec{x}) + \left(\left[\vec{\nabla}_{u} \Phi(\vec{x},\vec{u}) \right]_{\vec{u}=0} \cdot \vec{u} \right) + \ldots$$

Тогда амплитуда (9) примет вид

$$f = 2Ze^2 E(u^*_f \cdot u_i) \int g(\vec{x}) \frac{e^{i\vec{q}\vec{x} + i\Phi(\vec{x})}}{q^2_{эф}(\vec{x})} \rho(\vec{x}) d^3x , \quad (10)$$

где

$$\vec{q}_{эф}(\vec{x}) = \vec{q} + \vec{\nabla}_u \Phi(\vec{x},\vec{u}) \big|_{\vec{u}=0} .$$

Выбирая систему отсчета $0z \parallel \vec{q}$, $\mu = \cos\widehat{\vec{q}\vec{x}}$ и пользуясь тождеством

$$e^{iqx\mu + i\Phi(x,\mu,\phi)} = \frac{1}{i\left(qx + \frac{\partial}{\partial\mu}\Phi(x,\mu,\phi)\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial\mu} e^{iqx\mu + i\Phi(x,\mu,\phi)},$$

проинтегрируем (10) по μ по частям. Тогда получаем

$$f = 4\pi Z e^2 E(u_f^* \cdot u_i) \frac{1}{iq} \sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon \int_0^\infty \frac{G(x;\mu=\epsilon)}{q^2_{эф}(x,\mu=\epsilon)} e^{i\epsilon qx + i\Phi(x,\mu=\epsilon)} \cdot \rho(x) \cdot x \cdot dx = \tag{11}$$

$$= 4\pi Z e^2 E(u_f^* \cdot u_i) \cdot \frac{1}{iq} \sum_{\epsilon=\pm 1} \int_0^\infty w(x,\mu=\epsilon) dx ,$$

где обозначено

$$G(x,\mu=\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x,\mu=\epsilon) \frac{iq \cdot x\, d\phi}{D(x,\mu=\epsilon,\phi)} ,$$

$$D(x,\mu=\epsilon,\phi) = iqx + i\frac{\partial}{\partial\mu}\Phi(x,\mu,\phi)\Big|_{\mu=\epsilon} . \tag{12}$$

Так же, как и в работе[4], мы здесь ограничились лишь первым членом асимптотического ряда по $\frac{1}{qx}$, получаемого в результате интегрирования по частям. Оценки показывают[4], что вклад следующего члена ряда имеет порядок $\frac{Z}{137}\frac{1}{(qR)^2}$ по сравнению с первым членом и при больших q пренебрежимо мал.

Видно, что интеграл в выражении (11) аналогичен рассмотренному в разделе 1 (5) с той разницей, что подынтегральная функция содержит дополнительные множители, которые и приводят к отличию от борновского случая. Здесь наряду с прежними полюсами плотности вида $x_s = R + i\epsilon(2s+1)\pi b$ содержатся и другие полюса, возникающие от $q_{эф}(x)$ и $G(x,\mu=\epsilon)$. Однако анализ показывает, что они расположены далеко от полюсов x_s и вклад их пренебрежимо мал. Кроме того, наличие функции $\Phi(x)$ в показателе экспоненты изменяет поведение подынтегральной функции на контуре $C^{(\epsilon)}$ (рис. 1). В этом случае интеграл на контуре $C^{(\epsilon)}$ стремится к нулю при выполнении условия

$$Re\{i\Phi(\rho e^{i\phi},\mu=\epsilon)\} < q\rho\left(\epsilon \sin\phi + \frac{1}{bq}\cos\phi\right); \quad -\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}; \quad \rho \to \infty .$$

Действительно, для ассимптотического значения фазы $\Phi \approx c\ln x$ это условие выполняется. Так же легко показать, что разность интегралов по мнимой оси ограничена сверху величиной $\approx \frac{1}{q^2} e^{-R/b}$. Таким образом, амплитуда (1) определяется опять полюсами плотности Ферми и равна:

$$f = 2Ze^2 E(u_f^* \cdot u_i) \frac{4\pi^2}{q} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \operatorname{Res} w(x_s, \mu=\epsilon), \tag{13}$$

