

СЗ43 е  
К-172

27/x-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2333



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.Н. Калинкин, Я. Грабовский

О МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ  
ДЛЯ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ  
ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ. 1.

1965

P-2333

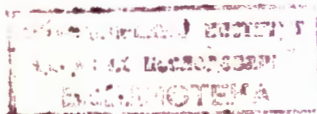
Б.Н. Калинкин, Я. Грабовский<sup>х)</sup>

О МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ  
ДЛЯ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ  
ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ. I.

Направлено в Acta Physica Polonica

---

х) Институт Ядерной физики, Краков, Польша



3607/2 чр.

## В в е д е н и е

Процесс неупругого рассеяния ядерных частиц является важным средством изучения как структуры ядра, так и механизма взаимодействия.

В последние годы благодаря быстрому развитию экспериментальных и теоретических исследований в этой области было показано, что исключительно большую роль играет прямой механизм взаимодействия. При этом наиболее мощным и результативным оказался метод искаженных волн, опирающийся на феноменологический учет взаимодействия в начальном и конечном каналах реакции.

В борновском приближении дифференциальное сечение неупругого рассеяния дается формулой:

$$d\sigma/d\Omega = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_f}{k_i} \sum_{\text{ср.}} |T_{if}|^2, \quad (1)$$

где  $m$  - приведенная масса;  $k_i, k_f$  - волновые числа в начальном и конечном каналах,  $T_{if}$  - амплитуда реакции.

$$T_{if} = 4\pi A_\lambda \sum_{\ell, \ell'} i^{\ell-\ell'-\lambda} e^{i(\delta_\ell^i + \delta_{\ell'}^f)} (2\ell'+1)^{1/2} \times \\ (\ell' \lambda -\mu \mu | \ell 0) (\ell' \lambda 0 0 | \ell 0) Y_{\ell \mu}^\lambda(\theta, 0) M_{\ell \ell'}^\lambda. \quad (2)$$

$$M_{\ell \ell'}^\lambda = \frac{1}{k_i k_f} \int_0^\infty f_{\ell'}(k_f r) F_\lambda(r) f_\ell(k_i r) dr. \quad (3)$$

Величина  $A_\lambda$  и входящая в матричный элемент (3) функция  $F_\lambda(r)$  связаны с приведенным матричным элементом перехода соотношением:

$$\langle J_f || V_\lambda(r, \xi) || J_i \rangle = A_\lambda F_\lambda(r), \quad (4)$$

где  $V_\lambda(r, \xi)$  - компонента потенциала  $V_{\text{int}}(\vec{r}, \xi)$ , приводящего к переходу

$$V_{\text{int}}(\vec{r}, \xi) = \sum_{\lambda, \mu} V_{\lambda \mu}^*(r, \xi) Y_{\lambda \mu}^\lambda\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \quad (5)$$

Волновые функции относительного движения  $f_\ell(k_i)$  удовлетворяют уравнению

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right] f_\ell(kr) = 0, \quad (6)$$

где  $\eta = z_1 z_2 e^2 / \hbar v$ , а  $U(r)$  — оптический потенциал, удовлетворительно описывающий упругое рассеяние соответствующих частиц. Асимптотический вид функций  $f_\ell(kr)$  определяется формулой:

$$f_\ell(kr) \sim \sin \left[ kr - \eta \ln 2kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell \right] = \sin \phi_\ell, \quad (7)$$

причем  $\delta_\ell = \sigma_\ell + \kappa_\ell$ ,

где

$$\sigma_\ell = \arg \Gamma(\ell + 1 + i\eta) \quad (8)$$

кулоновская фаза, а  $\kappa_\ell$  — поправка, обусловленная наличием комплексного ядерного потенциала  $U(r)$ .

Конкретный вид разложения (5) определяется выбором возмущающего потенциала. Например, в случае кулоновского возбуждения, сопровождаемого переходом ЕА-типа, разложение  $V_{int}$  имеет вид:

$$V_{int} = 4\pi z_1 e \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2\lambda+1} \frac{1}{r^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}(\Omega) \mathfrak{M}(\text{ЕА}, \mu), \quad (9)$$

где

$$\mathfrak{M}(\text{ЕА}, \mu) = \int r^{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\Omega) \rho(r) dr, \quad \rho(r) -$$

оператор плотности заряда в ядре,  $z_1$  — заряд налетающей частицы.

