ДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ЕДОВАНИЙ

Р-2369

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.А. Мещеряков

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

1965

P-2369

В.А. Мещеряков

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

Введение

Задача о рассеянии π-мезонов на фиксированном нуклоне в двухчастичном приближении в условии унитарности описывается уравнениями Чу-Лоу /1/, которые имеют вид:

$$h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \left[\frac{\operatorname{Im} h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{A_{ij} \operatorname{Im} h_j(\omega')}{\omega' + \omega} \right] d\omega', \tag{1}$$

Здесь $h_i(\omega) = \dfrac{e^{i\delta_i(\omega)} \sin\delta_i(\omega)}{q^{2\ell+1} \quad u^2(q^2)}$, $\delta_i(\omega)$ – фаза рассеяния в состоянии с определенными значениями полного изотопического спина T и полного момента количества движения J, т.е. $i = (2T, 2J)$ ω – полная энергия мезона в системе ц.м., $\omega = \sqrt{q^2 + \mu^2}$ и μ (масса мезона) = 1, $u(q^2)$ – фурье-образ функции источника, A_{ij} – матрица перекрестной симметрии. Числа λ_i пропорциональны квадрату константы связи мезон-нуклонного взаимодействия и $A_{ij}\lambda_j = -\lambda_i$. Впервые уравнения (1) были получены, исходя из гамильтониана взаимодействия /2/

$$H_{int} = \sqrt{4\pi} \frac{f}{\mu} \int v(\vec{x})\, \tau_i (\vec{\nabla} \vec{\sigma})\, \phi_i(\vec{x})\, d\vec{x} \tag{2}$$

в котором мезоны взаимодействуют с источником только в состояниях с $\ell = 1$. Это приводит к тому, что взаимодействие в каналах (1,3) и (3,1) равны и индекс i принимает три значения $i = \{(1,1), (1,3) = (3,1), (3,3)\}$. Уравнения (1) без предположения о равенстве фаз (1,3), (3,1) можно получить на основе строго доказанных дисперсионных соотношений для πN-рассеяния, рассматривая их предел при M (масса нуклона) $\to \infty$. В этом случае индекс i принимает 4 значения, а уравнения для парциальных волн $h_i(\omega)$ переходят в (1) при добавочном предположении (1,3)=(3,1). Последний подход позволяет выписывать уравнения типа (1) не прибегая к конкретному виду гамильтониана взаимодействия. Существенно только указать квантовые числа "мезона" и источника: а также задаться спектром масс системы "мезон" + источник. При таком подходе физически различные задачи могут описываться одинаковыми уравнениями. Так, например, взаимодействие заряженных скалярных мезонов с источником

$$H_{int} = \sqrt{4\pi}\, g \int v(\vec{x})\,(\tau_1 \phi_2(\vec{x}) + \tau_2 \phi_1(\vec{x}))\, d\vec{x}$$

и нейтральных псевдоскалярных мезонов с источником

$$H_{int} = \sqrt{4\pi}\, \frac{f}{\mu} \int v(\vec{x})\,(\vec{\nabla}\vec{\sigma})\,\phi(\vec{x})\, d\vec{x}$$

приводятся к уравнению (1) с одинаковыми матрицами A_{ij} и числами λ_i, а отличаются только значениями ℓ, которые равны 0 и 1 соответственно. S – волны πN рассеяния также подчиняются уравнению с такой же матрицей A_{ij}, но числа $\lambda_i = 0$. Отсутствие полюсных членов связано с тем, что не существует линейного взаимодействия π мезоном с фиксированным нуклоном в S состоянии. Иногда уравнения для S волн πN рассеяния записывают с так называемым вычитанием, т.е. предполагают, что $|h_i(\omega)| \underset{\omega\to\infty}{\not\to} 0$. Тогда кроме полюсовых членов возникают полиномы по ω, удовлетворяющие соотношению

$$P_i(-\omega) = A_{ij} P_j(\omega).$$

Перечень примеров, в которых одному уравнению типа (1) соответствуют физически различные (разные гамильтонианы взаимодействия) задачи рассеяния, можно продолжить. Мы привели, как нам кажется, физически интересные случаи. Решения простейших уравнений типа (1) с заданными числами λ_i неоднозначны. При этом в ходе решения возникают функции, с помощью которых можно обеспечить наличие полюса по ω, поведение на бесконечности (полином $P_i(\omega)$). Поэтому первоначально целесообразно отвлечься от таких ограничений как наличие полюсов у функций $h_i(\omega)$ и поведение $h_i(\omega)$ на бесконечности. В такой постановке задача напоминает теорию эффективного радиуса в нерелятивистской задаче рассеяния. В обоих случаях речь идет об общем выражении для амплитуды рассеяния безотносительно к конкретному виду потенциала или гамильтониана взаимодействия. В теории эффективного радиуса на потенциал накладывается ограничение типа требования короткодействия в виде неравенства [3]

$$\int_0^\infty dr\, e^{\mu r}\, v(r) < \infty . \qquad \mu > 0 \tag{3}$$

Аналогичные условия, необходимые для вывода уравнений (1), были проанализированы при доказательстве дисперсионных соотношений [4]. Специфическими для каждой конкретной задачи являются

а) задание квантовых чисел "мезона" и источника, а также группы относительно которой инвариантно взаимодействие,

б) предположение о спектре масс системы "мезон" + источник,

в) предположение о росте функции $h_i(\omega)$ на бесконечности.

Условие а) позволяет установить вид матрицы перекрестной симметрии A_{ij}, а условия б) и в) фиксируют полюса и степень роста функций $h_i(\omega)$. Однако первоначально выделим общие свойства функций $h_i(\omega)$, которые позволяют установить зависимость $h_i(\omega)$ от ω и выяснить возникающий при этом произвол, подобно тому, как в теории эффективного радиуса устанавливается вид выражения

$$q^{2\ell+1} \operatorname{ctg}\delta_\ell(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{2n}$$

и область сходимости ряда /3/.

1. Постановка задачи

Из уравнения (1) следует, что

1) $h_i(\omega)$ – мероморфные функции комплексного переменного в плоскости с разрезами $(-\infty, -1], [+1, +\infty)$,

2) $h^*_i(\omega) = h_i(\omega^*)$,

3) $\operatorname{Im} h_i(\omega + i0) = q^{2\ell+1} u^2(q^2) \, | h_i(\omega + i0) |^2$,

где $h_i(\omega + i0) = \lim\limits_{\epsilon \to +0} h_i(\omega + i\epsilon)$, $\omega > 1$,

4) $h_i(-\omega) = A_{ij} h_j(\omega)$.

Для дальнейшего будет удобно вместо парциальных амплитуд рассматривать матричные элементы S матрицы. Поэтому введем помимо $h_i(\omega)$ следующие функции

$$S_i(\omega) = 1 + 2iq^{2\ell+1} u^2(q^2) h_i(\omega), \tag{4}$$

где $q = \sqrt{\omega^2 - 1}$ определим так, что $\sqrt{(\omega + i0)^2 - 1} > 0$ при $\omega > 1$. Тогда $q^*(\omega) = -q(\omega^*)$. Относительно функции $u(q^2)$ будем предполагать, что $u^*(\omega^2 - 1) = u(\omega^{*2} - 1)$. На языке гамильтониана взаимодействия (2) это предположение эквивалентно эрмитовости H_{int}. Будем предполагать также, что $u(q^2)$ – мероморфные функции. Тогда в функциях $S_i(\omega)$ помимо полюсов парциальных амплитуд $h_i(\omega)$ будут присутствовать полюса $u(q^2)$. Поскольку не оговаривалось наличие полюсов у $h_i(\omega)$, нет необходимости учитывать полюса $u(q^2)$ и первое свойство $h_i(\omega)$ целиком переносится на функции $S_i(\omega)$.

Свойство 2) парциальных амплитуд $h_i(\omega)$ также справедливо для функций $S_i(\omega)$, если учесть выбор ветви $q(\omega)$. Условие унитарности 3) приводит к тому, что

$$S_i(\omega + i0) = e^{2i\delta_i(\omega)} \quad \text{при} \quad \omega > 1$$

Для формулировки условия перекрестной симметрии матричных элементов $S_i(\omega)$ нужно знать некоторые свойства матрицы A, а именно, то что $\sum_j A_{ij} = 1$ для любого i. Ниже будет показано, что оно выполняется. Тогда с учетом того, что $q(-\omega) = q(\omega)$ условие 4) также переносится на функции $S_i(\omega)$ и окончательно имеем

1. $S_i(\omega)$ – мероморфные функции комплексного переменного в плоскости с разрезами $(-\infty, -1][+1, +\infty)$

II. $S^*_i(\omega) = S_i(\omega^*)$

III. $|S_i(\omega + i0)|^2 = 1, \ \omega > 1 \quad S_i(\omega + i0) = \lim_{\epsilon \to +0} S_i(\omega + i\epsilon)$

IV. $S_i(-\omega) = A_{ij} S_j(\omega)$

Ниже будут существенно использоваться свойства матриц A_{ij}. Остановимся на них подробнее.

