ЖТФ, 1966, т. 36, в. 10, с. 1752-1757

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2352

В.Г. Маханьков

О ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЕ В ПЛАЗМЕ С ТОКОМ ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

P-2352

В.Г. Маханьков

О ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЕ В ПЛАЗМЕ С ТОКОМ ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА

Направлено в ЖТФ

Неустойчивостям, возникающим в плазме с током, посвящено большое количество работ[1,2]. Наиболее полное исследование проведено для безграничной плазмы (однородной и неоднородной). Последовательный анализ электромагнитных колебаний в ограниченной плазме может быть проведен при правильной постановке граничных условий.

Для случая азимутально-симметричных волн такие условия были получены в работе М.Ф. Горбатенко (в гидродинамическом приближении).

В связи с этим анализ устойчивости такой системы по отношению к поверхностным волнам был либо односторонен (азимутальная симметрия), либо просто неверен.

В настоящей заметке получены граничные условия и исследовано дисперсионное уравнение для холодного плазменного шнура с током. Оказывается, что такая система неустойчива по отношению к азимутальным поверхностным волнам, при этом инкремент всего в $\sqrt{2}$ раз меньше инкремента соответствующих "объемных" волн (когда $(r_0/\lambda_\perp) > 1$, где r_0 –радиус системы, $\lambda_\perp$ –длина волны по радиусу).

Будем рассматривать квазинейтральную плазму плотности N_2 с пучком плотности N_1 и (релятивистской) скоростью u. В стационарном состоянии система представляет из себя шнур радиуса r_0 с постоянной плотностью

$$\Pi_\alpha(r) = \begin{cases} 1 & r \le r \quad , \\ 0 & r > r \quad . \end{cases}$$

Из уравнений гидродинамики (линеаризованных) для возмущений вида $\exp\{i(k_z z + n\theta - \omega t)\}$

$$v_r^\alpha = \frac{ie}{m} \cdot \frac{E_r - \frac{u_\alpha}{c} H_\theta}{\omega - k_z u_\alpha} ,$$

$$v_\theta^\alpha = \frac{ie}{m} \cdot \frac{E_\theta + \frac{u_\alpha}{c} H_r}{\omega - k_z u_\alpha} , \qquad v_\theta = r\theta ,$$

$$v_z^\alpha = \frac{ie}{m} \frac{E_z}{\omega - k_z u_\alpha} , \tag{1}$$

$$n_\alpha = N_\alpha \frac{\frac{n}{r} v_\theta^\alpha + k_3 v_z^\alpha}{\omega - k_3 u_\alpha} - i \frac{1/r}{\omega - k_3 u_\alpha} \frac{d}{dr}(r N_\alpha v_r^\alpha)$$

и уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \mathrm{div}\,\vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \mathrm{div}\,\vec{H} &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

получим тензор диэлектрической проницаемости для такой системы:

$$\begin{aligned} &\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon = 1 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_{13} = i\frac{\Omega_1^2}{\omega^2}\frac{u}{\omega'}\nabla_r, \\ &\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 0, \quad \epsilon_{31} = i\frac{u}{\omega^2\omega'}\nabla_r \Omega_1^2, \\ &\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = -\frac{\frac{n}{r} u \Omega_1^2}{\omega^2\omega'}, \\ &\epsilon_{33} = 1 - \frac{\Omega_1^2}{\gamma_0^2\omega'^2} - \frac{\Omega_2^2}{\omega^2} - \frac{(\frac{n}{r})^2 u^2}{\omega^2\omega'^2}\Omega_1^2 + \frac{u^2}{\omega^2\omega'^2}\nabla_r \Omega_1^2 \frac{d}{dr}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где Ω_1 и Ω_2 –ленгмюровские частоты пучка и плазмы соответственно,

$$\nabla_r f = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rf),$$

$$\omega' = \omega - k_3 u.$$

Пусть плотности плазмы и пучка меняются внутри некоторого переходного слоя толщиной $\delta \ll r_0$, $|r - r_0| < \delta/2$, тогда при $r > r_0 + \frac{\delta}{2}$ (область 2) и $r < r_0 - \delta/2$ (область 1) плазма и пучок однородны (N_1^I и $N_2^I \neq 0$, а $N_1^{II} = N_2^{II} = 0$).