Если механизм возбуждения ядерный, а  $V_{int}$  выбирается в виде потенциала Юкавы, то

$$V_{int} = V_0 \frac{e^{-ar}}{ar} = -4\pi V_0 \sum_{\ell,m} j_\ell(iar) \frac{(1)}{\hbar} (i ar) Y_{\ell m}^*(\Omega) Y_{\ell m}(\Omega). \quad (10)$$

Наибольшие трудности возникают при вычислении матричных элементов  $M_{\ell,\ell'}^\lambda$ , поскольку необходимо использовать радиальные части оптических волновых функций. Последние вычисляются на электронных машинах. Эти функции в случае рассеяния тяжелых частиц особенно сложны. Кроме того для получения дифференциального сечения необходимо иметь в своем распоряжении несколько десятков таких функций.

Поэтому полезно исследовать возможность вычисления матричных элементов  $M_{\ell,\ell'}^\lambda$  более простым способом, минуя стадию получения волновых функций  $f_\ell(kr)$ , являющихся решением очень сложного дифференциального уравнения второго порядка с комплексным потенциалом.

Характер задачи — квазиклассичность относительного движения — наталкивает

на мысль о том, что желаемые упрощения возможны. Выяснению этого вопроса и посвящена данная статья.

### § 1. Кулоновский механизм возбуждения. Матричные элементы для E1 и E2-переходов

Поскольку борновское приближение пригодно при достаточно высоких энергиях (в данном случае при  $E \approx 2V_B$ , где  $V_B$  - кулоновский барьер), а энергия возбуждения ядра предполагается малой, то здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что потерями энергии можно пренебречь, т.е. положим  $k_1 = k_f$ .

Кроме того, напомним, что  $\eta \gg 1$  и  $\ell \gg 1$  (та и другая величина равны по порядку величины нескольким десяткам). Процесс неупругого рассеяния происходит в основном при периферических столкновениях ядер, т.е. минимальное значение  $\ell_{\min} = \ell_1$  очень велико.

а) Рассеяние в кулоновском поле, E1-переход.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда  $U(r) \equiv 0$   $\delta_\ell = \sigma_\ell$ . Необходимо получить матричный элемент

$$M_{\ell+1, \ell}^{-2} \text{ (кул.)} = -\frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} f_{\ell+1} \frac{1}{r^2} f_{\ell} dr. \quad (11)$$

Записав уравнения Шредингера для функций  $f_{\ell}$  и  $f_{\ell'}$ :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f_{\ell}(kr) = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell'(\ell'+1)}{r^2} \right] f_{\ell'}(kr) = 0, \quad (12)$$

умножив первое из них на  $f_{\ell'}(kr)$ , а второе  $f_{\ell}(kr)$ , составив их разность, после интегрирования по  $dr$ , получим:

$$\int_0^{\infty} f_{\ell'} \left[ \frac{\ell'(\ell'+1)}{r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f_{\ell} dr = - \left[ f_{\ell} \frac{df_{\ell}}{dr} - f_{\ell'} \frac{df_{\ell'}}{dr} \right]_0^{\infty}. \quad (13)$$

Поскольку  $\ell' = \ell + 1$ , то:

$$2(\ell+1) \int_0^{\infty} f_{\ell+1} f_{\ell} \frac{dr}{r^2} = - \left[ f_{\ell+1} \frac{df_{\ell}}{dr} - f_{\ell} \frac{df_{\ell+1}}{dr} \right]_0^{\infty}. \quad (14)$$

Правая часть уравнения (14) при  $r \rightarrow 0$  обращается в нуль. Учитывая асимптотическое поведение (8) функций  $f_{\ell}$ , имеем:

$$\left( \frac{df_{\ell}}{dr} \right)_{r \rightarrow \infty} \rightarrow k \cos \phi_{\ell}.$$

Правая часть выражения (14) стремится к

$$- [ f_{\ell+1} \frac{df_{\ell}}{dr} - f_{\ell} \frac{df_{\ell+1}}{dr} ]_0^{\infty} = k \sin(\phi_{\ell} - \phi_{\ell+1}). \quad (15)$$

Воспользовавшись определением фаз  $\sigma_{\ell}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \phi_{\ell} - \phi_{\ell+1} &= \frac{\pi}{2} + \sigma_{\ell} - \sigma_{\ell+1} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Im} \ln \frac{\Gamma(\ell + 1 + i\eta)}{\Gamma(\ell + 2 + i\eta)} \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Im} \ln(\ell + 1 + i\eta). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\sin(\phi_{\ell} - \phi_{\ell+1}) = \cos(\sigma_{\ell} - \sigma_{\ell+1}) = \frac{\ell + 1}{|\ell + 1 + i\eta|}.$$

Из соотношений (11), (14), (15) и (16) следует, что

$$M_{\ell+1, \ell}^{-2} \quad (\text{кул.}) = \frac{1}{2k} \frac{1}{|\ell + 1 + i\eta|}. \quad (17)$$

Этот результат полностью совпадает с определением матричного элемента  $M_{\ell+1, \ell}^{-2}$ , полученным путем непосредственного интегрирования с кулоновскими волновыми функциями <sup>/2/</sup>.