2. Некоторые свойства матрицы перекрестной симметрии

Матрица перекрестной симметрии A_{ij} определена так

$$(P_i)_{rs} = A'_{ij} (P_j)_{sr}, \tag{5}$$

где P_i проекционный оператор на состояния с квантовыми числами, которые объединены в один индекс i, r и s – квантовые числа мезона до и после рассеяния. Операторы P_i имеют еще индексы, фиксирующие состояние источника. Они одинаковы в обеих частях уравнения (5) и поэтому не выписаны явно. Из полноты и ортогональности проекционных операторов следует, что

$$A^2 = E \tag{6}$$

$$\sum_j A_{ij} = 1 \tag{7}$$

$$\sum_i c_i A_{ij} = c_j \qquad \text{где} \qquad c_i = \mathrm{Spur}\, P_i . \tag{8}$$

Соотношения (6) – (8) не зависят от предположения о том, относительно какой группы инвариантно взаимодействие мезона с источника, или, что то же самое, относительно какой группы инвариантны проекционные операторы. Поэтому их недостаточно для построения матрицы A. Задавшись группой, относительно которой инвариантны P_i, можно разбить $(P_i)_{rs}$ на симметричные и антисимметричные относительно транспозиции индексов rs комбинации, которые дадут уравнения, недостающие для определения матрицы A. Эти уравнения имеют вид:

$$c_i^{(m)} A_{ij} = \pm c_j^{(m)} \tag{9}$$

и будут зависеть от группы. Ниже будем предполагать, что (9) инвариантны относительно группы вращений. Матричное уравнение (8) имеет множество решений, дискретного и континуального характера

$$A = U \left\| \begin{matrix} \pm 1, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & \pm 1, & 0, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0 & \ldots & \ldots & \pm 1 \end{matrix} \right\| U^{-1}$$

Дискретность множества связана с различными возможностями выбора ветвей $\sqrt{1}$. Всего здесь возможно $2^{n-1} - 1$ различных вариантов, где n – порядок матрицы. Континуальность множества определяется параметрами произвольной не особой матрицы U. В качестве примера рассмотрим построение матрицы U порядка n с одним антисимметричным вектором c_1 (9). Под этот случай подходят приведенные ниже матрицы с $n = 2, 3$. Матрица перекрестной симметрии A может быть представлена в виде:

$$A = E - 2 \left\| \begin{matrix} 1, & \alpha_1, & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \beta_1, & \alpha_1\beta_1, & \ldots & \alpha_{n-1}\beta_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n-1}, & \alpha_1\beta_{n-1}, & \ldots & \alpha_{n-1}\beta_{n-1} \end{matrix} \right\| \frac{1}{1 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\beta_{n-1}}, \tag{10}$$

где $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1})$, $\beta = (\beta_1 \ldots \beta_{n-1})$ – $(2n-2)$ параметров.

Уравнения (7) и (8) налагают на α два условия

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = -1, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}\alpha_i + c_1 = 0, \tag{11}$$

которые суть использования двух из $n-1$ симметричных комбинаций P_i. Добавив $n-3$ симметричных вектора $c\,A = c$, получим $n-1$ уравнений.

Единственный антисимметричный вектор $c\,A = -c$ дает n уравнений

$$\frac{1}{1+\alpha_1\beta_1+\dots+\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}\,(c_1+\alpha_1 c_2+\dots\dots+\alpha_{n-1}c_n)=c_1$$

$$\frac{\beta_1}{1+\alpha_1\beta_1+\dots+\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}\,(c_1+\alpha_1 c_2+\dots+\alpha_{n-1}c_n)=c_2 \tag{12}$$

$$\frac{\beta_{n-1}}{1+\alpha_1\beta_1+\dots+\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}\,(c_1+\alpha_1 c_2+\dots+\alpha_{n-1}c_n)=c_n,$$

из которых только $n-1$ линейно независимы.

Таким образом, для определения $2n-2$ параметров будем иметь $2n-2$ линейных уравнений. Для рассеяния мезонов с моментом ℓ на источнике с моментом $1/2$ или 1 матрицы перекрестной симметрии имеют вид:

$$A_{\ell,1/2}=E-\frac{2}{2\ell+1}\begin{Vmatrix}\ell+1, & -\ell-1\\ -\ell, & \ell\end{Vmatrix} \tag{13}$$

$$A_{\ell,1}=E-\frac{2}{1+\alpha_1\beta_1-\beta_2(1+\alpha_1)}\begin{Vmatrix}1, & \alpha_1, & -(1+\alpha_1)\\ \beta_1, & \alpha_1\beta_1, & -(1+\alpha_1)\beta_1\\ \beta_2, & \alpha_1\beta_2 & -(1+\alpha_1)\beta_2\end{Vmatrix} \tag{14}$$

$$\alpha_1=\frac{2\ell^3+3\ell+1}{(\ell+1)^2(2\ell-1)},\qquad \beta_1=\frac{1}{\ell+1},\qquad \beta_2=-\frac{\ell}{\ell+1}.$$

3. Риманова поверхность амплитуд рассеяния $h_i(\omega)$

Прежде чем находить общий вид парциальных волн $h_i(\omega)$, установим вид римановой поверхности функций $h_i(\omega)$, удовлетворяющих условиям 1) – 4). С помощью принципа симметрии Шварца и условия унитарности можно продолжить $h_i(\omega)$ на второй лист римановой поверхности амплитуды $h_i(\omega)$. Для этого представим условие унитарности в виде:

$$h_i(\omega-i0)=\frac{h_i(\omega+i0)}{1+2iq^{2\ell+1}u^2(q^2)\,h_i(\omega+i0)}. \tag{15}$$

Величина $2iq^{\ell+1}u^2(q^2)$ суть граничное значение аналитической функции $2i(z^2-1)^{\frac{\ell+1}{2}}u^2(z^2-1)$, т.е.

$$2iq^{\ell+1}u^2(q^2) = \lim_{\substack{z\to\omega+i0\\ \omega>1}} 2i(z^2-1)^{\frac{\ell+1}{2}}u^2(z^2-1). \qquad (16)$$

Тогда согласно принципу симметрии Шварца, аналитическая функция

$$h_l^{(2)}(z) = \frac{h_l(z)}{1+\phi(z)\,h_l(z)}, \qquad \text{где} \qquad \phi(z) = 2i(z^2-1)^{\frac{\ell+1}{2}}u^2(z^2-1) \qquad (17)$$

есть аналитическое продолжение через нижний берег разреза $[+1,+\infty)$ на второй лист римановой поверхности функции $h_l(z)$. Аналогично получается, что продолжение через нижний берег второго листа римановой поверхности $h_l(z)$ определяется формулой

$$\frac{h_l^{(2)}(z)}{1-\phi(z)\,h_l^{(2)}(z)}. \qquad (18)$$

Действительно, на втором листе верно, что

$$h_l^{(2)*}(z) = h_l^{(2)}(z^*),$$

как непосредственно следует из (17). Ясно, что обходя дважды точку $z=+1$, мы вернемся к первоначальному значению функции $h_l(z)$. Таким образом, из условия унитарности следует, что точка $z=+1$ суть точка ветвления функций $h_l(z)$ первого порядка $(\approx\sqrt{z-1})$.