Будем предполагать, что длина волны колебаний $\lambda \gg \delta$. Это соответствует задаче однородной плазмы с резкой границей. Выбор граничных условий в виде непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей, как отмечалось выше, приводит к неправильному анализу поверхностных волн. Для получения граничных условий проинтегрируем уравнение $\mathrm{rot}\,H_\ell = \frac{1}{c}\frac{\partial D_\ell}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_{\ell j} E_j$ по r около точки r_0, т.е. $|r - r_0| \leq \epsilon$, и устремим ϵ к нулю, ясно, что при этом ϵ должно быть больше δ.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} E^{I}_{z} &= E^{II}_{z} \\ H^{I}_{\theta}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\frac{\Omega_1^2}{\omega'^2}\right) - E^{I}_{r}\cdot\frac{u}{c}\frac{\Omega_1^2}{\omega\,\omega'} &= H^{II}_{\theta} \\ E^{I}_{\theta} &= E^{II}_{\theta} \\ H^{I}_{z} &= H^{II}_{z} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad r = r_0 . \qquad (4)$$

Используя (3) и (2), легко можно получить уравнения для полей:

$$\Delta\vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D}$$

или

$$\left(1+\frac{\Omega_1^2}{\omega'^2}\frac{u^2}{c^2}\right)\Delta_{\perp}E_z - i\left(k_3 - \frac{\Omega_1^2}{c^2}\frac{u}{\omega'}\right)(\vec{\nabla}_{\perp}\vec{E}_{\perp}) = -\frac{\omega^2}{c^2}\eta E_z ,$$

$$-\left(k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\right)\vec{E}_{\perp} + \Delta_{\perp}E_{\perp} - \vec{\nabla}_{\perp}(\vec{\nabla}_{\perp}\vec{E}_{\perp}) = i\left(k_3 - \frac{\Omega_1^2}{c^2}\frac{u}{\omega'}\right)\vec{\nabla}_{\perp}E_z .$$

Окончательно уравнения поля удобно записать в следующем виде /3/:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}E_z + \frac{a^2}{r_0^2}E_z = 0 , \\ &x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2-n^2}\frac{d\Phi}{dx}\right) + \Phi = 0 , \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

где

$$\frac{a^2}{r_0^2} = \frac{\dfrac{\omega^2}{c^2}\eta\left(\epsilon\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_3^2\right)}{\left(1+\dfrac{\Omega_1^2}{\omega'^2}\beta_0^2\right)\left(\epsilon\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_3^2\right) + \left(k_3 - \dfrac{\Omega_1^2}{c}\cdot\dfrac{\beta_0}{\omega'}\right)^2} ,$$

$$x = r\sqrt{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_3^2} , \quad \eta = 1 - \frac{\Omega_1^2}{\gamma_0^2\omega'^2} - \frac{\Omega_2^2}{\omega^2} , \quad \beta_0 = \frac{u}{c} ,$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{1-\beta_0^2} ,$$ а поля выражаются через Φ ,

$$E_r = \frac{in}{x^2-n^2}\frac{d\Phi}{dx} + i\frac{k_3 - \frac{\Omega_1^2}{c}\frac{\beta_0}{\omega'}}{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k_3^2}\frac{dE_z}{dr},$$

$$xE_\theta = \Phi - n\frac{k_3 - \frac{\Omega_1^2\beta_0}{c\omega'}}{\sqrt{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k_3^2}}E_z. \tag{6}$$