#### б) Учет ядерных сил. E1-переход

При наличии ядерных сил фазы  $\delta_{\ell}$  являются комплексными величинами. Для вычислений в этом случае воспользуемся результатами работы <sup>/3/</sup>. Тогда для разности  $(\phi_{\ell} - \phi_{\ell+1})$  получим:

$$\begin{aligned} \phi_{\ell} - \phi_{\ell+1} &= \frac{\pi}{2} + \delta_{\ell} - \delta_{\ell+1} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Re}(\delta_{\ell} - \delta_{\ell+1}) + i \operatorname{Im}(\delta_{\ell} - \delta_{\ell+1}) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \theta(\ell) + \frac{i\gamma}{2}; \quad \ell_{1-} \leq \ell \leq \ell_k \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sin(\phi_{\ell} - \phi_{\ell+1}) = \cos[\theta(\ell)/2] \operatorname{Ch}(\gamma/2) + i \sin[\theta(\ell)/2] \operatorname{Sh}(\gamma/2), \quad (19)$$

где  $\theta(\ell)$  - классическая функция отклонения, а  $\gamma = \frac{2}{\ell_k - \ell_{1-}}$  - параметр мнимой части фазы, указывающий на интенсивность поглощения.  $\ell_k - \ell_{1-}$  номер парциальной волны, для которой учет ядерных сил становится существенным, а  $\ell_{1-}$  - парциальная волна, для которой реализуется практически полное поглощение. Таким образом, эффективно учет искажающего влияния ядерных сил необходим только в зоне  $\ell_{1-} \leq \ell \leq \ell_k$ . На парциальные волны, лежащие в интервале  $\ell > \ell_k$ , ядерные силы не оказывают практически никакого влияния, и  $M_{\ell+1, \ell}^{-2} = M_{\ell+1, \ell}^{-2} \quad (\text{кул.})$ .

Классическая функция отклонения  $\theta(\ell)$ , входящая в формулу (18), определяется следующим образом <sup>/3/</sup>:

$$\theta(\ell) = \pi - 2 \left\{ 2\ell (t^2 - \ell^2)^{-1/2} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\rho'(\eta - D^{1/2}) + \ell^2}{\rho'(\eta + D^{1/2}) + \ell^2} \right]^{1/2} + \operatorname{arcsin} \frac{\ell^2 + \eta \rho'}{\rho'(\eta^2 + \ell^2)^{1/2}} - \operatorname{arctg}(\eta/\ell) \right\}; \quad \ell_1 \leq \ell \leq \ell_k, \quad (20)$$

где

$$\rho' = k(R_0 + \Delta), \quad D = q^2 - p(t^2 - \ell^2), \quad p = 1 + \frac{V_0 R_0^2}{2E \Delta^2},$$

$$q = \eta + \rho'(p - 1), \quad t^2 = (p - 1)\rho'^2, \quad \ell_k = [\rho'(\rho' - 2\eta)]^{1/2},$$

$$\ell_1 = p^{-1/2} [(p - 1)\ell_k^2 - \eta^2]^{1/2},$$

причем  $V_0 = 40$  Мэв,  $\Delta = 2,2 f$ ,  $R_0 = 1,27 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) f$ .

Таким образом, с помощью функции  $\theta(\ell)$  можно вычислить матричный элемент  $M_{\ell+1, \ell}^{-2}$  (иск.), учитывающий наличие искажений, вносимых ядерными силами. Мы видим, что эти вычисления оказываются несравненно проще, чем в случае оценок с искаженными волновыми функциями.

Более того, имея формулу для матричного элемента  $M_{\ell+1, \ell}^{-2}$  (иск.), мы можем оценить роль искажений.

Действительно, функция  $\theta(\ell)$  изменяется в интервале  $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_k$  от нуля  $\theta(\ell_1) = 0$  до  $\theta(\ell_k) = \theta_k = 2 \operatorname{arctg}(\eta/\ell_k)$  - максимального своего значения. При энергиях, для которых борновское приближение справедливо (10 Мэв/нуклон),  $\eta/\ell_k \approx 1/3$ . Поэтому  $\theta_k \approx 0,3 - 0,4$ . Первый член в формуле (19), являющийся основным, достигает своего максимального значения при  $\theta(\ell) = 0$ . Заменяем  $\theta(\ell)$  на  $\theta_k$  во всем интервале  $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_k$ . Тем самым мы занижаем значение матричного элемента  $M_{\ell+1, \ell}^{-2}$  (иск.) на ~10%.