где

$$\operatorname{Res} w(x, \mu=\epsilon) = -b\rho_0 \frac{G(x,\mu=\epsilon)}{q^2_{эф}(x, \mu=\epsilon)} \cdot x \cdot e^{i\epsilon qx + i\Phi(x,\mu=\epsilon)} .$$

При $R \gg b$ полученный ряд (13) сходится быстро из-за наличия экспоненциального "гасящего" множителя, и поэтому оказывается, что амплитуда определяется лишь первым, главным членом этого ряда ($s = 0$), который соответствует двум комплексно сопряженным полюсам ($x_0 = R \pm i\pi b$). Окончательный результат для сечения в этом случае имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \cdot \left| 4\pi^2 \rho_0 qb \sum_{\epsilon=\pm 1} x_0 \cdot \frac{G(x_0,\mu=\epsilon)}{q^2_{эф}(x_0,\mu=\epsilon)} e^{i\epsilon qx_0 + i\Phi(x_0,\mu=\epsilon)} \right|^2 . \tag{14}$$

Естественно, что в частном случае $b \to 0$ из формулы (13) должен получаться результат для случая амплитуды рассеяния с резким обрезанием плотности заряда ($b = 0$). Для этого следует сумму по s заменить интегралом по s, так как при $b \to 0$ полюса сплошь заполняют прямую, проходящую через точку $x = R$. Выполнив интегрирования, находим уже известное выражение, полученное ранее в работе [4]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \cdot \left| \frac{3q}{2R^3} \cdot \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{G(R,\mu=\epsilon)}{q^3_{эф}(R,\mu=\epsilon)} \left(R + i\epsilon \frac{1}{q_{эф}(R,\mu=\epsilon)}\right) \cdot e^{i\epsilon qR + i\Phi(R,\mu=\epsilon)} \right|^2 . \tag{15}$$

Приведем теперь необходимые для конкретных расчетов выражения для $G(x)$ и $q_{эф}(x)$, которые полностью определяются заданием модулирующего фактора $g(x)$ и искажения фазы $\Phi(x)$ [4]:

$$\Phi(x,\epsilon) = -\epsilon \frac{V(0)}{E} qx - \epsilon a(\tfrac{1}{2}qk^2 - \tfrac{1}{12}q^3)x^3 - \tfrac{1}{2}b(4k^2 - q^2)x^2 + \tfrac{1}{2}c(4k^2 - q^2)^2 x^4 ; \tag{16}$$

$$G(x,\epsilon) = \frac{q(1-\frac{V(0)}{E}) + 3\epsilon b q^2 x + aq(q^2-2k^2)x^2 - \frac{5}{2}\epsilon c q^2(4k^2-q^2)x^3}{q(1-\frac{V(0)}{E}) - aq(\frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}q^2)x^2 + \epsilon b(\frac{3}{2}q^2 - 2k^2)x + \epsilon c(k^2 - \frac{5}{4}q^2)\cdot(4k^2-q^2)x^3} \;;$$

$$q_{эф}(x,\epsilon) = \epsilon q(1-\frac{V(0)}{E}) - \epsilon aq(\frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}q^2)x^2 - b(4k^2-q^2)x + \frac{1}{2}c(4k^2-q^2)^2 x^3 \;;$$

$$q = 2k\,\mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{2}\,, \qquad \theta \text{ – угол рассеяния.}$$

Здесь

$$V(0) = -4\pi Ze^2\rho_0 \int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} = -2\pi Ze^2\rho_0 R^2[1 + \frac{\pi^2 b^2}{3R^2} + 0(\frac{b}{R})]\,,$$

$$a = \frac{1}{k^3}\cdot\frac{4\pi}{3}\,\frac{Ze^2\rho_0}{1+e^{-R/b}}\,, \tag{17}$$

$$b = \frac{1}{k^2}\pi Ze^2\rho_0 \int_0^\infty \frac{dx}{1+e^{\frac{x-R}{b}}} = \frac{1}{k^2}\,\pi Ze^2\rho_0 R[1 + \frac{b}{R}\ln(1+e^{-R/b})]\,,$$

$$c = \frac{1}{k^4}\,\frac{\pi Ze^2}{8}\rho_0\frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{x-R}{b}}\,dx}{x(1+e^{\frac{x-R}{b}})^2} \approx \frac{1}{k^4}\,\frac{\pi}{8}\,\frac{Ze^2\rho_0}{R}\left(\frac{\pi/4}{1-(2\frac{b}{R})^2}\right)^{1/2}.$$