В области 2 уравнения для полей получаются из (5) и (6), если в них $\epsilon = \eta = 1$, $\varkappa = 0$. Решения уравнений (5) можно записать в виде [4]

$$E_z^{I} = A_1 J_n\left(\alpha\frac{r}{r_0}\right), \quad \Phi^{I} = B_1[nJ_n(x) - xJ_{n-1}(x)],$$

$$E_z^{II} = A_2 H_n\left(\mu\frac{r}{r_0}\right), \quad \Phi^{II} = B_2\left[nH_n\left(\mu\frac{r}{r_0}\right) - \mu\frac{r}{r_0}H_{n-1}\left(\mu\frac{r}{r_0}\right)\right], \tag{7}$$

$$\mu^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_3^2\right)r_0^2.$$

Используя (4) и (6), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&E_z'^{I}\left(1+\frac{\Omega_1^2}{\omega'^2}\beta_0^2\right) - i\left[k_3\left(1+\frac{\Omega_1^2}{\omega'^2}\beta_0^2\right) - \frac{\Omega_1^2\beta_0}{c\omega'}\right]E_r^{I} = E_z'^{II} - ik_3E_r^{II},\\
&\frac{\Phi_1^{I}}{\sqrt{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k_3^2}} - n\frac{k_3-\frac{\Omega_1^2\beta_0}{c\omega'}}{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k_3^2}E_z^{I} = \frac{\Phi_2^{II}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_3^2}} - \frac{nk_3}{\frac{\omega^2}{c^2}-k_3^2}E_z^{II},\\
&\Phi_1'^{I} - n\frac{k_3-\frac{\Omega_1^2\beta_0}{c\omega'}}{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k_3^2}E_z'^{I} - inE_r^{I} = \Phi_r'^{I} - \frac{nk_3}{\frac{\omega^2}{c^2}-k_3^2}E_z'^{II} - inE_r^{II},\\
&E_z^{I} = E_z^{II}.
\end{aligned}\right\}_{r=r_0} \tag{8}$$

Здесь штрих сверху означает производную по аргументу. Система (8) громоздка, и исследовать дисперсионное уравнение, получающееся из нее, трудно. Поэтому мы рассмотрим случай малых $k_3 \to 0$. Тогда вместо (8) будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&E_z'^{I}\left(1+\frac{\Omega_1^2}{\omega'^2}\beta_0^2\right)+i\frac{\Omega_1^2\beta_0}{c\omega'}E_r^{I}=E_z'^{II}\,,\\
&\frac{c\Phi_1^{I}}{\omega\sqrt{\epsilon}}+\frac{n\Omega_1^2u}{\epsilon\omega^2\omega'}E_z^{I}=\frac{c}{\omega}\Phi_2^{II}\,,\\
&\Phi_1'^{I}+\frac{n\Omega_1^2u}{\epsilon\omega^2\omega'}E_z'^{I}-inE_r^{I}=\Phi_2'^{II}-inE_r^{II}\,,\\
&E_z^{I}=E_z^{II}\,.
\end{aligned}\right\}_{r=r_0} \qquad (9)$$

Подставляя (7) в (9), получим

$$\left.\begin{aligned}
&a_{\ell m}A_\ell+b_{\ell m}B_\ell=0 \qquad \ell,m=1;2\\
&a_{\ell m}A_\ell+b_{\ell m}B_\ell=0 \qquad \ell=1:2,\ m=3;4\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где

$$a_{11}=\alpha\left[1+\frac{\Omega_1^2}{\omega^2}\beta_0^2+\frac{\beta_0^2}{\epsilon}\frac{\Omega_1^4}{\omega^4}\right]J_n'(\alpha),\qquad \beta_{11}=-\frac{\Omega_1^2\beta_0}{c\omega}\frac{nr_0}{\kappa^2-n^2}\Phi_1'(\kappa),$$

$$a_{21}=-\mu H_n'(\mu)\,,\quad b_{12}=\frac{1}{\kappa}\Phi_1(\kappa)\,,\qquad a_{12}=\frac{\Omega_1^2\beta_0}{c\omega}\frac{nr_0}{\kappa^2}J_n(\alpha)\,,$$