Поскольку

$$\cos[\theta_k/2] = \cos \operatorname{arctg}(\eta/\ell_k) = \frac{\ell_k}{(\eta^2 + \ell_k^2)^{1/2}}$$

и

$$\sin[\theta_k/2] = \sin \operatorname{arctg}(\eta/\ell_k) = \frac{\eta}{(\eta^2 + \ell_k^2)^{1/2}},$$

то

$$M_{\ell+1, \ell}^{-2} \quad (\text{иск.}) = \frac{1}{2k(\ell+1)} \left\{ \text{Ch}(\gamma/2) \frac{\ell_k}{(\eta^2 + \ell_k^2)^{1/2}} + \text{Sh}(\gamma/2) \frac{\eta}{(\eta^2 + \ell_k^2)^{1/2}} \right\} i =$$

$$= M_{\ell+1, \ell}^{-2} \quad (\text{кул.}) \left\{ \text{Ch}(\gamma/2) + i(\eta/\ell_k) \text{Sh}(\gamma/2) \right\}.$$

Учитывая малость параметра  $\gamma = \frac{2}{\ell_k - \ell_1} = 0,2$ , с точностью до членов, пропорциональных  $\gamma^2$ , имеем:

$$M_{\ell+1, \ell}^{-2} \quad (\text{иск.}) \approx M_{\ell+1, \ell}^{-2} \quad (\text{кул.}) \left\{ 1 + i \frac{\eta}{\ell_k} \frac{1}{\ell_k - \ell_1} \right\} \quad (21)$$

Последний член в формуле (21) приблизительно в 30 раз меньше первого. Таким образом,  $M_{\ell+1, \ell}^{-2} \quad (\text{иск.}) \approx M_{\ell+1, \ell}^{-2} \quad (\text{кул.})$  с точностью до 10%. В данном случае основной эффект искажений, вносимых ядерными силами, заключается в том, что парциальные волны с  $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_k$  дают меньший вклад в дифференциальное сечение из-за наличия мнимой части фазы  $\delta_\rho$  во множителе  $\exp[i(\delta_\rho + \delta_{\rho'})]$ , т.е. из-за наличия поглощения.

### в) Рассеяние в кулоновском поле. E2-переход

Рассмотрим диагональный матричный элемент  $M_{\ell, \ell}^{-3} \quad (\text{кул.})$ . Для его вычисления воспользуемся следующим приемом. Запишем уравнение Шредингера в виде:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{(r+r_0)^2} \right\} \psi_\ell = 0, \quad (22)$$

где  $r_0$  — малый параметр, стремящийся к нулю. В пределе  $r_0 \rightarrow 0$  решение  $\psi_\ell \rightarrow f_\ell$ . Продифференцировав это уравнение по  $r_0$ , умножив его на  $f_\ell$  и проинтегрировав по  $dr$ , получим соотношение

$$M_{\ell, \ell}^{-3} \quad (\text{кул.}) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} \int_0^\infty f_\ell \frac{1}{(r+r_0)^3} f_\ell dr =$$

$$= \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left\{ - \frac{1}{2k^2 r_0^2 (\ell+1)} \left[ f_\ell \frac{d}{dr} \frac{df_\ell}{dr} - \frac{df_\ell}{dr} \frac{df_\ell}{dr} \right] \right\} \Big|_0^\infty.$$



Так как 
$$\frac{\partial f_{\ell}}{\partial r} = \text{Cos } \phi'_{\ell} \frac{\partial \sigma'_{\ell}}{\partial r}$$

(штрих означает, что  $\phi'$  и  $\sigma'$ , вообще говоря, отличаются от  $\phi$  и  $\sigma$  из-за наличия малого параметра  $r_0$ ), то:

$$M_{\ell, \ell}^{-3} \text{ (кул.)} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} f_{\ell} \frac{1}{(r+r_0)^3} f_{\ell} dr = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2k \ell(\ell+1)} \frac{\partial \sigma'_{\ell}}{\partial r_0}. \quad (24)$$

Для вычисления  $\lim_{r_0 \rightarrow 0} (\partial \sigma'_{\ell} / \partial r_0)$  используем квазиклассическое представление фаз:

$$\sigma'_{\ell} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \left\{ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{(r+r_0)^2} \right\}^{1/2} - k \int_0^{\infty} (\ell + 1/2) - k r^{\min}, \quad (25)$$