Отсюда немедленно вытекает, что точка $z=-1$ также является точкой ветвления первого порядка $(\sqrt{z+1})$, ибо соотношение перекрестной симметрии выражает $h_{l_0}(-z)$ через $h_l(z)$. Окончательно, риманова поверхность функций $h_l(z)$ в точках $z=\pm 1$ двулистна. Для выяснения характера ветвления функций $h_l(z)$ на бесконечности необходимо обойти точки ± 1 одновременно. Если на правом разрезе $[+1,+\infty)$ справедливо условие унитарности 3), то на левом разрезе его нет и функции $h(-z)$ определяются с помощью условия перекрестной симметрии. Поэтому одновременный обход точек ± 1 совершается с использованием условий 3) и 4). На таком пути в работе (5) было показано, что точка $z=\infty$ является точкой ветвления логарифмического типа, точнее, что на бесконечности соединяются все листы римановой поверхности. Тип ветвления на бесконечности может быть установлен следующим образом. Разобьем функции $h_l(\omega)$ на симметричные $h_{sl}(\omega)$ и антисимметричные $h_{al}(\omega)$ части по отношению к ω. Тогда

$$h_{ai}(\omega) = A_{ij}\, h_{aj}(\omega)\,, \qquad h_{ai}(\omega) = A_{ij}\, h_{aj}(\omega)\,.$$

Ясно, что каждая из парциальных волн не обладает определенной симметрией по отношению к переменной ω. Используя это, найдем общее решение уравнения (17). Уравнения (17) могут быть легко линеаризованы и приведены к виду:

$$\frac{1}{h_i^{(2)}(z)} = \frac{1}{h_i(z)} + \phi(z). \tag{19}$$

Далее, тот факт, что $h_i(z)$ в точках ± 1 имеют первый порядок ветвления можно реализовать с помощью конформного преобразования $z = \dfrac{2\zeta}{1+\zeta^2}$ /6/. При этом предполагается, что на бесконечности нет точки ветвления. В случае ее наличия функции $h\,[z(\zeta)]$ будут в точках $\zeta = \pm i$ иметь особенности. При таком преобразовании переход на второй лист через правый разрез означает, что

$$\zeta \to \frac{1}{\zeta^*} \qquad 0 < \arg\zeta < \pi/2, \quad \frac{3\pi}{2} \le \arg\zeta \le 2\pi\,, \qquad h^{(2)}(\zeta) \to h(1/\zeta^*)\,.$$

Условие перекрестной симметрии будет по-прежнему линейно, так как

$$z(\zeta) = -z(-\zeta)\,,$$

но уравнение унитарности содержит нелинейную операцию инверсии

$$\frac{1}{h(1/\zeta^*)} = \frac{1}{h(\zeta)} + \varphi\,[z(\zeta)]\,.$$

Уравнение унитарности (19) приводится к линейному неоднородному функциональному уравнению с помощью конформного преобразования:

$$w = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,Sin}\,\omega\,. \tag{20}$$

Известно, что функция $w(z)$ при $z = \pm 1$ имеет точки ветвления первого порядка и логарифмическую точку ветвления на бесконечности.

Физический лист римановой поверхности $h(\omega)$ переходит при этом в полосу $|\mathrm{Re}\,w| < 1/2$. Правый разрез $[+1, +\infty)$ отобразится в линию $\mathrm{Re}\,w = 1/2$, левый – в линию $\mathrm{Re}\,w = -1/2$. В силу нечетности функции $w(z)$ условие перекрестной симметрии в плоскости имеет прежний вид. Легко видеть, что, поскольку

$$w + w^* = 1 \tag{21}$$

суть уравнение правого разреза в плоскости z, аналитическое продолжение через правый разрез осуществляется заменой $w \to 1 - w$. Тогда уравнение унитарности (19) в переменной w имеет вид

$$F(1-w) = F(w) + \phi(w)\,, \tag{22}$$

где $F(w) = \dfrac{1}{h[z(w)]}$; $\phi(w) = \phi[z(w)]$.

Функция $q(z)$ в переменной w равна

$$q[z(w)] = i \operatorname{Cos} \pi w$$
$$z = \operatorname{Sin} \pi w \,. \tag{23}$$

Поэтому

$$\phi(w) = (-1)^{\ell+1} (\operatorname{Cos} \pi w)^{2\ell+1} u^2(-\operatorname{Cos}^2 \pi w). \tag{24}$$

Легко видеть, что

$$\phi(w) = \phi(-w)$$
$$\phi(1-w) = -\phi(w). \tag{25}$$

Воспользовавшись соотношениями (25), можно найти частные решения неоднородного уравнения (22), обладающие определенной симметрией по w . Ими будут

$$-2 F_{os}(w) = \phi(w); \qquad -\cancel{2}F_{oa}(w) = w\,\phi(w) \tag{26}$$

Разность $F_{os}(w) - F_{oa}(w)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению. Общее решение уравнения (22) запишем в виде:

$$F(w) = g(w) + a\, F_{os}(w) + (1-a)\, F_{oa}(w) \tag{27}$$

$$g(1-w) = g(w). \tag{28}$$

Мы явно выделили частное решение уравнения (28) $a[F_{os}(w) - F_{oa}(w)]$. Из решения (27) ясно видно, что если $F(w)$ не обладает симметрией по w , то функция $F(w)$ содержит переменную w . На языке амплитуд рассеяния $h_i(\omega)$ последнее означает, то риманова поверхность функции $h_i(\omega)$, вообще говоря, бесконечнолистна и точки ветвления $\underline{+}1$ – первого порядка, а бесконечно удаленная точка – логарифмическая. Исключение составляет, например, простейший случай одной симметричной функции, когда выражение (27) приводится к виду:

$$h(\omega) = \frac{1}{a(\omega) - i q^{2\ell+1} u^2(q^2)}, \qquad a(\omega) = a(-\omega) \text{ – мероморфная функция}$$

4. Аналитическое продолжение функций $S_i(z)$ и их некоторые свойства

Установив вид римановой поверхности амплитуд рассеяния $h_i(z)$, а значит и функций $S_i(z)$ (см. определение (4)), можно решить вопрос об аналитическом продолжении функций $S_i(z)$ с первого листа на любой. Прежде всего продолжение на второй лист очевидно следует из II и III

$$S_i^{(2)}(z) = \frac{1}{S_i(z)} .$$

Для продолжения функций $S_i(z)$ на все листы римановой поверхности удобнее перейти к переменной w и сформулировать свойства функций $S_i(w)$ в матричном виде. Введем столбец

$$S(w) = \left\| \begin{matrix} S_1(w) \\ S_2(w) \\ \cdots\cdots \\ S_n(w) \end{matrix} \right\| . \qquad (29)$$

Обозначим через I такую нелинейную операцию, что

$$IS(w) = \left\| \begin{matrix} 1/S_1(w) \\ 1/S_2(w) \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1/S_n(w) \end{matrix} \right\| . \qquad (30)$$

Тогда условия I–IV принимают следующий вид:

I′) $S(w)$ столбец мероморфных в плоскости w функций,

II′) $S^*(w) = S(w^*)$,

III′) $IS(w) = S(1-w)$,

IV′) $S(-w) = A\,S(w)$.

Поясним условие III′, которое есть следствие унитарности III. Для каждого i имеем, что в переменной w

$$S_i(w)\, S_i(1-w) = 1, \qquad \frac{1}{S_i(w)} = S_i(1-w).$$

Комбинируя свойства III и IV, непосредственно получаем, что

$$AI\,S(w) = S(w-1), \qquad IAS(w) = S(w+1).$$

Повторяя эту операцию "n" раз, приходим к выражениям

$$(AI)^n S(w) = S(w-n) \qquad (31)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$(IA)^n S(w) = S(w+n) \qquad (32)$$

Таким образом, зная значения функции $S(w)$ в полосе $|\mathrm{Re}\, w| \le 1/2$, можно с помощью соотношений (31) и (32) продолжить ее на всю плоскость. Геометрически способ аналитического продолжения вдоль прямых, параллельных линий $\mathrm{Im}\, w = 0$, проводимый с помощью операторов $(AI)^n$ и $(IA)^n$, изображен на рис. 1, 2. Через w_n^1 обозначена точка, аналитическое продолжение в которую осуществляется оператором I, w_{n+1} точки, в которую переходит w_n' после действия оператора A. Очевидно, что $w_n - w_0 = -n$.

Аналогично w_n' на рис. 2 обозначает точку, в которую переходит w_n при действии оператора A, а w_{n+1} - точку, в которую переходит w_n' после действия оператора I. Оператор $(AI)^n$ есть оператор продолжения влево на полосу $|\mathrm{Re}(w+n)| \le 1/2$, а оператор $(IA)^n$ на полосу $|\mathrm{Re}(w-n)| \le 1/2$. Очевидно, что $(AI)(IA) = E$. Если первоначально вы предполагаете выполнение условий I'-IV') только для первого листа римановой поверхности то легко показать, что они справедливы для всей плоскости w. Действительно, подействуем оператором $(AI)^n$ на уравнение условия

$$\mathrm{IV'}), \quad (AI)^n S(-w) = (AI)^n AS(w)$$

тогда

$$(AI)^n S(-w) = A(IA)^n S(w)$$

и из (31) и (32) вытекает, что

$$S(-w-n) = A\, S(w+n). \tag{33}$$

В переменной z уравнения (31) - (33) записывается так

$$(AI)^n \quad S_0(z) = S_{-n}(z) \tag{31'}$$

$$(IA)^n S_0(z) = S_n(z) \tag{32'}$$

$$S_{-n}(z) = AS_n(z), \tag{33'}$$

где $S_0(z)$ функции на физическом листе, а $S_{\pm n}(z)$ - значения этих функций на "n" -ых листах "над" и "под" физическим листом соответственно.