4. Обсуждение

Отметим, что полученные результаты (формулы (4), (5)) справедливы при выполнении следующих условий: $E \gg V$, $qR \gg 1$. Практически это означает, что выражения для дифференциальных сечений (14), (15) можно использовать при сравнении с экспериментом в большом интервале углов ($\theta > \frac{1}{kR}$). Например, при рассеянии электронов на средних и тяжелых ядрах и $E = 200 \div 300$ Мэв имеем $\theta > \theta_0 \approx 30^\circ$. В качестве иллюстрации на рис. 2 – 4 приведено сравнение дифферен –

циальных сечений упругого рассеяния электронов на ядрах Ca (E = 250 Мэв), Co (E = 300 Мэв) и Bi (E = 300 Мэв), рассчитанных по фазовому анализу /7,8/ (сплошные кривые) и по приближенным формулам (8), (14), (15) (пунктирные кривые). Имеющиеся экспериментальные точки для Ca /7/ полностью укладываются на кривую фазового анализа и поэтому на рис. 2 не приведены. Из рисунков видно, что имеется хорошее совпадение точных вычислений с нашими расчетами. Небольшое расхождение кривых при больших углах, возможно, связано с тем, что здесь использованы приближенные выражения для $\Phi(x)$ и $g(x)$ /4/. Нами также было проведено численное исследование сходимости ряда в формуле (13). Как и следовало ожидать, вклад члена с $s = 1$ в сечение настолько мал, что на рисунках его изобразить практически невозможно. Кроме того, численные расчеты показали, что выражение (14) можно существенно упростить, если отбросить мнимые добавки в функциях $G(x)$ и $q_{эф}(x)$. Расчеты по найденной таким эмпирическим путем формуле существенно упрощаются, поэтому ей удобно пользоваться на практике. На рис. 5 дано сравнение кривых, рассчитанных по точной и упрощенной формуле. Видно, что разница между ними оказывается несущественной.

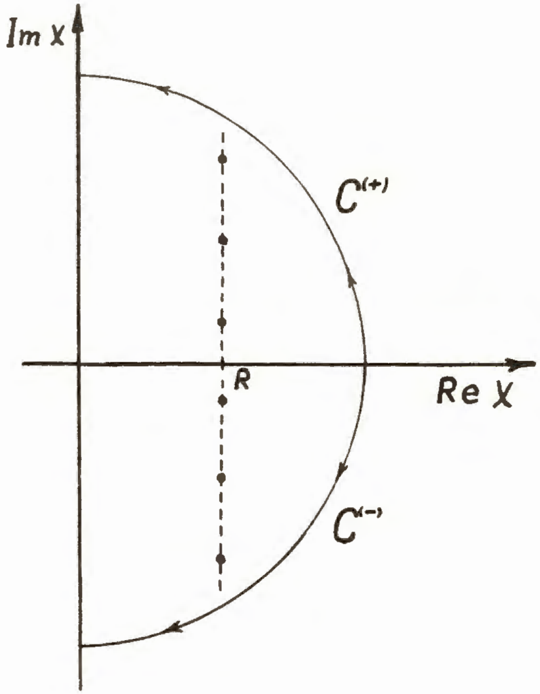
Итак, можно сделать вывод, что полученные здесь приближенные формулы хорошо описывают дифференциальные сечения упругого рассеяния электронов на средних и тяжелых ядрах, и ими удобно пользоваться для анализа экспериментальных данных, поскольку они явным образом зависят от параметров фермиевского распределения плотности заряда R и b.

В заключение отметим, что в этой работе всюду использовано фермиевское распределение плотности заряда. Этот подход, однако, нетрудно распространить на класс фермиево-подобных распределений ($\rho(x) = \rho_0 \left[1 + \exp\frac{x^n - R^n}{b^n}\right]^{-1}$), которые также можно использовать при сравнении с экспериментом.