откуда

$$\begin{aligned} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \sigma'_{\ell}}{\partial r_0} \right) &= \ell(\ell+1) \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} = \\ &= k - k\eta \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Однако

$$\frac{d\sigma_{\ell}}{d\ell} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\ell+1}{2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2}$$

поэтому

$$\left( \frac{\partial \sigma'_{\ell}}{\partial r_0} \right)_{r_0 \rightarrow 0} = k - \frac{2k\eta}{2\ell+1} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{d\sigma_{\ell}}{d\ell} \right). \quad (27)$$

С помощью соотношений (24) и (27) для матричного элемента  $M_{\ell, \ell}^{-3}$  (кул) получаем:

$$M_{\ell, \ell}^{-3} \text{ (кул.)} = \frac{1}{2\ell(\ell+1)(2\ell+1)} \left\{ 2\ell+1 - \eta \left( \pi - 2 \frac{d\sigma_{\ell}}{d\ell} \right) \right\}. \quad (28)$$

Так как  $d\sigma_{\ell}/d\ell = \text{Im} \frac{1}{\Gamma(\ell+1+i\eta)} = \text{Im} \psi(\ell+1+i\eta)$  — мнимая часть логарифмической производной от  $\Gamma$  — функции, то

$$M_{\ell, \ell}^{-3} \text{ (кул.)} = \frac{1}{2\ell(\ell+1)(2\ell+1)} \left\{ 2\ell+1 - \pi\eta + 2\eta \text{Im} \psi(\ell+1+i\eta) \right\}. \quad (29)$$

Это выражение полностью совпадает с формулой для  $M_{\ell, \ell}^{-3}$  (кул), полученной с использованием явного вида кулоновских волновых функций  $^{2/2}$ .

г) Учет ядерных сил. E2-переход.

Из предыдущего рассмотрения следует, что для учета искажений, вносимых ядерными силами, необходимо вычислить производную:

$$\left( \frac{\partial \delta \ell}{\partial r} \right)_{r_0 \rightarrow 0} = \ell(\ell+1) \int_{r^{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} \quad (30)$$

где  $U(r)$  - ядерный потенциал.

Для простоты сначала будем считать потенциал  $U(r)$  действительным. Воспользуемся представлением потенциала  $U(r)$ , предложенным в работе /3/. Это представление позволяет провести необходимые расчеты в аналитическом виде. Тогда ядерный потенциал полностью выключается на расстояниях  $r \geq R_0 + \Delta$ , где  $R_0$  - средний радиус ядерного взаимодействия, а  $\Delta$  - параметр, связанный с шириной зоны диффузности. Классическая точка поворота  $r^{\min}$ , соответствующая движению с моментом  $\ell$ , т.е. орбите, движение, по которой приводит к практически полному поглощению, располагается в интервале  $R_0 < r^{\min} < R_0 + \Delta$ .

Воспользуемся этими обстоятельствами и представим входящий в формулу (30) интеграл следующим образом:

$$\int_{r^{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} =$$

$$= \int_{r^{\min}}^{R_0+\Delta} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} + \int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} \quad (31)$$

Поскольку  $R_0 \leq r^{\min} \leq R_0 + \Delta$  и кроме того  $\Delta/R_0 \ll 1$ , сделаем приближение  $1/r^3 \rightarrow (1/\bar{R}) (1/r^2)$ , где  $\bar{R} = R_0 + \Delta$ . Вид интегрального выражения в (31) указывает на то, что такое приближение приведет к очень небольшой погрешности.

Используя, кроме того, тождественное преобразование, получаем:

$$\int_{r^{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{\bar{R}} \int_{r^{\min}}^{R_0+\Delta} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} +$$

$$+ \frac{1}{\bar{R}} \int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} - \frac{1}{\bar{R}} \int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} +$$

$$+ \int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} = \quad (32)$$

$$= \frac{1}{R} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{h^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} +$$

$$+ \int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} - \frac{1}{R} \int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} =$$

Первый интеграл в правой части равенства (32) связан с классической функцией отклонения, учитывающей ядерное взаимодействие:

$$\theta(\ell) = 2 \frac{d\delta\ell}{d\ell} = \pi - (2\ell+1) \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{h^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2}. \quad (33)$$

Эта функция в интервале  $\ell_1 < \ell < \ell_k$  выражается через параметры задачи по формуле (20). Итак:

$$\int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{h^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\pi - \theta(\ell)}{2\ell+1} = \frac{\pi - 2 \frac{d\delta\ell}{d\ell}}{2\ell+1}. \quad (34)$$