Подобно тому, как из решения уравнения унитарности (10) были установлены некоторые свойства функций $h_i(z)$, исходя из условия III' можно установить вид столбца $S(w)$. Для каждого элемента столбца имеем, что $S_i(w) S_i(1-w) = 1$.

Введем новую функцию $g_i(w) = \ln S_i(w)$, где под логарифмом понимаем ту ветвь этой многозначной функции, для которой $[\ln S_i(w)]^* = [\ln S_i(w^*)]$.
На луче $\mathrm{Im}\, w > 0$, $\mathrm{Re}\, w = 1/2$ функция $g_i(w)$ выражается через фазы рассеяния $\delta_i(\omega)$ следующим образом :

$$g_i(w) = 2i\,\delta_i[\omega(w)].$$

Функции $g_i(w)$ подчиняются уравнению

$$g_i(w) + g_i(1-w) = 0. \qquad (34)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$g_i(w) = \Delta_i(w-½), \qquad \Delta_i(w) = -\Delta_i(-w). \qquad (35)$$

Поэтому столбец функций $S(w)$ представим в форме

$$S(w) = \left\| \begin{matrix} \ell^{\Delta_1(w-½)} \\ \ell^{\Delta_2(w-½)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \ell^{\Delta_n(w-½)} \end{matrix} \right\|, \qquad (36)$$

где каждая из функций $\Delta_i(w)$ антисимметрична по своему аргументу. На линии $\mathrm{Re}\,w=½$ все функции $\Delta_i(w-½)$ чисто мнимые и выполняется условие унитарности. На всей же остальной плоскости w значения функций $\Delta_i(w-½)$, вообще говоря, комплексны. Условие действительности функций

$$g_i^*(w) = g_i(w^*) \qquad (36)$$

позволяет установить свойства четности фаз рассеяния, а именно

$$\mathrm{Re}\ \Delta_i(u,v) = \mathrm{Re}\ \Delta_i(u,-v)$$

$$\mathrm{Im}\ \Delta_i(u,v) = -\mathrm{Im}\ \Delta_i(u,-v)$$

$$\Delta_i(u,v) = \Delta_i(u+iv-½), \qquad 2\delta_i[\omega(½+iv)] = \mathrm{Im}\ \Delta_i(0,v).$$

Унитарность столбца $S(w)$ не накладывает связей на функции Δ_i. Такие связи устанавливаются требованием перекрестной симметрии IV′.

Условие унитарности III′ позволяет упорядочить множество полюсов и нулей мероморфной функций $S_i(w)$. Для этого заметим, что функция $\Delta_i(w)$ (35) может быть представлена в виде:

$$\Delta_i(w) = \ell n\,\frac{w+a^i}{w-a^i} + \Delta_{ia}(w). \qquad (37)$$

где $\Delta_{ia}(w)$ уже не содержит особенностей в точках $\pm a$. При конечном числе нулей и полюсов $S_i(w)$ или, что то же самое, логарифмических точек ветвления $\Delta_i(w)$ конечным числом шагов функция $\Delta_i(w)$ приводится к сумме

$$\Delta_i(w) = \sum_{n=1}^{N_i} \ln \frac{w + a_n^i}{w - a_n^i} . \qquad (38)$$

Каждое из слагаемых в отдельности подчиняется условию унитарности. Из уравнения (36) следует, что множество a_n^i симметрично относительно действительной оси плоскости w. Любая пара слагаемых из суммы (38), для которой $a_{n_1}^i = a_{n_2}^{i\,*}$, удовлетворяет условию действительности (36). Множество нулей и полюсов $S_i^1(w)$ имеют одинаковое число элементов. При бесконечном числе нулей и полюсов $S_i(w)$ симметрия этих множеств относительно действительной оси w сохраняется и можно утверждать, что

$$S_i(w) = \pm \frac{\phi_i(w)}{\phi_i(1-w)} , \qquad (39)$$

где $\phi_i(w)$ некоторая целая функция $\phi^*_i(w) = \phi_i(w^*)$.

Ниже для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда каждое из N_i конечно, тогда

$$S_i(w) = \prod_{n=1}^{N_i} \frac{w - a_n^i}{w - (1 - a_n^i)} \qquad (40)$$

$$a_n^i = ½ - a_n^i .$$

Предположим далее, что все a_n^i действительны[x)]. Такое предположение можно сделать, исходя из уже известного общего решения для матрицы $A_{\ell,½}$ /7/. Способ введения комплексных полюсов будет обсужден далее. Разобьем каждое из множеств N_i на две части. В первую $(N_i)_1$ включим все элементы, для которых выполняется равенство

$$(1 - a_{n_1}^i) = -(1 - a_{n_2}^i) , \qquad a_{n_1}^i + a_{n_2}^i = 2 , \qquad (41)$$

а остальные объединим в $(N_i)_2$. После этого для $S_i(w)$ имеем

$$S_i(w) = \prod_n^{(N_i)_1} \frac{w^2 - 2w + a_n^i(2 - a_n^i)}{w^2 \& - (1 - a_n^i)^2} \prod_n^{(N_i)_2} \frac{w - a_n^i}{w - (1 - a_n^i)} . \qquad (42)$$

Не нарушая условия унитарности, домножим каждое из произведений $(N_i)_2$ на множители $\frac{w + (1 - a_n^i)}{w + (1 - a_n^i)}$, т.е.

$$S_i(w) = \prod_n^{(N_i)_1} \frac{w^2 - 2w + a_n^i(2 - a_n^i)}{w^2 - (1 - a_n^i)^2} \prod_n^{(N_i)_2} \frac{w^2 + w(1 - 2a_n^i) - a_n^i(1 - a_n^i)}{w^2 - (1 - a_n^i)^2} . \qquad (43)$$

x) Это предположение не используется в разделе 5.

Составим теперь наименьшее общее кратное для многочленов $D_1^{(1)} = \prod_n^{(N_1)_1} [w^2 - (1 - a_n^1)^2]$, $D_2^{(1)} = \prod_n^{(N_1)_2} [w^2 - (1 - a_n^1)^2]$ в отдельности. Обозначим их через D_1 и D_2 соответственно. Домножим теперь числители и знаменатели каждой из $S_1(w)$ на полиномы $\frac{D_1}{D_1^{(1)}}$ и $\frac{D_2}{D_2^{(1)}}$. После сделанных преобразований вся функция $S_1(w)$ имеет вид:

$$S_1(w) = \frac{N_1(w)}{D(w)} \qquad D(w) = D_1(w)\, D_2(w), \tag{44}$$

где по построению $D(w) = D(-w)$ и степени всех $N_1(w)$ одинаковы. Поскольку функции $S(w)$ должны удовлетворять уравнению перекрестной симметрии, то

$$N_1(-w) = A_{1j}\, N_j(w). \tag{45}$$

Столбец функций $N(w)$ можно представить в другой форме, где выполнение условия перекрестной симметрии более очевидно. Для этого введем систему собственных векторов матрицы A и обозначим их через ψ_m, так что

$$A\psi_m = (-1)^m \psi_m. \tag{46}$$

Уравнение (7) означает, что среди ψ_m будет собственный вектор вида:

$$\psi_0 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\|$$

который обозначим через ψ_0. Если $\phi_m(w)$ суть n таких полиномов, что $\phi_m(w) = (-1)^m \phi_m(-w)$, то легко видеть, что

$$N(w) = \sum_{m=1}^{n} \phi_m(w)\, \psi_m \tag{47}$$

удовлетворяет условию перекрестной симметрии. Таким образом, можно утверждать, что функция $S(w)$ представима в форме:

$$S(w) = \frac{1}{D(w)} \sum_{m=1}^{n} \phi_m(w)\, \psi_m, \tag{48}$$

где $D(w)$, $\phi_m(w)$ суть полиномы по w. Максимальная степень полиномов $\phi_m(w)$ совпадает со степенью полинома $D(w)$. Коэффициенты при этих степенях равны I по построению. Поэтому полином $\phi_0(w)$ имеет степень, одинаковую со степенью полинома $D(w)$. Из условия унитарности следует, что

$$D(w)\, D(1-w) = \left[\sum_{m=1}^{n} \phi_m(w)\, (\psi_m)_i\right]\left[\sum_{m=1}^{n} \phi_m(1-w)(\psi_m)_i\right] \tag{49}$$

для всех i.