$$b_{22}=-\frac{\Phi_2(\mu)}{\mu}\,,\quad b_{13}=\frac{\kappa^2}{\kappa^2-n^2}\Phi_1'(\kappa),\quad b_{23}=-\frac{\mu^2}{\mu^2-n^2}\Phi_2'(\mu), \qquad (11)$$

$$a_{14}=J_n(\alpha)\,,\quad a_{24}=-H_n(\mu)\,,\quad b_{21}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0\,,$$

$$\Phi_1=nJ_n(x)-xJ_{n-1}(x)\,,\quad \Phi_2=nH_n(x)-xH_{n-1}(x),$$

$$\kappa^2=r_0^2\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\,,\quad b_{14}=b_{24}=0\,.$$

Условие нетривиальности решения системы (10) есть

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & b_{11} & 0\\
a_{12} & 0 & b_{12} & b_{22}\\
0 & 0 & b_{13} & b_{23}\\
a_{14} & a_{24} & 0 & 0
\end{vmatrix}=0\,.$$

Отсюда

$$(a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14})(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}) -$$

$$- b_{11}a_{12}a_{24}b_{23} = 0 . \qquad (12)$$

Нас будет интересовать поверхностная волна, поэтому α, κ, $\mu \ll 1$. Если к тому же $n \gg 1$, то разложением бесселевых функций в ряд можно пользоваться до значений α, κ, $\mu \lesssim 1$. Полагая

$$J_n(\alpha) \approx \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n , \quad \Phi(\kappa) \approx (n-1)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^n ,$$

$$H_n(\mu) \approx \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-n} , \quad \Phi(\mu) \approx (n-1)\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-n} ,$$

получим вместо (12)

$$\left[2 + \beta_0^2\frac{\Omega_1^2}{\omega^2} + \frac{1}{\epsilon}\beta_0^2\frac{\Omega_1^4}{\omega^2}\right](1+\epsilon) - \beta_0^2\frac{\Omega_1^4}{\epsilon\,\omega^4} = 0 . \qquad (13)$$

Уравнение (13) является кубическим относительно ω^2, в связи с чем исследование его в общем виде довольно громоздко. Приведем решение (13) в двух предельных случаях

$$1)\ \Omega_2 \gg \Omega_1 , \qquad 2)\ \Omega_2 \ll \frac{\Omega_1}{\gamma_0} .$$

В первом пределе неустойчивые решения появляются, когда $\omega \lesssim \Omega_1$, причем неустойчивость при сделанных предположениях чисто апериодическая:

$$\mathrm{Im}\,\omega = \frac{\Omega_1\beta_0}{\sqrt{2}} , \qquad (14)$$

что всего в $\sqrt{2}$ раз меньше инкремента апериодической неустойчивости неограниченной системы /3,5/. Во втором пределе комплексные решения находятся в области $\omega \lesssim \Omega_2$ и

$$\mathrm{Im}\,\omega = \frac{\Omega_2\beta_0\gamma_0}{\sqrt{2}} . \qquad (15)$$

Интересен тот факт, что возбуждение азимутально-симметричной поверхностной волны крайне затруднено /6/ и получающиеся инкременты экспоненциально малы ($k_3 \neq 0$)

$$\mathrm{Im}\,\omega = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}}\left(\frac{N_+}{N_2}\right)^{1/3}\frac{c_1 u}{r_0}\, e^{-2\frac{u^2}{r_c^2\Omega_2^2}} ,$$