Второй и третий интегралы в формуле (35) равны соответственно:

$$\int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left\{ k - \frac{(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}}{R_0+\Delta} - k\eta \int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r} \right\} \quad (35)$$

$$\int_{R_0+\Delta}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{\ell} \left\{ \arctg \left[ \frac{\ell^2 + \eta \rho'}{\ell(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right] - \arctg(\eta/\ell) \right\}. \quad (36)$$

Используя формулы (34), (35), (36) и (20), получаем

$$\int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{h^2} U(r) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{R_0+\Delta} \frac{\pi - \theta(\ell)}{2\ell+1} + \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left\{ k - \frac{(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}}{R_0+\Delta} - \right.$$

$$\left. - \frac{k\eta}{\ell} \left[ \arctg \left( \frac{\ell^2 + \eta \rho'}{\ell(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right) - \arctg(\eta/\ell) \right] \right\} - \frac{1}{\ell(R_0+\Delta)} \left\{ \arctg \left( \frac{\ell^2 + \eta \rho'}{\ell(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right) - \arctg(\eta/\ell) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\ell(R_0+\Delta)} \left\{ \pi - \theta(\ell) - 2 \arctg \left( \frac{\ell^2 + \eta \rho'}{\ell(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right) + 2 \arctg(\eta/\ell) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left\{ k - \left[ \frac{\pi k \eta}{2\ell+1} - \frac{2k\eta}{2\ell+1} \operatorname{arctg}(\eta/\ell) \right] + \frac{\pi k \eta}{2\ell+1} - \right. \quad (37)$$

$$\left. - \frac{(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}}{R_0 + \Delta} - \frac{2k\eta}{2\ell+1} \operatorname{arctg} \left( \frac{\ell^2 + \eta\rho'}{\ell(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left\{ k - \frac{k\eta}{2\ell+1} \left( \pi - 2 \frac{d\sigma_\ell}{de} \right) + \frac{k\eta}{\ell} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\ell^2 + \eta\rho'}{\ell(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}}{R_0 + \Delta} \right\} + \frac{2}{(R_0 + \Delta)(t^2 - \ell^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\rho'(\eta - D^{1/2}) + \ell^2}{\rho'(\eta + D^{1/2}) + \ell^2} \right]^{1/2}.$$

Тогда, учитывая определение  $M_{\ell,\ell}^{-3}$  (кул) (см. (28)) для  $M_{\ell,\ell}^{-3}$  (иск), имеем

$$M_{\ell,\ell}^{-3} \text{ (иск)} = M_{\ell,\ell}^{-3} \text{ (кул)} + \frac{1}{2\ell(\ell+1)} \left\{ \frac{\eta}{\ell} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\ell^2 + \eta\rho'}{\ell(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right) \right] + \right. \quad (38)$$

$$\left. + \frac{2\ell(\ell+1)}{\rho'(t^2 - \ell^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\rho'(\eta - D^{1/2}) + \ell^2}{\rho'(\eta + D^{1/2}) + \ell^2} \right]^{1/2} - \frac{(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}}{\rho'} \right\}.$$

Формула (38) выведена в предположении, что потенциал  $U(r')$  действителен. Нетрудно получить мнимую добавку к матричному элементу  $M_{\ell,\ell}^{-3}$  (иск). Для этого в формуле (34) вместо  $d\delta_\ell/d\ell$  следует подставить выражение  $\frac{d\operatorname{Re}\delta_\ell + i \frac{d\operatorname{Im}\delta_\ell}{d\ell}}{d\ell}$ . Первый член приведет к прежним результатам, а второй даст искомую добавку:

$$\operatorname{Im} M_{\ell,\ell}^{-3} \text{ (иск)} = \frac{1}{2\rho'\ell} \frac{d\operatorname{Im}\delta_\ell}{d\ell} = \frac{\gamma}{4\rho'\ell}. \quad (39)$$

Эта добавка на порядок меньше главного члена в формуле (38), поэтому как и в случае E1-переходов ею можно также пренебречь.

Принимая во внимание сделанные замечания, имеем окончательно:

$$M_{\ell, \ell}^{-3} (\text{мех.}) = M_{\ell, \ell}^{-3} (\text{кул.}) + \frac{1}{2\ell(\ell+1)} \left\{ \frac{2\ell(\ell+1)}{\rho' (t^2 - \ell^2)} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\rho' (\eta - D^{1/2} + \ell^2)^{1/2}}{\rho' (\eta + D^{1/2} + \ell^2)^{1/2}} \right] - \frac{(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}}{\rho'} + \frac{\eta}{\ell} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\ell^2 + \eta \rho'}{\ell (\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right) \right] \right\}. \quad (40)$$

Обсуждение величины искажений в этом случае будет дано ниже.