5. Построение матричных элементов $S_i(w)$ с конечным числом особенностей

Проведенное выше изучение общих свойств столбца функций $S(w)$ и окончательное уравнение (49) не дают способов определения степени полинома $D(w)$, построения функций $\phi_m(w)$ и векторов ψ_m. Остановимся на этих вопросах, ограничиваясь случаем конечной степени $D(w)$. В этом случае уравнение (48) определяет функции $S_i(w)$ в виде сократимой, вообще говоря, рациональной функции. Производя возможные сокращения, возвращаемся к исходной формуле (40), которую перепишем в виде:

$$S_i(w) = \frac{w^{N_i} + \tilde{b}_1^{(i)} w^{N_i-1} + \dots + \tilde{b}_{N_i}^{(i)}}{w^{N_i} + a_1^{(i)} w^{N_i-1} + \dots + a_{N_i}^{(i)}} . \tag{50}$$

Отсюда ясно, что любая из функций $S_i(w)$ представима в виде суммы правильной несократимой рациональной функции и единицы

$$S_i(w) = 1 + \frac{b_1^{(i)} w^{N_i-1} + \dots + b_{N_i}^{(i)}}{w^{N_i} + a_1^{(i)} w^{N_i-1} + \dots + a_{N_i}^{(i)}} . \tag{51}$$

Так как каждое из N_i конечно, то и множество всех полюсов функций $S_i(w)$ конечно. Выберем из него полюс с максимальным значением модуля, т.е. пусть $R = \max\{|1 - a_n^{(i)}|\}$. Тогда в области $|w| > R$ каждая из функций не имеет особенностей и может быть разложена в ряд по обратным степеням w или $w - \alpha$. Предположим для определенности, что $|\alpha| < R$. Если $|\alpha| > R$, то все рассуждения будут справедливы в области $|w| > |\alpha| + R$. Известно, что такое разложение единственно. Покажем это прямым вычислением. Пусть

$$S_i(w) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(i)}}{w^{n+1}} \tag{52}$$

и ряд (52) абсолютно и равномерно сходится вне круга радиуса R. Ниже для простоты опустим индекс i. Тогда из (51) и (52) имеем

$$b_1 w^{N-1} + b_2 w^{N-2} + \dots + b_N^{*} = \\ = (w^N + a_1 w^{N-1} + \dots + a_N)\left(\frac{\alpha_0}{w} + \frac{\alpha_1}{w^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{w^{n+1}} + \dots\right) . \tag{53}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, получим бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, \dots\dots \alpha_n, \dots\dots$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = b_1\\
&\alpha_0 a_1 + \alpha_1 = b_2\\
&\alpha_0 a_2 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 = b_3\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_0 a_k + \alpha_1 a_{k-1} + \dots\dots + \alpha_k = b_{k+1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_0 a_{N-1} + \alpha_1 a_{N-2} + \dots + \alpha_{N-1} = b_N\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_q a_N + \alpha_{q+1} a_{N-1} + \dots\dots + \alpha_{q+N} = 0 \qquad q \geq 0
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Бесконечная система линейных уравнений (54) может быть решена. Определяя α_0 из первого уравнения, из второго найдем α_1, из третьего α_2 и т.д. до α_{N-1}. Все последующие α_g, начиная с α_N, являются линейными комбинациями N предыдущих неизвестных, так как последнее из выписанных в (54) уравнений представимо в виде:

$$
\alpha_g = \sum_{q=1}^{N} (-a_q)\, \alpha_{g-q} \qquad g \geq N . \tag{55}
$$

Таким образом, имея числа $b_1, b_2, \dots b_N$ и $a_1, a_2, \dots a_N$ можно построить бесконечный ряд $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ по формулам (54). Условие (55) лучше всего выразить с помощью так называемой бесконечной ганкелевой матрицы

$$
S = \left\| \begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n \dots \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \dots \alpha_{n+1} \dots \\ \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots \alpha_{n+2} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix} \right\| = \| \alpha_{i+k} \|_0^{\infty} \tag{56}
$$

Рассмотрим последовательность детерминантов главных миноров, $D_r = | \alpha_{i+k} |_0^{r-1}$. Уравнение (55) означает, что каждый элемент любой из строк с номером большим $N+1$ есть линейная комбинация N вышестоящих элементов. Иначе говоря, каждая из строк ганкелевой матрицы $\|\alpha_{i+k}\|_0^{\infty}$ есть линейная комбинация предыдущих N строк. Это означает, что в детерминантах $D_{N+1} = | \alpha_{i+k} |_0^{N}$, $D_{N+2} = | \alpha_{i+k} |_0^{N+1} \dots$ каждая из последних строк есть линейная комбинация N предыдущих, т.е.

$$
D_{N+1} = D_{N+2} = \dots = D_r = 0 \quad r > N \qquad D_N \neq 0 .
$$

Будем называть бесконечную ганкелеву матрицу $\| \alpha_{i+k} \|_0^{\infty}$ матрицей конечного ранга N, если $D_r = 0$, $r > N$, $D_N \neq 0$. Из построения видно, что ранг ганкелевой матрицы S совпадает со степенью полинома знаменателя правильной рациональной дроби (51).

Таким образом, каждой из функций $S_i(w)$ можно однозначно поставить в соответствие бесконечную ганкелеву матрицу $S^{(i)} = \| a^{(i)}_{m+n} \|_0^\infty$ конечного ранга N_i. Ранг ганкелевой матрицы S^i совпадает с числом полюсов функции $S_i(w)$, считая их столько раз, какова их кратность /8/.

Пользуясь этим утверждением видим, что для построения функции $S_i(w)$ достаточно вычислить первые $2N_i - 1$ из коэффициентов разложения (52), а затем по формулам (54) восстановить числа $b_1, b_2 \dots b_N, a_1 \dots a_N$, т.е. функции $S_i(w)$ в виде (50) или (51).

Из изложенного очевидно, что аналогичные результаты можно получить, используя разложение по обратным степеням $w - a$, где a любое фиксированное число. Однако случай $a = 0$ особенно удобен тем, что условие перекрестной симметрии налагает на коэффициенты $a_n^{(i)}$ простые ограничения. Подставляя разложение (52) в условие перекрестной симметрии IV' и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $1/w$, получаем, что

$$A_{ij}\, a_n^{(j)} = (-1)^{n+1} a_n^{(i)} . \tag{57}$$

Остается выяснить, какие ограничения на коэффициенты $a_n^{(i)}$ налагает условие унитарности.

Условие унитарности справедливо для каждой функции $S_i(w)$ в отдельности. Поэтому уравнения для коэффициентов $a_n^{(i)}$ не будут зависеть от индекса i и для простоты его можно опустить. Рассмотрим функцию $S(1-w)$. Для нее имеем разложение

$$S(1-w) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(1-w)^{n+1}} . \tag{58}$$

Перестроим ряд (58) к переменной $1/w$. Возьмем очевидную формулу

$$\frac{1}{a - w} = (-1) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^p}{w^{p+1}} \tag{59}$$

и продифференцируем ее "n" раз. Тогда получаем, что

$$\frac{1}{(a - w)^{n+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{p=n}^{\infty} \frac{C_p^n\, a^{p-n}}{w^{p+1}} , \tag{60}$$

где $C_p^n = \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}$ для $n \le p$. Если принять, что при $n > p$ $C_p^n = 0$ и $C_n^0 = C_n^n = 1$, то выражение (60) нижний предел можно всегда положить равным 0. Подставляя (60) при $a=1$ в разложение (58) получаем повторный ряд:

(58)

$$S(1-w) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} C_p^n}{w^{p+1}} . \tag{61}$$

Изменим в формуле (61) порядок суммирования, тогда

$$S(1-w) = 1 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{w^{p+1}} \sum_{n=0}^{p} (-1)^{n+1} C_p^n a_n$$

$$S(1-w) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{w^{n+1}}, \quad a'_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} C_n^p a_p . \tag{62}$$