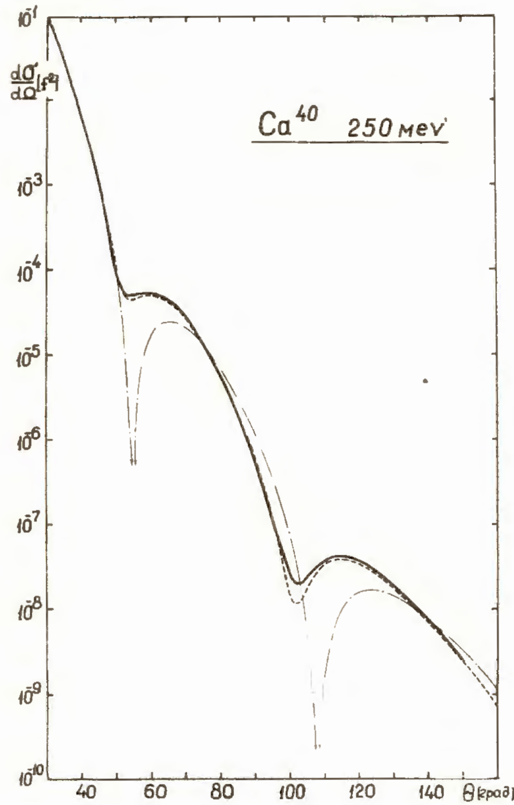
Литература

1. L.I.Schiff. Phys. Rev., 103, 443 (1956).
2. D.Saxon, L.J.Schiff. Nuovo Cimento, 6, 614 (1957).
3. A.Baker. Phys. Rev., 134, B240 (1964).
4. D.R.Yennie, F.L.Boos, D.C.Ravenhall. Phys.Rev., 137, B882 (1965).
5. R.J.Glauber. Lectures in Theoretical Physics, v.1, p.315, New York, 1959.
6. J.D.Walecka. Phys.Rev., 126, 653 (1962).
7. M.Croissiaux. et al., Phys. Rev., 137, B865 (1965).
8. R.Herman, B.C.Clark, D.G.Ravenhall. Phys. Rev., 132, 414 (1963).

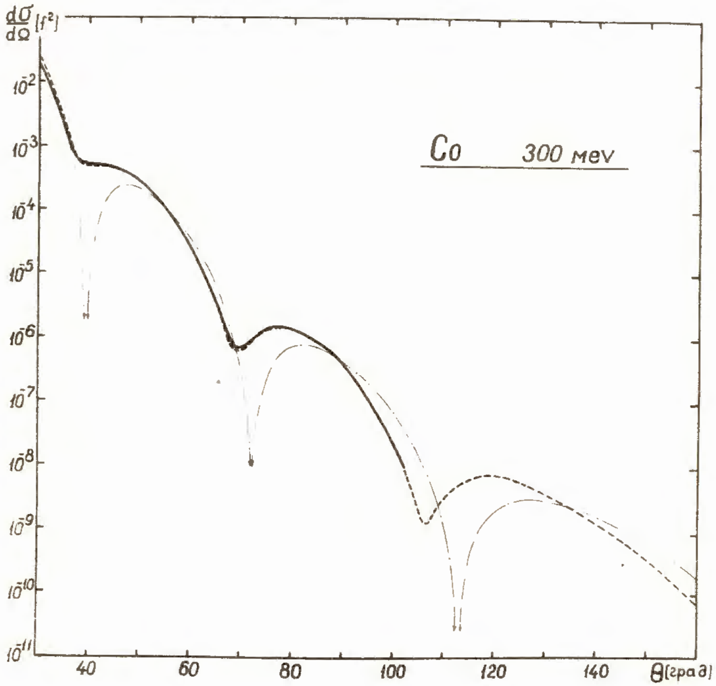
Рукопись поступила в издательский отдел
23 сентября 1965 г.