## § 2. Ядерный механизм возбуждения. Переходы на ротационные и вибрационные уровни

В коллективной модели принято считать <sup>1/1/</sup>, что радиальная часть матричного элемента определяется соотношением

$$M_{\ell, \ell} (\text{яд.}) = \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} f_{\ell} \frac{dU(r, R_0)}{dR_0} f_{\ell} dr. \quad (41)$$

Здесь мы ограничимся рассмотрением диагональных матричных элементов и случаем  $\lambda=2$ .  $dU/dR_0$  — производная от оптического потенциала по среднему радиусу взаимодействия. Вычислим этот матричный элемент.

Дифференцируя уравнение Шредингера:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r, R_0) \right] f_{\ell} = 0$$

$$V(r, R_0) = \frac{2m}{\hbar^2} U(r, R_0)$$

по  $R_0$  умножая его на  $f_{\ell}$  и интегрируя, получаем

$$\int_0^{\infty} \left[ f_{\ell} \frac{d^2}{dr^2} \frac{df_{\ell}}{dR_0} - \frac{df_{\ell}}{dr} \frac{d^2 f_{\ell}}{dR_0 dr} \right] dr = \int_0^{\infty} f_{\ell} \frac{dV}{dR_0} f_{\ell} dr = \left[ f_{\ell} \frac{d}{dr} \frac{df_{\ell}}{dR_0} - \frac{df_{\ell}}{dR_0} \frac{df_{\ell}}{dr} \right]_{r \rightarrow \infty}. \quad (42)$$

Учитывая асимптотическое поведение функций  $f_{\ell}$  (см. (7)) и тот факт, что фазы  $\delta_{\ell}$  зависят от  $R_0$  и не зависят от  $r$ , имеем

$$\left[ f_{\ell} \frac{d}{dr} \frac{df_{\ell}}{dR_0} - \frac{df_{\ell}}{dR_0} \frac{df_{\ell}}{dr} \right]_{r \rightarrow \infty} = - \left[ \frac{d\phi_{\ell}}{dr} \frac{d\delta_{\ell}}{dR_0} \sin^2 \phi_{\ell} + \frac{d\phi_{\ell}}{dr} \frac{d\delta_{\ell}}{dR_0} \cos^2 \phi_{\ell} \right]_{r \rightarrow \infty} = - \left[ \frac{d\phi_{\ell}}{dr} \frac{d\delta_{\ell}}{dR_0} \right]_{r \rightarrow \infty} = -k \frac{d\delta_{\ell}}{dR_0}. \quad (43)$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} f_{\ell} \frac{dU(r, R_0)}{dR_0} f_{\ell} dr = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d\delta_{\ell}}{dR_0} = -\frac{E}{k} \frac{d\delta_{\ell}}{dR_0}. \quad (44)$$

Вычислим  $d\delta_{\ell}/dR_0$ . Исходя из определения квазиклассической фазы  $\delta_{\ell}$ , получаем:

$$\frac{d\delta_{\ell}}{dR_0} = \frac{1}{2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r, R_0) \right]^{-1/2} \frac{dV}{dR_0} dr.$$

Наиболее часто используется ядерный потенциал типа Саксона-Вуда. Для него  $dV/dR_0 = -dV/dr$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_{\ell}}{dR_0} &= -\frac{1}{2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r, R_0) \right]^{-1/2} \frac{dV}{dr} dr = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V \right]^{-1/2} \left[ \frac{dV}{dr} + \frac{2k\eta}{r^2} + \frac{2(\ell+1)\ell}{r^3} \right] dr + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V \right]^{-1/2} \left[ \frac{2k\eta}{r^2} + \frac{2(\ell+1)\ell}{r^3} \right] dr = \\ &= -k + k\eta \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} + \\ &+ \ell(\ell+1) \int_{r_{\min}}^{\infty} \left[ k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^3}. \end{aligned} \quad (45)$$

Первый интеграл в правой части (45) определяется соотношением (34), второй интеграл также вычислен (см. (37)).