Отсюда легко увидеть, что каждый из коэффициентов разложения $S(1-w)$ по обратным степеням w выражается через коэффициенты не большего номера разложения $S(w)$ в аналогичный ряд. Этот факт хорошо иллюстрируется на языке линейной алгебры. Последовательность функции $\ell_n = \{\frac{1}{w}, \frac{1}{w^2}, \dots \frac{1}{w^n} \dots\}$ является бесконечным базисом для любой правильной рациональной функции, так как уравнение (54) позволяет однозначно вычислить коэффициенты $a_0, a_1 \dots a_n \dots$ для каждой рациональной функции. Как уже отмечалось выше, таким же базисом будет и последовательность функций $\ell'_n = \{\frac{1}{1-w}, \frac{1}{(1-w)^2} \dots \frac{1}{(1-w)^n} \dots\}$. Матрица перехода от базиса ℓ' к базису ℓ имеет вид:

$$C = \left\| \begin{matrix} -1, & -1, & -1, & -1, & \dots\dots \\ 0, & C_1^1, & C_2^1 & C_3^1, & C_4^1 & \dots\dots \\ 0, & 0, & -C_2^2, & -C_3^2 & -C_4^2, & \dots\dots \\ 0, & 0, & 0, & C_3^3, & C_4^3, & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & (-1)^{n+1} C_n^n & , (-1)^{n+1} C_{n+1}^n & \dots\dots \end{matrix} \right\| \tag{63}$$

Координаты β любого вектора в старом базисе выражаются через координаты β' этого же вектора в новом базисе известным соотношением

$$\beta = C'\beta' . \tag{64}$$

Функции $S(w)$ и $S(1-w)$ являются векторами с одними и теми же координатами $a_0, a_1 \dots a_n \dots$, но в разных базисах ℓ_n и ℓ'_n. Координаты вектора $S(1-w)$

в базисе ℓ_n вычисляются с помощью транспонированной матрицы C', которая является нижней треугольной бесконечной матрицей. Ясно, что каждая из них будет содержать a_n лишь с меньшими индексами n. Обозначая координаты вектора $S(1-w)$ в базисе ℓ_n через a', можно переписать уравнение (62) в матричной форме:

$$a' = C' a . \tag{65}$$

В этом месте можно выяснить важное преимущество разложения (62). Будем вместо него использовать разложение в окрестности нуля, т.е.

$$S_1(w) = \sum_{n=-N_1-1}^{\infty} \beta_n^{(1)} w^{n+1} . \tag{66}$$

Здесь N_1 – порядок полюса $S_1(w)$ в нуле. Ряд (66) сходится в некотором кольце и для $\beta_n^{(1)}$ можно получить результаты, аналогичные соотношениям (54). Но при этом каждый коэффициент разложения $S_1(1-w)$ по степеням w^{n+1} будет выражаться через все коэффициенты $\beta_n^{(1)}$ с большими номерами. Действительно, переход от базиса $1, 1-w, (1-w)^2 \ldots$ к базису $1, w, w^2, \ldots$ задается нижней треугольной матрицей и утверждение очевидно.

Подставим теперь разложение (52) и (62) в условие унитарности III'. Получим следующее равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w^{n+1}} (a_n + a'_n) + \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_m a'_n}{w^{m+n+2}} = 0 . \tag{67}$$

Приравнивая в (67) к нулю коэффициенты при одинаковых степенях, имеем:

$$\begin{aligned} & a_n + a'_n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m a'_{n-m-1} = 0 \\ & a'_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} C_n^p a_p . \end{aligned} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{68}$$

Уравнения (68) накладывают ряд ограничений на коэффициенты a. Выпишем первое из них

$$a_0 - a_0 = 0 .$$

Коэффициент a_0 может быть любым. Легко видеть, что коэффициенты разложения (52) с четными n являются независимыми параметрами. Пусть $n=2m$. Тогда a_{2m} войдет только в a'_{2m} с коэффициентом – 1. Поэтому уравнения (58) (68) при $n=2m$ вообще a_{2m} не содержит. Оно выражает a_{2m-1} через $a_{2m-2}, a_{2m-3} \ldots a_0$. Такое же в соотношение между $a_{2m-1}, a_{2m-2}, \ldots a_0$ получается из уравнения (68) при $n = 2m-1$.

Положим, что $a_{-1} = 1$, тогда из (68) следует, что

$$\alpha'_{2m+1} + a_{2m+1} + \sum_{q=0}^{2m+1} \sum_{q'=0}^{q} a_{2m-q}\, a_{q'} (-1)^{q'+1} C_q^{q'} = 0 \tag{69}$$

$$2a_{2m+1} - 2a_{2m}\left(a_0 + \frac{2m+1}{2}\right) + \sum_{q=1}^{2m-1} a_{2m-q} \sum_{q'=0}^{q} a_{q'} (-1)^{q'+1} C_q^{q'} + \sum_{q'=0}^{2m-1} a_{q'} (-1)^{q'+1} \left(a_0 C_{2m}^{q'} + C_{2m+1}^{q'} \right) = 0 . \tag{70}$$

Из формулы (70) видно, что разность $2a_{2m+1} - 2a_{2m}\left(a_0 + \frac{2m+1}{2}\right)$ выражается через $a_{2m-1}, a_{2m-2}, \dots a_0$. Выпишем ряд первых соотношений, которые понадобятся в дальнейшем.

$$a_1 = \frac{a_0(a_0+1)}{2}$$

$$2a_3 - 2a_2\left(a_0 + \frac{3}{2}\right) = -\frac{a_0(a_0+1)^2(a_0+2)}{4} \tag{71}$$

$$2a_5 - 2a_4\left(a_0 + \frac{5}{2}\right) = -\left[a_3\{(a_0+2)^2+6\} + \right.$$

$$\left. + a_1\{-a_2 + \frac{3}{2}(a_0+1)(a_0+2)\} - a_2\{7a_0 + a_2 + 10\} \right].$$

Таким образом задача о построении функций $S_i(w)$ сводится к решению системы уравнений (70) (57), т.е.

$$a^{(i)}_{2m+1} = f\left(a^{(i)}_{2m}, a^{(i)}_{2m-1} \dots a^{(i)}_0\right) \quad \underset{a^{(i)*}_n = a^{(i)}_n}{A_{ij}\, a^{(j)}_n = (-1)^{n+1} a^{(i)}_n} . \tag{72}$$

Здесь вид функций f не зависит от индекса i и определяется уравнениями (70). Требование действительности a вытекает из II' .

Установим вид уравнений, которым подчиняются коэффициенты $a^{(i)}_0$. Запишем их в виде столбца

$$a_0 = \left\| \begin{matrix} a^{(1)}_0 \\ \vdots \\ a^{(n)}_0 \end{matrix} \right\| ,$$

Под a_0^2 будем понимать

$$a_0^2 = \left\| \begin{matrix} [a^{(1)}_0]^2 \\ \vdots \\ [a^{(n)}_0]^2 \end{matrix} \right\| ,$$

Введем аналогичные обозначения и для $a_n^{(1)}$. Подействовав оператором A на первое из уравнений (71), получим, что

$$A\,a_0^2 = a_0^2 + 2a_0 \qquad A\,a_0 = -a_0 .$$

Различные действительные решения этой системы определяют различные решения задачи. Коэффициенты $(a_3, a_2)(a_5, a_4)$ и т.д. определяются из решения систем линейных уравнений.

Прежде чем перейти к решению конкретных задач, сделаем ряд замечаний об установленном выше соответствии между функциями $S_i(w)$ и бесконечными ганкелевыми матрицами $S^{(i)}$. Будем обозначать это соответствие так:

$$S_i(w) \to S^{(i)}. \tag{73}$$

Очевидно, что оно линейно, т.е.

$$\text{если} \qquad S_i(w) \to S^{(i)}, \qquad S_j(w) \to S^{(j)},$$
$$\text{то} \qquad C_1 S_i(w) + C_2 S_j(w) \to C_1 S^{(i)} + C_2 S^{(j)} . \tag{74}$$

Основываясь и на свойстве линейности (74), можно сделать ряд заключений относительно ранга ганкелевых матриц, соответствующих функциям $\frac{\phi_n(w)}{D(w)}$ в формуле (48). Функции $\phi_n(w)$ определяются собственными векторами ψ матрицы перекрестной симметрии A

$$A\,\psi_n = (-1)^n\,\psi_n .$$

Рассмотрим наряду со столбцами ψ_n строки c_n (см. формулу (8)) такие, что

$$c_n A = (-1)^n c_n . \tag{75}$$

Один из векторов c_n уже фигурировал в определении матрицы A (см. (8)). Для заданной системы ψ_n всегда можно выбрать систему c_n так, чтобы

$$c_{n_1} \psi_{n_2} = \delta_{n_1 n_2} . \tag{76}$$

Тогда очевидно, что

$$\frac{\phi_n(w)}{D(w)} = c_n S(w) . \tag{77}$$

Предположим, что ни одна из функций $S_i(w)$ не имеет полюса в нуле. Тогда $D(w)$ - четные функции по построению не содержит множителя w^{2p}. В этом случае ни одна из рациональных функций $\frac{\phi_n(w)}{D(w)}$ не сократима. Действительно, для сократимости $\phi_n(w)$ должна содержать в качестве множителя $w-\alpha_n^{(i)}$ или его степень, т.е.

$$\phi_n(w) = (w - \alpha_n^{(i)})^p \, \tilde{\tilde{\phi}}_n(w). \tag{78}$$

Функция $\tilde{\tilde{\phi}}_n(w)$ должна обладать той четностью, что и $\phi_n(w)$. Последнее невозможно, так как полином $(w-\alpha_n^{(i)})^p$ сам не обладает четностью при замене $w \to -w$, а, значит, и исходная функция $\phi_n(w)$ не будет обладать искомой четностью. Отсюда следует, что если ни одна из функций $S_i(w)$ не имеет полюса в нуле, то ранги всех ганкелевых форм $c_n S$ соответствующих функциям $\frac{\phi_n(w)}{D(w)} = c_n S(w)$ одинаковы и равны степени полинома $D(w)$.