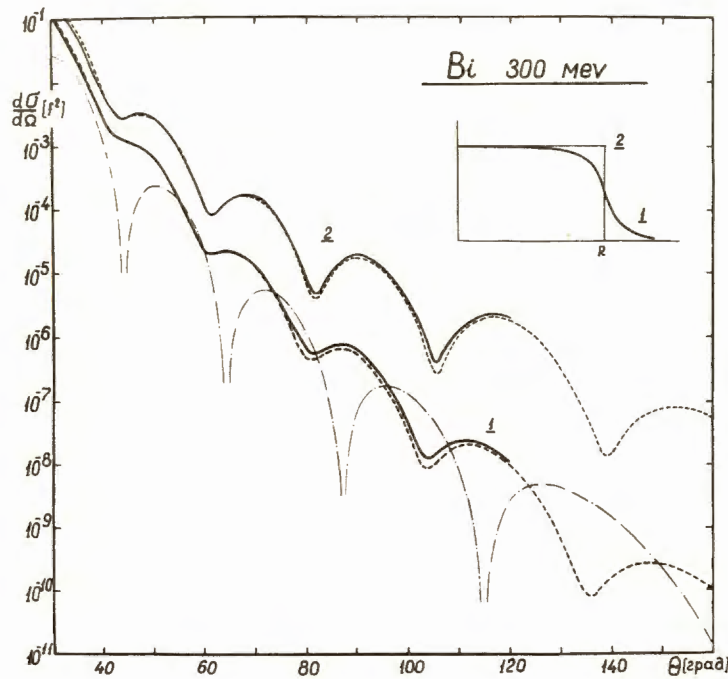
Р и с. 1



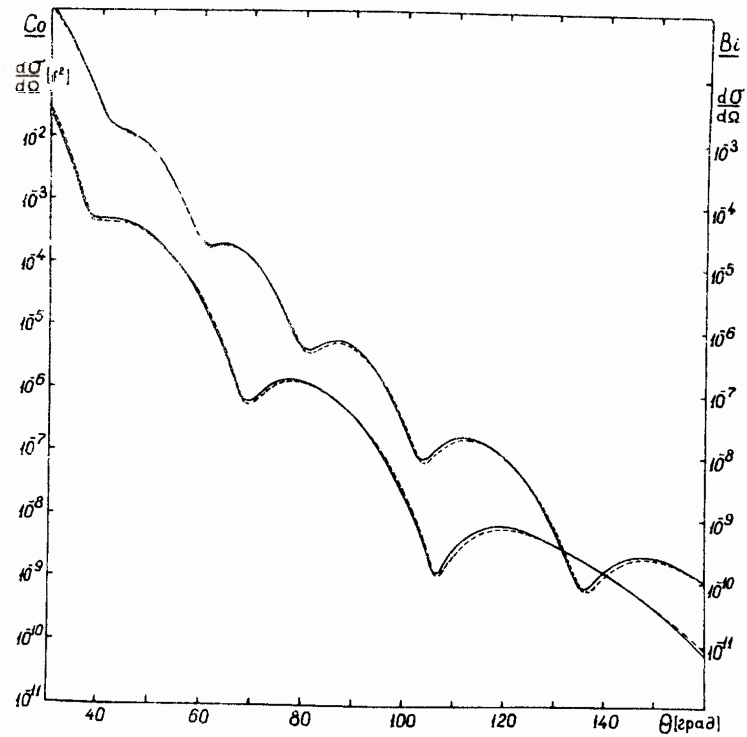
Р и с. 2. Упругое рассеяние электронов на Ca с ферми-распределением плотности заряда. $R = 3{,}6\,f$, $b = 0{,}576\,f$, $k = 1{,}27\,f^{-1}$. ——— фазовый анализ/7/; — — — — — расчет по формуле/14/; —·—·— борновское приближение, формула (8).



с. 3. Упругое рассеяние электронов на Co с ферми-распределением плотности заряда. R = 4,19 f , b = 0,52 f , k = 1,5204 f⁻¹. ——— фазовый анализ /8/; — — — — расчет по формуле (14); —·—·— борновское приближение, формула (8).



Р и с. 4. Упругое рассеяние электронов на Bi . Кривые 1 рассчитаны для ферми распределения плотности заряда. R = 6,64 f , b = 0,56 f , k = 1,5204 f⁻¹ . Кривые 2 – для ступенчатого распределения пл ности заряда. ——— фазовый анализ /8/; — — — — по формула (14), (15); —·—·— борновское приближение (8).



Р и с. 5. Сравнение расчетов упругого рассеяния электронов на Bi (E = 300 Мэв, верхние кривые) и Co (E = 300 Мэв, нижние кривые) по точной формуле (сплошные кривые) и по формуле с упрощенными $G(x)$ и $q_{эф}(x)$ (пунктирные кривые).