Производя преобразования, совершенно аналогичные проведенным в предыдущем разделе, получим для матричного элемента формулу:

$$\begin{aligned} M_{\ell, \ell}(\text{яд.}) &= \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} f_{\ell} \frac{dU(r, R_0)}{dR_0} f_{\ell} dr = -\frac{E}{k^2} \left( \frac{d \operatorname{Re} \delta_{\ell}}{dR_0} + i \frac{d \operatorname{Im} \delta_{\ell}}{dR_0} \right) = \\ &= -\frac{E}{k^2} \left\{ \frac{2}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \left( \frac{\rho^2}{\rho'} + \eta \right) \operatorname{arctg} \left[ \frac{\rho'(\eta - D^{1/2}) + \rho^2}{\rho'(\eta + D^{1/2}) + \rho^2} \right] - \frac{(\rho_k^2 - \rho^2)^{1/2}}{\rho'} \right\} + \\ &+ \frac{i E \gamma}{2k^2} \left( \frac{\rho}{\rho'} + \frac{\eta}{\ell} \right); \quad \ell < \ell < \ell_k. \end{aligned} \quad (46)$$

Остановимся теперь кратко на функциях, характеризующих искажение (см. (38)) матричного элемента  $M_{\ell\ell}^{-s}$  (иск) и величину реальной части матричного элемента (см. (46))  $M_{\ell\ell}$  (яд.). Они сходны по своему виду. Первая из них равна:

$$\psi_1 = \frac{\eta}{\ell} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\ell^2 + \eta \rho'}{\ell (\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}} \right) \right] + \frac{2\ell (\ell + 1)}{\rho' (\ell^2 - \ell_k^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\rho' (\eta - D^{1/2}) + \ell^2}{\rho' (\eta + D^{1/2}) + \ell^2} \right]^{1/2} - \frac{(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}}{\rho'}. \quad (47)$$

а вторая

$$\psi_2 = \frac{2}{(\ell^2 - \ell_k^2)^{1/2}} \left( \frac{\ell^2}{\rho'} + \eta \right) \operatorname{arctg} \left[ \frac{\rho' (\eta - D^{1/2}) + \ell^2}{\rho' (\eta + D^{1/2}) + \ell^2} \right]^{1/2} - \frac{(\ell_k^2 - \ell^2)^{1/2}}{\rho'}. \quad (48)$$

На рис. 1 представлены функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  для столкновения ядер  $\text{Ne}^{20}$  и  $\text{Au}^{197}$  ( $E_{\text{с.п.м.}} = 200$  Мэв).

Как  $\psi_1$ , так и  $\psi_2$  равны нулю в точке  $\ell = \ell_k$ , которая соответствует включению ядерных сил. Затем эти функции медленно растут, достигая своего максимального значения вблизи  $\ell = \ell_1$ .

Парциальные волны с  $\ell$  вблизи  $\ell_1$  практически не дают никакого вклада в сечение из-за наличия в амплитуде гасящего множителя  $\exp[-\operatorname{Im} \delta_\ell]$ . Поэтому ясно, что наличием искажающей функции  $\psi_1$  в матричном элементе  $M_{\ell\ell}^{-s}$  (иск) можно пренебречь и положить  $M_{\ell\ell}^{-s}$  (иск)  $\approx M_{\ell\ell}^{-s}$  (кул). Связанная с такой заменой ошибка не превысит  $\sim 10\%$ .

Таким образом, вычисляя эффекты, обусловленные кулоновским механизмом возбуждения, при энергиях порядка 10 Мэв-нуклон<sup>-1</sup>, можно использовать  $M_{\ell\ell}^{-(\lambda+1)}$  (кул) в качестве матричных элементов. Искажения в этом случае проявляются в основном в наличии фактора  $[-\operatorname{Im} \delta_\ell]$  соответствующего плавному включению парциальных волн в области значений  $\ell_{1-} < \ell < \ell_k$ .

В случае ядерного механизма возбуждения в принципе необходимо учитывать как мнимую, так и действительную части матричного элемента (48).

Л и т е р а т у р а

1. N.Austern, Selected Topics in Nucl. Theory, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963.
2. К.Альдер, О.Бор, Т.Хус, Б.Моттельсон, О.Винтер. Деформация атомных ядер, ИЛ., Москва, 1958.
3. Я.Грабовски, Е.Н.Калинкин. Ядерная физика, 1, 215 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел  
11 августа 1965 г.

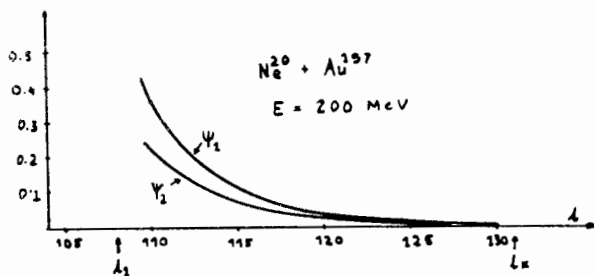


Рис. 1.