Если некоторые из функций $S_i(w)$ имеют в нуле полюс, то аналогичным рассуждением можно показать, что ранг ганкелевой формы $\sum\limits_{n-\text{чет}} c_n S \to \sum\limits_{n-\text{чет}} c_n S(w)$ равен степени полинома $D(w)$ для полюсов четного порядка и меньше ее на единицу для полюсов нечетного порядка. Ранг ганкелевой формы $\sum\limits_{n-\text{нечет}} c_n S \to \sum\limits_{n-\text{нечет}} c_n S(w)$ меньше на единицу степени полинома $D(w)$ для полюсов четного порядка и совпадает с ним для полюсов нечетного порядка.

6. Решение частных случаев

1. Полное решение задачи для матрицы $A_{\ell,\frac{1}{2}}$ было дано в работах /7/.

2. Найдем функции $S_i(w)$, удовлетворяющие условиям I′ – IV′ с матрицей перекрестной симметрии

$$A_{1,1} = \begin{Vmatrix} 1/3, & -1, & 5/3 \\ -1/3, & 1/2, & 5/6 \\ 1/3, & 1/2, & 1/6 \end{Vmatrix}. \tag{79}$$

Построим для нее систему функций ψ_n

$$\psi_0 = \begin{Vmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \psi_1 = \begin{Vmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{Vmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{80}$$

Столбец функций $S(w)$ имеет вид:

$$S(w) = \left\| \begin{matrix} 5/2 \quad \phi_3(w) - 3/2\,\phi_1(w) - 2\,\phi_0(w) \\ \phi_1(w) - \phi_0(w) \\ \phi_3(w) + \phi_0(w) \end{matrix} \right\| . \tag{81}$$

Здесь $\phi_0(w)$ нечетные, а $\phi_1(w)$ и $\phi_3(w)$ – четные функции w. Каждый из столбцов a_n будет иметь вид:

$$a_{2m} = \left\| \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \epsilon_m \qquad a_{2m+1} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{5\beta_m - 3\gamma_m}{2} \\ \gamma_m \\ \beta_m \end{matrix} \right\| . \tag{82}$$

Для определения ϵ_0, β_0, γ_0 воспользуемся первым из соотношений (71):

$$\begin{aligned} \frac{5\beta_0 - 3\gamma_0}{2} &= ½\,(-2\epsilon_0)(-2\epsilon_0 + 1) \\ \gamma_0 &= ½\,(-\epsilon_0)(-\epsilon_0 + 1) \\ \beta_0 &= ½\,\epsilon_0(\epsilon_0 + 1) . \end{aligned} \tag{83}$$

Из системы уравнений (83) следует, что

$$\epsilon_0(\epsilon_0 - 2) = 0 . \tag{84}$$

Рассмотрим первую возможность $\epsilon_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$.

Тогда из второго из соотношений (71) получаем, что

$$\begin{aligned} 5\beta_1 - 3\gamma_1 + 6\epsilon_1 &= 0 \\ 2\gamma_1 + 3\epsilon_1 &= 0 \\ 2\beta_1 - 3\epsilon_1 &= 0 . \end{aligned} \tag{85}$$

Определитель этой системы неравен нулю, а значит

$$a_2 = a_3 = 0 .$$

Отличные от нуля a_{2m+1}, a_{2m} могут получиться только тогда, когда определитель системы уравнений для β_m, γ_m, ϵ_m равен нулю, ибо правые части этих уравнений будут нулями. Но он никогда не равен нулю

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & (2m+1)\,2 \\ 0 & 2 & (2m+1) \\ 2 & 0 & -(2m+1) \end{vmatrix} = -22(2m+1) \neq 0 . \tag{86}$$

Поэтому значение ϵ_0 приводят к тривиальному решению - столбцу

$$S(w) = \left\|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}\right\| .$$

Обратимся ко второму решению $\epsilon_2 = 2,\ \beta_0 = 3,\ \gamma_0 = 1$. Тогда имеем

$$a_0 = \left\|\begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right\| 2 \qquad a_1 = \left\|\begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\right\| . \tag{87}$$

Значения $\epsilon_1, \beta_1, \gamma_1$ определяются из системы (второе уравнение из (71))

$$\begin{aligned} 5\beta_1 - 3\gamma_1 - 10\epsilon_1 &= -18 \\ 2\gamma_1 - \epsilon_1 &= 0 \\ 2\beta_1 - 7\epsilon_1 &= -18 . \end{aligned} \tag{88}$$

Решение системы (88) есть $\epsilon_1 = \frac{9}{2},\ \gamma_1 = \frac{9}{4},\ \beta_1 = \frac{27}{4}$

$$a_2 = \left\|\begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right\| 9/2 \qquad a_3 = \left\|\begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\right\| 9/4 .$$

Выпишем теперь ганкелевы матрицы функций $S_i(w)$

$$S^{(1)} = \left\|\begin{matrix} -4, & -6, & -9, & \frac{27}{2}, \\ -6, & -9, & 27/2, & \ldots \\ -9, & 27/2, \ldots & & \end{matrix}\right\| \qquad S^{(2)} = \left\|\begin{matrix} -2, & 1, & -9/2, & 9/4 \ldots \\ 1, & -9/2, & 9/4 & \ldots \\ -9/2, & 9/4, & \ldots\ldots\ldots & \end{matrix}\right\| \tag{89}$$

$$S^{(3)} = \left\|\begin{matrix} 2, & 3, & 9/2, & 27/4 & \ldots \\ 3, & 9/2, & 27/4 & \ldots & \\ 9/2, & 27/4, & \ldots & & \end{matrix}\right\|$$

Легко видеть, что $D_2^{(1)} = D_2^{(3)} = 0$ и $D_2^{(2)} \neq 0$. Теперь можно построить $S^{(1)}$ и $S^{(3)}$ полностью

$$S^{(1)} = 4 \left\| \begin{matrix} 1, & -3/2, & (-3/2)^2, & (-3/2)^3, & \ldots \\ -3/2, & (-3/2)^2, & (-3/2)^3, & (-3/2)^4 & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-3/2)^{m-1}, & (-3/2)^n & \ldots & & \text{“n” ая строка} \end{matrix} \right\| \tag{90}$$

$$S^{(3)} = 2 \left\| \begin{matrix} 1, & 3/2, & (3/2)^2, & \ldots & (3/2)^{n-1} & \text{— } \cancel{\text{в}}\ \text{n столбец} \\ 3/2, & (3/2)^2 & (3/2)^3 & \ldots & (3/2)^n & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ (3/2)^{m-1} & (3/2)^m & \ldots & & (3/2)^{m+n-2} & \text{— m-ая строка} \end{matrix} \right\| .$$

Воспользовавшись разложением (52), имеем

$$S_1(w) = \frac{w - 5/2}{w + 3/2} \qquad S_3(w) = \frac{w + ½}{w - 3/2} . \tag{91}$$