при этом $2\frac{u^2}{r_0^2\Omega_0^2} \gg 1$, или $\frac{\nu}{2\beta_0^2} \ll 1$, где ν – "погонный" электрон. В интересующем нас случае $k_3 \to 0$. Дисперсионное уравнение аксиально-симметричной волны примет вид (из (12))

$$\frac{\omega^2}{c^2} r_0^2 \eta \ln \frac{c_1 c}{\omega r_0} - 2 = 0 ,$$

где, как и раньше, $a \ll 1$ и $\mu \ll 1$. Как нетрудно видеть, это уравнение решений не имеет. Таким образом, поверхностные аксиально-симметричные волны с $k_s = 0$ не только не возбуждаются, но и не существуют. Рассмотрим так называемые объемные волны, для которых $a = \frac{r_0}{\lambda_\perp} \gg 1$, дисперсионное уравнение, описывающее эти колебания,

$$(1 + \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \beta_0^2 + \frac{\beta_0^2}{\epsilon} \frac{\Omega_1^4}{\omega^4}) a J_n'(a)(1+\epsilon) + (1+\epsilon - \beta_0^2 \frac{\Omega_1^4}{\epsilon\omega^4}) n J_n(a) = 0$$

легко исследуется в двух предельных случаях $a \gg n$ и $n \gg a$, причем в обоих инкременты совпадают и есть

$$\mathrm{Im}\,\omega = \Omega_1 \beta_0 , \quad \Omega_2 \gg \Omega_1$$

или

$$\mathrm{Im}\,\omega = \gamma_0 \Omega_2 \beta_0 , \quad \Omega_2 \ll \Omega_1 / \gamma_0 ,$$

что находится в согласии с результатами работ /3/ и /7/. Этого следовало ожидать, так как граничные условия мало влияют на коротковолновые колебания.

В заключение несколько слов о пределах применимости полученных граничных условий. Уравнение непрерывности допускает линеаризацию на границе, когда $n_a \ll N_a$, что справедливо при[x/]

$$\frac{1}{N_a} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r N_a v_r^a) \ll \omega' ,$$

или, принимая во внимание, что N_a меняется на расстояниях порядка δ, получим

$$\frac{v_r^a}{\omega' \delta} \ll 1 . \qquad (16)$$

Как известно, при возникновении флюктуации $v_r^a \sim v_T$, поэтому

$$\frac{v_T}{\omega' \delta} \ll 1 , \qquad (16a)$$

или для рассмотренного случая

$$\frac{r_{D\,min}}{\delta}, \quad \left(\frac{T_{max}}{T_{min}}\right)^{1/2} \frac{r_{D\,min}}{\delta} \ll 1, \qquad (17)$$

---

x/ Достаточное условие, полученное из рассмотрения следующих членов ряда, имеет вид:

$$\frac{1}{\delta} \frac{1}{v_1(\vec{\kappa})} \sum_{\vec{k}} \frac{v_{1r}(\vec{\kappa}-\vec{k}) \; v_{1r}(\vec{k})}{\omega_{\vec{\kappa}-\vec{k}} - (\kappa_3 - k_3) u} \ll 1 . \qquad (16,1)$$

Так как в него входит сумма по $\vec{k}$, оно может стать более жестким, чем (16).

где $r_{D\,min}$ -дебаевский радиус для пучка в первом случае и плазма во втором. А так как граничные условия (8) были получены в предположении $\lambda, r_0 \gg \delta$, то $r_D \ll \lambda, r_0$ - длины волны и радиуса системы.

В заключение автор благодарит Э.А. Перльштейна за ценные обсуждения и О.И. Яркового, обратившего внимание на применимость выражений (8).

Литература

1. В.П. Силин, А.А. Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Атомиздат, 1961.
2. А.Б. Михайловский. Вопросы теории плазмы, в 3. Атомиздат, 1963; ЖЭТФ, 48, 380 (1965); В.Ф. Кулешов и А.А. Рухадзе. Препринт ФИАН А-25 (1963).
3. О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ, 1053, Дубна, 1962.
4. Д.Г. Ломинадзе, Э.А. Перельштейн. Препринт ОИЯИ, 1527, Дубна, 1964.
5. В.Г. Маханьков, А.А. Рухадзе. Ядерный синтез, 2, 177 (1962).
6. М.Ф. Горбатенко. Сб. "Физика плазмы", т. 1. Киев. Из-во АН УССР, 1962.
7. В.Г. Маханьков. Радиофизика, VI, 941 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 сентября 1965 г.