Далее можно применить результаты относительно ганкелевых форм комбинаций $c_n S$ и построить S_2. Однако проще воспользоваться уравнениями (81) и найти функции $\phi_0(w)$, $\phi_1(w)$, $\phi_3(w)$, а затем построить $S_2(w)$. Получаем, что

$$\phi_0(w) = \frac{2w}{w^2 - (3/2)^2}, \quad \phi_3(w) = \frac{w^2 + 3/4}{w^2 - (3/2)^2}, \quad \phi_1(w) = \frac{w^3 - 5/4}{w^2 - (3/2)^2}$$

$$S_2(w) = \frac{w - 5/2}{w + 3/2} \cdot \frac{w + 1/2}{w - 3/2} . \tag{92}$$

3. Применяя изложенные выше результаты, можно показать, что единственное (кроме тривиального) решение с конечным числом особенностей для трехрядной матрицы Чу-Лоу есть

$$A = 1/9 \left\| \begin{matrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{matrix} \right\| \qquad \begin{aligned} S_1(w) &= \left[\frac{w(w-2)}{w^2 - 1} \right]^2 \\ S_2(w) &= \frac{w(w-2)}{w^2-1} \; \frac{w}{w-1} . \\ S_3(w) &= \left[\frac{w}{w-1} \right]^2 \end{aligned} \tag{93}$$

4. Четырехрядная матрица Чу-Лоу

$$A = A_T * A_J = 1/9 \begin{Vmatrix} 1 & -4 & -4 & 16 \\ -2 & -1 & 8 & 4 \\ -2 & 8 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

имеет следующие решения с конечным числом полюсов

	I		II	III
$S_{11}(w)$	$\frac{w(w-2)}{w^2-1}$	$\frac{w(w-2)}{w^2-1}$	$\frac{w(w-2)}{w^2-1}$	$\frac{w(w-2)}{w^2-1}$
$S_{13}(w)$	$\frac{w(w-2)}{w^2-1}$	$\frac{w}{w-1}$	$\frac{w(w-2)}{w^2-1}$	$\frac{w}{w-1}$
$S_{31}(w)$	$\frac{w}{w-1}$	$\frac{w(w-2)}{w^2-1}$	$\frac{w}{w-1}$	$\frac{w(w-2)}{w^2-1}$
$S_{33}(w)$	$\frac{w}{w-1}$	$\frac{w}{w-1}$	$\frac{w}{w-1}$	$\frac{w}{w-1}$

Решение I есть прямое произведение двух решений, соответствующих матрицам A_T и A_J. Структура решений II и III очевидна: в каждом из них одно из решений соответствующих матрицам A_T и A_J есть тривиальное решение (т.е. стобец $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$).

7. Построение некоторого класса общих решений.

Выше был указан способ построения функций $S_i(w)$, удовлетворяющих условиям I′–IV′. Эти функции имели конечное число особенностей в плоскости w по построению (см. раздел 6). Однако на их основе можно построить более сложные решения, поставленной задачи I′–IV′. Для этого заметим, что условие I′–IV′ не определяет функций $S_i(w)$ однозначно. Только введение требования конечности числа особенностей $S_i(w)$ позволило выделить некоторые конечные группы $S_i(w)$. Пусть. $S_o(w)$ – столбец из одинаковых функций, т.е.

$$S_o(w) = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix} D(w), \qquad (94)$$

где $ID(w) = D(1-w)$, $D(w) = D(-w)$, $D^*(w) = D(w^*)$. Легко проверить, что столбец функций $S_o(w)$ удовлетворяет условиям $I' - IV'$ и является общим тривиальным решением поставленной задачи (частное тривиальное решение $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}$ возникало в ходе решения). Нетрудно также убедиться в том, что если $S_i(w)$ какие-то функции, удовлетворяющие условиям I'–IV', то и $S_i(w)\,D(w)$ также удовлетворяют этим условиям.

Можно также заметить, что условия I'–IV' допускают следующую замену:

$$S_i(w) \to S_i[\,w + \beta(w)\,],$$

где

$$\beta^*(w) = \beta(w^*), \quad \beta(w) = -\beta(-w) \qquad (95)$$

$$\beta(w) = \beta(w+1).$$

Собирая результаты (94) и (95) вместе, получаем, что если функции $s_i(w)$ удовлетворяют условиям $I - IV$, то и функции $S_i[\,w + \beta(w)\,]\,D(w)$ также удовлетворяют этим условиям.

Пусть матрица перекрестной симметрии представима в виде прямого произведения матриц перекрестных симметрий меньшего порядка. Пример этого дает матрица перекрестной симметрии πN рассеяния. Тогда функции $S_i(w)$ можно разбить на сомножители, каждый из которых будет удовлетворять условиям I–IV с матрицей из прямого произведения. Весь стобец $S(w)$ есть прямое произведение столбцов меньшего порядка. Каждый из них обладает произволом (1) и (2). Таким образом, исходя из решений с конечным числом особенностей (раздел 6), можно строить решения, содержашие ряд произвольных мероморфных функций. Пользуясь этим произволом можно стремится удовлетворять тем частным условиям, о которых говорилось во введении.

Автор благодарен В.В.Серебрякову за стимулирующие дискуссии.

Литература

1. F.Low. Phys. Rev., 97, 1392 (1955)
   G.C.Wick. Rev. Mod. Phys., 27, 339 (1955).
2. G.Chew, F.Low. Phys. Rev., 101, 1570 (1956).
3. M.L.Goldberger, K.Watson. Collision Theory, New-York, 1964.

4. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, Москва, 1957.

Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. ГИФМЛ, Москва, 1958.

5. Ning Hu. Nucl. Phys., 5, 1 (1958).

6. П.Х. Бырнев, В.А. Мещеряков, И.П. Недялков. ЖЭТФ, 46, 6631 (1964).

7. A.W. Martin, W.D. McGlinn. Phys. Rev., 136, 1515 B (1964).;

T. Rothleitner. Z. Phys., 177, 286 (1964).

В.А. Мещеряков. Препринт ОИЯИ Р-1964, Дубна, 1965.

8. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц., стр. 446, ГИТТЛ, Москва, 1954.

9. В.А. Мещеряков. Препринт ОИЯИ Р-1965, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 сентября 1965 г.

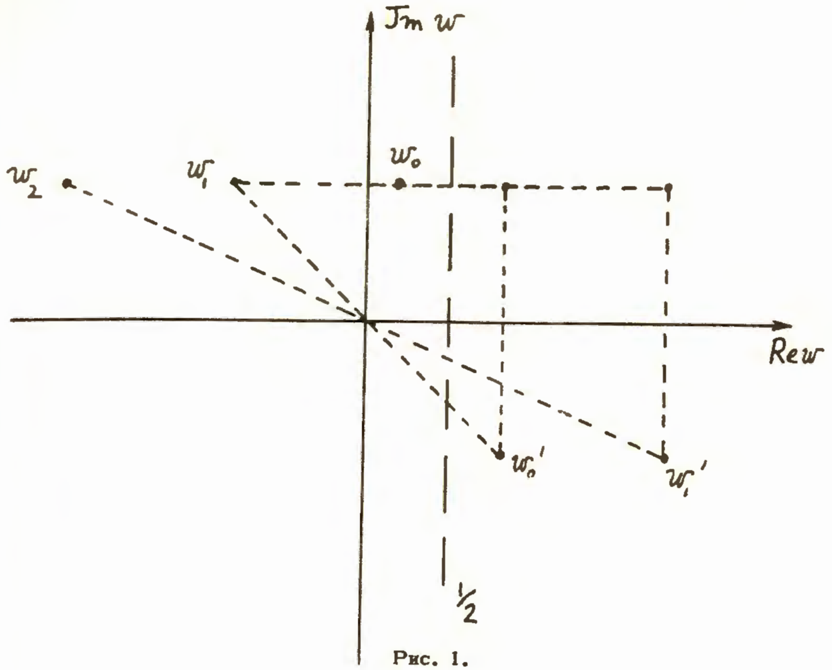

Рис. 1.

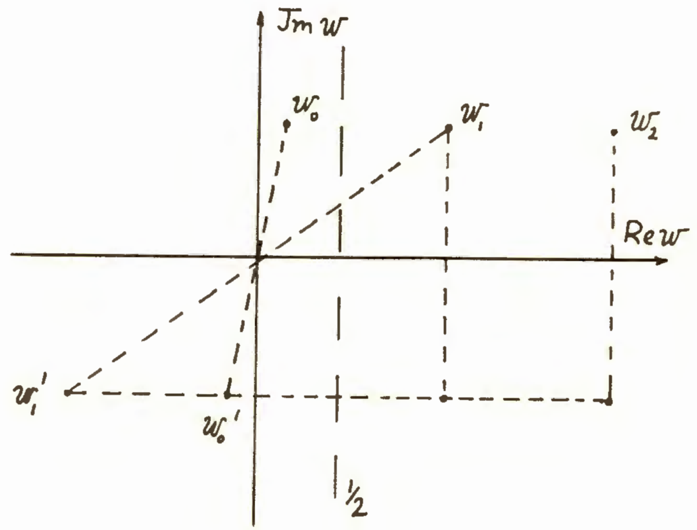

Рис. 2.